QM Tipps 7

① $|\psi\rangle = sd(\phi_1, \dots, \phi_n) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) & \dots \\ \vdots & & \\ \phi_n(x_1) & \dots & \dots \end{vmatrix}$

$\tilde{\phi}_i = U_{ij}\phi_j \quad , \quad U \in GL(\mathbb{C}^n)$

$\langle\psi|O|\psi\rangle$

$|\tilde{\psi}\rangle = |\psi\rangle$

$|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{\phi}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\phi}_n(x_1, \dots, x_n) = \det U \, |\psi\rangle$

<u>Tipp:</u> Sei P eine Permutation in S_N

$$P|\psi\rangle = sd(\phi_{P(1)}, \dots, \phi_{P(N)}) = \mathrm{sgn}(P)\, sd(\phi_1, \dots, \phi_N) \quad (*)$$

$$|\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} \tilde{\phi}_1(x_{\sigma(1)}) \dots \tilde{\phi}_N(x_{\sigma(N)})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} U_{1k_1}\phi_{k_1}(x_{\sigma(1)}) \dots U_{Nk_N}\phi_{k_N}(x_{\sigma(N)})$$

$$= U_{1k_1} \dots U_{Nk_N} \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} \phi_{k_1}(x_{\sigma(1)}) \dots \phi_{k_N}(x_{\sigma(N)})$$

$$= sd(\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_N}) \underset{\uparrow}{=} sd(\phi_1, \dots, \phi_N) = |\psi\rangle$$

$\exists$ eine Permutation s.d. $P(1) = k_1, \dots, P(N) = k_N$, dann benutze $(*)$

Alternative:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \varepsilon_{k_1 \dots k_N} \tilde{\phi}_{k_1}(x_1) \dots \tilde{\phi}_{k_N}(x_N)$$

Zeige: $U_{l_1 k_1} \dots U_{l_N k_N} \varepsilon_{k_1 \dots k_N} = \det(U) \varepsilon_{l_1 \dots l_N}$

(3) Virialsatz

1 Teilchen: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$

$H_x = T_x + V_x$ z.B. $V_x = \frac{1}{|x|}$, $T_x = -\Delta_x$

mit $T_{e^\lambda x} = e^{\alpha\lambda} T_x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$V_{e^\lambda x} = e^{\beta\lambda} V_x, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

$$V_{e^\lambda x} = \frac{1}{|e^\lambda x|} = \frac{e^{-\lambda}}{|x|} \rightsquigarrow \beta = -1$$

$$T_{e^\lambda x} = \dots = e^{-2\lambda} T_x \rightsquigarrow \alpha = -2$$

$\langle \cdot \rangle_0$ Erwartungswert im Grundzustand

$\langle T \rangle_0 = -\frac{\alpha}{\beta} \langle V \rangle_0$ Allgemeinste Form d. Virialsatzes für 1 Teilchen

Beweisidee: φ_* sei der G.Z.

$$\mathcal{E}[\varphi] = \langle \varphi | H | \varphi \rangle \text{ mit } \langle \varphi | \varphi \rangle = 1$$

Besser: $\tilde{\mathcal{E}}[\varphi] = \langle \varphi | H | \varphi \rangle - \varepsilon(\langle \varphi | \varphi \rangle - 1)$

$$0 = \delta \mathcal{E}[\varphi_*] = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \mathcal{E}[\varphi_* + \lambda \delta\varphi]$$

$$= \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \mathcal{E}[\varphi_\lambda]$$ mit $\varphi_{\lambda=0} = \varphi_*$ und $\langle \varphi_\lambda, \varphi_\lambda \rangle = 1$

wenigstens in der Nähe von null

$$\varphi_\lambda(x) := e^{-3/2\lambda} \varphi(e^{-\lambda}x)$$

Verifiziere $1 \overset{!}{=} \langle \varphi_\lambda | \varphi_\lambda \rangle = \int d^3x \, e^{-3\lambda} |\varphi_*(\underbrace{e^{-\lambda}x}_{y})|^2$, $d^3y = e^{-3\lambda} d^3x$

$$= \int d^3y \, |\varphi_*(y)|^2 = 1 \quad (\to \text{OK})$$

Betrachte: $\langle \varphi_\lambda | H | \varphi_\lambda \rangle = \langle \varphi_\lambda | T_x | \varphi_\lambda \rangle + \langle \varphi_\lambda | V_x | \varphi_\lambda \rangle$

$$= \langle \varphi_* | T_{e^{-\lambda}x} | \varphi_* \rangle + \langle \varphi_* | V_{e^{-\lambda}x} | \varphi_* \rangle$$

$$= e^{\lambda\alpha} \langle \varphi_* | T_x | \varphi_* \rangle + e^{\lambda\beta} \langle \varphi_* | V_x | \varphi_* \rangle$$

$$\langle \varphi_\lambda | V_x | \varphi_\lambda \rangle = \int d^3x \, e^{-3\lambda} |\varphi_*(e^{-\lambda}x)|^2 \cdot \frac{1}{|x|} = \int d^3y \, |\varphi_*(y)|^2 \frac{1}{|e^{\lambda}y|}$$

<u>Hartree-Fock</u>: $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ $\quad \underline{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ $\quad \psi(x_1, \ldots, x_N) = \mathrm{sd}(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$

$$\psi_\lambda(x_1, \ldots, x_N) = e^{-\frac{3}{2}\lambda N} \psi(e^{-\lambda}x_1, \ldots, e^{-\lambda}x_N)$$

$$\langle \psi_\lambda | H | \psi_\lambda \rangle$$

2 $|\psi\rangle = sd(\phi_1, \dots, \phi_N)$

$\tilde{\phi}_i = U_{ij}\,\phi_j\ ,\quad U \in SU(N)$

$\{\phi_N\}_{i=1}^{N}$ spannen $\mathcal{D}_\ell$

$N = (2\ell+1)\cdot 2$

$U(R)\,\phi(x) = \phi(R^{-1}x)\ ,\quad R \in SO(3)$

$\tilde{U}(R)_{ji}\,\phi_i(x) = \tilde{\phi}_j(x)$

M = # Teilchen

$M < N$: $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_M$ (z.B.)

oder $\varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_{M+1}$

$M = N$: Nur eine Sd : $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_N$

Ab jetzt siehe K. Schnelkis Folien [$\rightarrow$ FREAKY STUFF]