ED Serie 2

Sebastian Keller
Florian Kraushbeck
Fabian Voigt

2.2

a) $$\varphi(r) = \underbrace{\int_S d^2r \frac{\sigma(r')}{|r-r'|}}_{=\Phi} - \underbrace{\int_{S'} d^2r \frac{\sigma(r')}{|r-r'|}}_{=\Phi'}$$

$$= \int_S d^2r \frac{\sigma(r')}{|r-r'|} - \int_S \frac{d^2r'\,\sigma(r')}{|r-r'+\vec{n}\,d(r)|}$$

$$= \int_S d^2r'\sigma(r') \underbrace{\left[\frac{1}{|r-r'|} - \frac{1}{|r-r'+\vec{n}\,d(r)|}\right]} = \int_S d^2r' \underbrace{\sigma(r')\,d(r')}_{=D(\vec{r})} \vec{n}\cdot\nabla' \frac{1}{|r-r'|}$$

Taylor: $\approx d(r)\,\vec{n}\cdot\nabla'\frac{1}{|r-r'|}$, $d(r')\to 0$

Dipolmoment für $d(\vec{r}')\to 0$

$$\vec{n}\cdot\nabla'\frac{1}{|r-r'|} = \vec{n}\cdot\frac{-(r-r')}{|r-r'|^3} = -\frac{\overset{=1}{|\vec{n}|}\,\cancel{|r-r'|}\cdot\cos\vartheta}{|r-r'|^{\cancel{3}\,2}} = -\underbrace{\frac{\cos\vartheta}{|r-r'|^2}}_{=d\Omega}$$

Raumwinkel

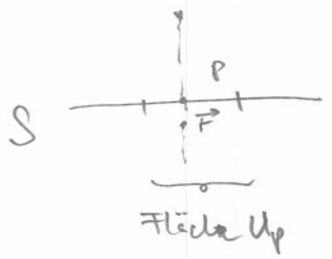
$(= \sin\theta\, d\theta\, d\varphi)$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = -\int_S d\Omega\, D(\vec{r}')$$

(→ Skaliere Fläche S auf Einheitskugel und integriere $D(\vec{r})$ über die Kugel)

b) fast wie a) : $\varphi(r) = -\int_S \phi_D(r')\, d^2 r'$

$$= \int_S - \frac{p \cdot (r-r')}{|r-r'|^3} \cdot d^2_{r'} = \int_S - \frac{\overbrace{|p| \cos\vartheta}^{D(r)}}{|r-r'|^2} dr'^2 = -\int_S D(r)\, d\Omega$$

c) 

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_S d\Omega\, D(r)$$

unten: $\varphi(\vec{r}) = -\int_{U_P} d\Omega\, D(r) = -\underbrace{2\pi}_{\text{Fläche der Halbkugel}} \cdot D(P)$

Für $\vec{r}$ nahe an P umfasst U_P schon fast 180°

oben: $\varphi(\vec{r}) = +\int_{U_P} d\Omega\, D(r) = 2\pi\, D(P)$

D(r) wechselt Vorzeichen bei Durchdringung!

$$\Rightarrow \quad \delta\varphi(P) = \varphi_{\text{oben}} - \varphi_{\text{unten}} = 4\pi\, D(P)$$