Tipps Serie 2 QM

1) Störterme mit $B, \vec{L}, \vec{S}$ zu $-\frac{A}{2m} + \frac{Ze}{|x|}$ ← auf $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$

$\underbrace{SU(2) \times SU(2)}_{\text{Symmetrien}}$

a) • $B = 0$, Spinbahnkopplung $\tau(\vec{L} \cdot \vec{S})$, τ klein

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

• $B \neq 0$ $\quad \mu \vec{B} \cdot (\vec{L} + g \vec{S}) + \tau \vec{L} \cdot \vec{S}$

$g \approx 2$ (gyromag Verhältnis)

↳ B klein zu τ: Anomaler Zeeman Effekt

↳ B gross zu τ: Paschen Back Effekt

• $\tau = 0$ $\quad B \neq 0$ normaler Zeeman Effekt

$\vec{B} = B e_z \qquad H = H_B \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_S$ auf $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$

$$H_B = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{e^2}{|x|} \qquad H_S = -g\frac{e}{2mc}\vec{S} \cdot \vec{B} = -g\frac{e}{2mc} S_3 \cdot B$$

Coulomb: $D\vec{A} = 0 \qquad \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{x} \wedge \vec{B} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$

z.z. $$H_B = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{|x|} + \underbrace{\frac{e}{2mc} L_z B}_{H \text{ paramagnetisch}} + \underbrace{\frac{e^2}{8mc^2} B^2 (x^2 + y^2)}_{H \text{ diamagnetisch}}$$

· $\operatorname{div} \vec{A} = 0$

$\vec{p} = -i\vec{D}$

$\vec{p}\cdot\vec{A} = \ldots = -\frac{1}{2}(\vec{x}\wedge\vec{B})\,\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{x}\wedge\vec{p})\cdot\vec{B}$

b) $n = 1, 2$ level das H-Atom:

EV + EW: ψ_{nlm}, $E_n^{(0)} = \frac{-e^2}{2a}$

$H^{(0)} = \frac{-\Delta}{2m} - \frac{e^2}{|x|}$ | $n=1$: $\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\, e^{-r/a}$

$n = 2$: $\underbrace{\psi_{200}}_{l=0}, \underbrace{\psi_{211}, \psi_{210}, \psi_{21-1}}_{l=1,\ m=1,0,-1}$

$L_z \psi_{lnm} = m\,\psi_{lnm}$, $E_2^{(0)} = \ldots$

$H_S = \underbrace{c\cdot S_z\cdot B}_{\text{schon diagonal}}$ $\underbrace{\overset{u_\uparrow}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}\ \overset{u_\downarrow}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}}_{EV}$

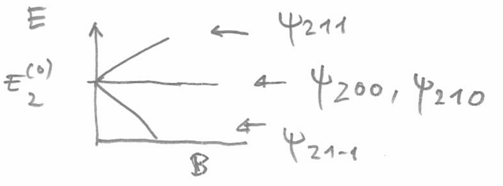
$n=1$: nicht entartete Störungstheorie

$n=2$: entartete Störungstheorie

$\tilde{H}^{(0)} = H^{(0)} + \frac{e}{2mc} L_z\cdot B$

$E_1^{(2)} = \langle \psi_{100} | B^2(x^2+y^2) | \psi_{100}\rangle$

$x^2+y^2 = r^2 - z^2 = r^2(1-\cos^2\vartheta)$



2) H-Atom im E-feld, Stark Effekt

$$H = \frac{-\Delta}{2m} - \frac{e^2}{|x|} - eE_z$$

a) $\sigma_\infty(H) = \mathbb{R}$, kein Punktspektrum

zeige: $\inf \sigma(H) = -\infty$

Es gilt $\inf \sigma(H) \leq \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{H}$

b) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stark Hamiltonian}}}{\inf(H)} = -\infty$

Testwellenfunktion

$\psi_a = W e^{-(x - a\cdot\hat{e}_z)^2}$, $a \in \mathbb{R}$

$\langle \psi_a | \psi_a \rangle = 1$

$m = 1/2$

$$\langle \psi_a | H | \psi_a \rangle = \underbrace{\langle \psi_a, -\Delta\psi_a \rangle}_{\text{beschränkt}} + \overbrace{\langle \psi_a, \frac{-e^2}{|x|}\psi_a \rangle}^{\text{auch beschränkt (zeige)}}$$

$$- eE \underbrace{\langle \psi_a, z\psi_a \rangle}_{\alpha - a}$$

$$\to -\infty \quad (a \to -\infty)$$

$\Rightarrow$ Spektrum nicht nach unten beschränkt

Rechne Terme aus $\quad -\Delta = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}$

$$\langle \psi_{n'\ell'm'} | e^{-itH} \psi_{n\ell m} \rangle \neq 0 \quad \simeq \langle \psi_{n'\ell'm'} | \mathbb{1} - itH | \psi_{n\ell m} \rangle$$

$$= \delta_{n'n} \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm} - it \langle \psi_{n'\ell'm'} | H \psi_{n\ell m} \rangle \neq 0$$

$n' = 1, \ \ell' = m' = 0$

$n = 2, \ \ell = 1, \ m = 0$

$\psi_{100} = \ldots$ siehe oben

$$\psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}\, a^{3/2}} \cos(\theta)\, r\, e^{-r/2a}$$

<u>Def</u> Ein irreduzibler Tensoroperator vom Typ (j, π)

ist eine Familie von $(2j+1)$ Operatoren

$$T_{j\pi}^{m}, \quad m \in \{-j, -j+1, \ldots, j\}$$

die wie folgt transformieren: $U_P T_{j\pi}^{m} U_P^{*} = \pi T_{j,\pi}^{m}, \quad \pi = \pm 1$

$$U(A) T_{j\pi}^{m} U(A^{*}) = \mathcal{D}_j(A)_{m'm} T_{j\pi}^{m'}$$

$A \in SU(2)$

$U(A) = e^{-i\vec{\alpha}\vec{L}}$

mit $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$

$A = e^{\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2i}}$

$\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$ Drehachse

$|\vec{\alpha}|$ Drehwinkel

$\mathcal{D}_j(A)$ (Wigner) Drehmatrix

in der Darst. $\mathcal{D}_j$

$$\mathcal{D}_j(A)_{m'm} = \langle j m' | e^{+i\vec{\alpha}\, \rho_j\left(\frac{\vec{\sigma}}{2i}\right)} | j m \rangle$$

$$\vec{J} := \rho_j\left(\frac{\vec{\sigma}}{2i}\right)$$

$|j, m\rangle$: Basisvektoren in $\mathcal{D}_j$

ρ_j: j-Darstellung von $SU(2)$

$$U(A) = U(\vec{\alpha}) = U(\varepsilon\hat{e}) \overset{\text{Entwicklung}}{=} \mathbb{1} - i\varepsilon\hat{e}\vec{L} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \text{ klein}$$

$$U(A)^* = \ldots = \mathbb{1} + i\varepsilon\hat{e}\vec{L}$$

$$\vartheta_j(\varepsilon\hat{e})_{m'm} = \langle jm' | \mathbb{1} - i\varepsilon\hat{e}\cdot\vec{J} | jm \rangle$$

$$(\mathbb{1} - i\varepsilon\hat{e}\vec{L})\, T^m_{j\pi}\, (1 + i\varepsilon\hat{e}\vec{L}) + O(\varepsilon^2) = \sum_{m'} \langle jm' | \mathbb{1} - i\varepsilon\hat{e}\vec{J} | jm \rangle\, T^{m'}_{j\pi} + O(\varepsilon^2)$$

$$[\hat{e}\vec{L}, T^m_{j\pi}] = \sum_{m'} \langle jm' | \hat{e}\vec{J} | jm \rangle\, T^{m'}_{j\pi}$$

- $\hat{e}$: $\hat{e} = (0,0,1)$

$$\Rightarrow \quad [L_3, T^m_{j\pi}] = \sum_{m'} \langle jm' | J_3 | jm \rangle\, T^{m'}_{j\pi}$$

$$J_3 | jm \rangle = m | jm \rangle = \sum_{m'} \langle jm' | jm \rangle\, m\, T^{m'}_{j\pi}$$

$$\Rightarrow [L_3, T^m_{j\pi}] = m\, T^{m'}_{j\pi}$$

- $\hat{e}$: $\hat{e} = (1, \pm i, 0)$ $\qquad \hat{e}\vec{L} = L_1 \pm i L_2 = L_\pm$ (Leiterop.)

$$\hat{e}\vec{J} = \ldots = J_\pm \qquad [L_\pm, T^m_{jm}] = \sum_{m'} \langle jm' | J_\pm | jm \rangle\, T^{m'}_{j\pi}$$

$$\Rightarrow J_\pm | jm \rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\, | j\, m\pm 1 \rangle$$

$$[L_\pm, T^m_{j\pi}] = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\, T^{m\pm 1}_{j\pi}$$

Anmerkungen:

$$\left\{\begin{array}{l} [J_3, T_{j\pi}^m] = m\, T_{j\pi}^m \\[2ex] [J_\pm, T_{j\pi}^m] = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\; T_{j\pi}^{m\pm 1} \end{array}\right. \qquad SU(2)$$

$j = 1$: Vektoroperatoren

$$\begin{aligned} X_1^1 &= \frac{x+iy}{\sqrt{2}} \\ X_1^0 &= -z \\ X_{-1}^1 &= -\frac{x-iy}{\sqrt{2}} \end{aligned} \qquad \left\{\begin{array}{l} \vec{L} = \vec{x} \wedge \frac{1}{i}\vec{D} \\[1ex] L_3 = \ldots \\[1ex] L_\pm = \ldots \end{array}\right.$$

Wigner - Eckart:

$$\langle \tilde{\psi}_{j_2}^{m_2} | T_j^m | \psi_{j_1}^{m_1} \rangle = \underbrace{(j m j_1 m_1 | j_2 m_2)}_{\neq 0}$$

$$\underbrace{\cdot \frac{(-1)^{2j}}{\sqrt{2j+1}} \langle \tilde{\psi}_{j_2} \| T_j \| \psi_{j_1} \rangle}_{\text{const.}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 + m = m_2 \\[1ex] j_2 \in \{ j_1 - j, |j_1 - j| + 1, \ldots, j_1 + j \end{array}\right. \qquad \text{Selection rules}$$

$\rightarrow$ Anwendung auf Stark effekt