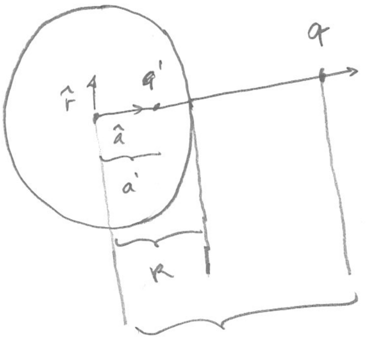
ED Serie 8

Sebastian Keller
Fabian Voigt
Florian Kransbeck

4.

a)



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - a\hat{a}|} + \frac{q'}{|\vec{r} - a'\hat{a}|}$$

$$\overset{\vec{r} = R\hat{r}}{=} \frac{q}{R\left|\hat{r} - \frac{a}{R}\hat{a}\right|} + \frac{q'}{a'\left|\frac{R}{a'}\hat{r} - \hat{a}\right|}$$

$$\left[\; \frac{a'}{R}, \; \frac{R}{a} \quad \Rightarrow \text{Fordere} \quad \frac{a}{R} = \frac{R}{a'} \; \right]$$

dann ist $\left|\hat{r} - \frac{a}{R}\hat{a}\right| = \left|\frac{R}{a'}\hat{r} - \hat{a}\right| \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\left|\hat{r} - \frac{a}{R}\hat{a}\right|}\left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{a'}\right)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Fordere} \quad \frac{q}{R} = -\frac{q'}{a'}}$ $\Rightarrow$ Rand-Bedingung $\varphi(\vec{r}, |\vec{r}| = R) = 0$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = -\frac{R/a' \cdot q'}{\left|\vec{r} - \left(\frac{R}{a'}\right)^2 \vec{a}'\right|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{a}'|}$$

Das Potential in der Kugel ergibt sich für $|\vec{r}| < R$ und das Feld ergibt sich aus $\vec{E} = -D\varphi$

Notation Skript: q Ladung in der Kugel. Notation Übung: vertausche einfach q, q' und a, a'

Berechung der Ladungsdichte: Es ist $E = 4\pi\sigma$ bzw. $\sigma = \frac{E}{4\pi}$

$$\sigma = \frac{-D\varphi(\vec{r})}{4\pi}, \quad |\vec{r}| = R$$

Induzierte Ladung: $q_{ind} = \frac{-1}{4\pi}\int_{S_R^2} D_r \left[\frac{-R/a \cdot q}{\left|\vec{r} - \left(\frac{R}{a}\right)^2 \vec{a}\right|} + \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|}\right] \cdot \vec{n} \cdot da \overset{\text{(hoffentlich)}}{=} -q$

Satz von Gauss sagt nun, dass das Feld im Aussenraum $= 0$ ist, da die Ladung in einem die Kugel umschliessenden Volumen ebenfalls $= 0$ ist $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\vec{E}_{aussen} = 0}}$

b) φ ist nun immer noch konstant auf der Hohlkugel, aber nicht mehr gleich 0.

Ich rate, das Potential auf der Kugel ist gleich $\frac{q}{R}$, egal wo in der Kugel die Ladung q ist, weiss aber nicht, wie man das zeigen könnte.

c) Gemäss dem Superpositionsprinzip verteilt sich die Ladung Q homogen.

---

3) $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \frac{Q}{|\vec{r}|} = \vec{r} \frac{Q}{|\vec{r}|^3} \Rightarrow u(\vec{r}) = \frac{Q^2}{8\pi |\vec{r}|^4}$

$$u_{tot} = \frac{Q^2}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \frac{dV}{|\vec{r}|^4} = \frac{Q^2}{2} \int_R^\infty \frac{1}{r^4} r^2 dr = \underline{\underline{\frac{Q^2}{2R}}}$$