

Kapitel 1: Gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen (DG)

1.1 Beispiele:

1.1.1 Aus der Analysis 1: $f(t) = \exp(t)$

$$f'(t) = f(t)$$

" $\exp t$

$$f' - f = 0$$

Diese Diff'gleichung ist linear

 $f_\lambda(t) = \lambda \exp t$ ist wiederum eine Lösung.Alle Lösungen $f' - f = 0$ sind von der Form $\lambda \exp t = f_\lambda(t)$.

Beweis: $e^{-t} f' - e^{-t} f = 0$

$$\frac{d}{dt}(e^{-t} f)$$

$$\left. \begin{array}{l} e^{-t} f' - e^{-t} f = 0 \\ \frac{d}{dt}(e^{-t} f) \end{array} \right\} \Rightarrow e^{-t} f(t) = \lambda \Rightarrow f(t) = \lambda e^t \quad \square$$

Lösungsraum
(alle möglichen Lö einer DG)

→ Differenzialgleichung erster Ordnung.

1.1.2 Beispiel aus der Trigonometrie:

$$\cos(t)' = -\sin(t)$$

$$\sin(t)' = \cos(t)$$

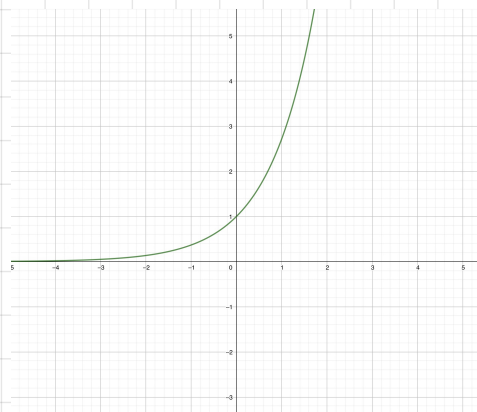
→ Die beiden Funktionen lösen die folgende Differenzialgleichung:

$$f''(t) + f(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

symbolisch: $f'' + f = 0$

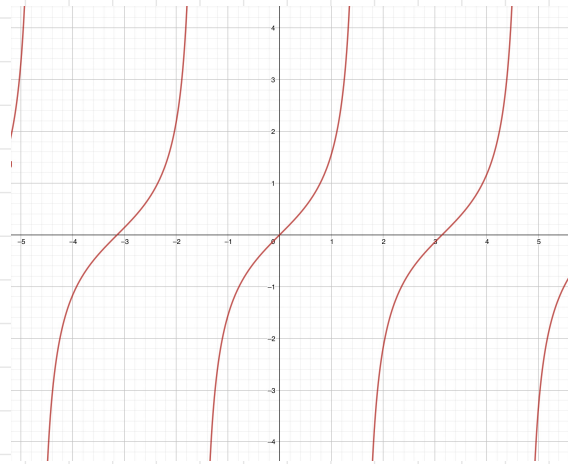
Diese DG ist auch linear, d.h.: Linearkombinationen von Lösungen sind wiederum Lösungen.

→ DG zweiter Ordnung.



1.1.3 Bsp. nichtlineare Differentialgleichung:

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$



→ periodisch.

→ nicht überall diff'bar!

Definitionsbereich $\mathbb{D}: \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} (2\mathbb{Z} + 1)$

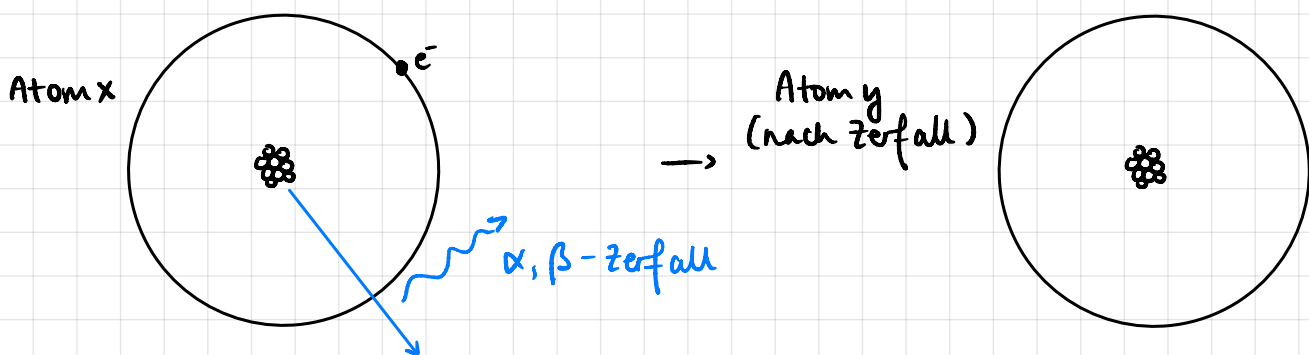
$$\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} (2\mathbb{Z} + 1) = \left\{ t; t \neq \frac{\pi}{2} (2P + 1) \mid P \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{D}$$

$$f'(t) = \frac{\cos(t)}{\cos(t)} - (-\sin(t)) \frac{\sin(t)}{(\cos(t))^2} = 1 + f^2(t)$$

$$f'(t) - 1 - f^2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{D}$$

$$-f' + 1 + f^2 = 0$$

1.1.3 Beispiel aus der Physik: Radioaktiver Zerfall



Bezeichnet W'keit, dass bestimmte Zerfallsart in einer gewissen Zeitspanne passiert.

für 1 Atom x:

$$P([t, t + \Delta t]) = \alpha \Delta t$$

↑
Materialkonstante

für N Atome: $N(t) P([t, t + \Delta t]) = \# \text{ Atome } x, \text{ die zwischen } t \text{ und } t + \Delta t \text{ zerfallen}$

↑
Atome, die zw. t & t + Δt zerfallen → Funktion nach Zeit

Dynamik bestimmen: $N(t+\Delta t) - N(t) = -\alpha N(t) \Delta t$

↑
weil wir verlieren Nukleide

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -\alpha N(t)$$

" ← nichts anderes als Ableitung!

$$\frac{d}{dt} N = -\alpha N(t)$$

$$f(t) = mN(t)$$

← ähnlich zu Bsp. 1.1.1!

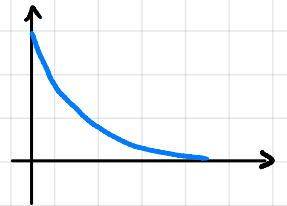
$$f' + \alpha f = 0$$

Lösungen der Gleichung bestimmen: $e^{\alpha t} f'(t) + \alpha e^{\alpha t} f(t) = 0$

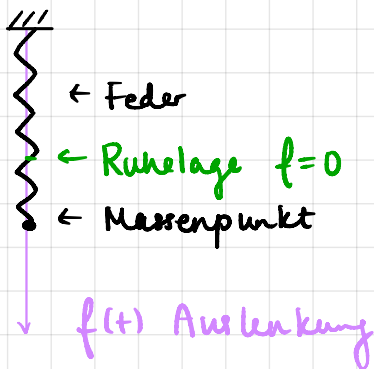
$$\frac{d}{dt} (e^{\alpha t} f(t)) = 0 \quad \leftarrow \text{Funktion ist konstant!}$$

d.h. es existiert f_0

$$f(t) = f_0 e^{-\alpha t} \quad \text{Zerfallsgesetz}$$



1.1.4 Beispiel aus der Mechanik



Skizziertes Modell. Wir ignorieren

i) Gravitation

ii) Dämpfung

Bewegungsgesetz von Newton:

$$m\ddot{f} = F \quad ? \quad \text{Hooke's Gesetz}$$

$$F = -kf$$

↑
Federkonstante, abhängig von Feder. $k > 0$

$$\Rightarrow \ddot{f} + \frac{k}{m} f = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 > 0$$

(üblich in Mathe, wenn Zahl > 0 ist, schreibt man sie im Quadrat).

$$\ddot{f} + \omega_0^2 f = 0 \quad \leftarrow \text{lineare Gleichung!}$$

$\left. \begin{matrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{matrix} \right\}$ sind 2 Lösungen von dieser Gleichung. Die ist linear zweiter Ordnung.

$f(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$ ist auch eine Lösung für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$

→ alle Lösungen sind von dieser Form!

Hier: Was sind a und b ?

$$t=0$$

$$f(0) = a$$

$$\dot{f}(0) = \omega_0 b$$

1.1.5 Beispiel mit mehreren Funktionen

→ Zerfall eines Atoms hat auch Einfluss auf andere Atome

$$\begin{cases} x_1: \dot{f}_1 = -\alpha_1 f_1 \\ x_2: \dot{f}_2 = \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} x_1: \dot{f}_1 = -\alpha_1 f_1 \\ x_2: \dot{f}_2 = \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 \end{cases}} \right\} \text{dynamisches System. Evolviert.}$$

→ Wie formuliert man das? → Vektorfunktion einführen:

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{F} = \begin{pmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}}_F \quad \boxed{\dot{F} = AF} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

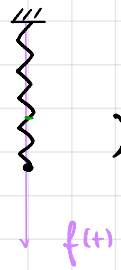
Matrixmultiplikation
Notation:

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 f_1 \\ \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{pmatrix}$$

↑ A ↑ Lösung

→ lineares Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung

1.1.6 Bemerkung:

Wir nehmen die Gleichung (aus )

$$\ddot{f} + \omega_0^2 f = 0$$

→ Es lohnt sich, die folgende Vektorfunktion einzuführen:

$$F(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{F} = \begin{pmatrix} \dot{f} \\ \ddot{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{f} \\ -\omega_0^2 f \end{pmatrix} \quad \dot{F} = BF$$

"
 B

↳ aus LGS 2. Ordnung nun
LGS 1. Ordnung! ☺

Morgen: wie löst man solche LGS?

→ HA: Matrixexponential (aus linAlg) recap.

$$e^A = e^{TDT^{-1}} = Te^{D}T^{-1}$$

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{d_1} & & & \\ & e^{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{d_n} \end{bmatrix}$$