ldewindt@ethz.ch

F.S. I lineare gewöhnliche Differenzialgleichungen LGDG

I.1.6 Bem: $F = \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \end{pmatrix}$

$$\dot{F} = \begin{pmatrix} \dot{f} \\ \ddot{f} \end{pmatrix} = AF$$

Sei $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $\dot{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} F$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ -\omega_0^2 f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \dot{f}_1$$

$$\ddot{f}_1 = \dot{f}_2 = -\omega_0^2 f_1$$

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_0 f = 0$$

← Die allgemeine Form für eine LDG mit konstanten Koeffizienten.

$$F = \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\dot{F} = \begin{pmatrix} \dot{f} \\ \ddot{f} \\ \vdots \\ f^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \emptyset & & \ddots & \emptyset \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix} = AF$$

I.2 Homogene Systeme linearer Differenzialgleichungen:

I.2.1 Definitionen:

Sei A eine $n \times n$ $\mathbb{R}$- (oder $\mathbb{C}$) Matrix

$F \in \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$)

↑ Vektorfunktion

Das DG-System $\boxed{\dot{F} = \frac{dF}{dt} = AF}$ ist die allgemeine Form von homogenen DGS erster Ordnung

↳ homogen bedeutet: $\dot{F} - AF = 0$

I.2.2 Satz:

Sei A eine $n \times n$ $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

und sei $F_0 \in \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$).

↑ fester Vektor (keine Vektorfunktion)

Dann besitzt das Anfangswertproblem $\begin{cases} \dot{F} = AF \\ F(0) = F_0 \end{cases}$ genau 1 Lösung.

Bem: (lineare Gleichungen sind ∞-mal diff'bar.)

Beispiel (Anwendung des Satzes):

$$\ddot{f} + \omega_0^2 f = 0$$

$$\dot{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} F$$

$$F_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ \dot{f}(0) \end{pmatrix}$$

$$f(t) = a \cos \omega_0 t + \frac{b}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} a \cos \omega_0 t + \frac{b}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ -a\omega_0 \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t \end{pmatrix}$$ ← nach Satz die einzige Lösung!

Beweis von Satz I.2.2

Vorgehen: gehen davon aus, dass Lösungen existieren → zeigen, dass sie eindeutig ist.

1. Eindeutigkeit: Seien F und G zwei Lösungen $H = F - G$

$$\dot{H} = \dot{F} - \dot{G} = AF - AG = A(F-G) = AH$$

$$H(0) = F(0) - G(0) = F_0 - F_0 = 0$$

Ziel: Wir beweisen, dass $H \equiv 0$ ist.

$\rightarrow 2H \cdot \dot{H} = \sum_{k=1}^{n} 2h_k \cdot \dot{h}_k$

Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

Rep. (aus lin Alg):

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

- $a \cdot b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$
- $\|a_2\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$

SP mit sich selbst. $\in \mathbb{R}$

$$2 \cdot H \cdot \dot{H} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} h_k^2 = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} h_k^2 = \frac{d}{dt}(H^2)$$

$$\frac{d}{dt} H^2 = 2H \cdot AH \leq 2\|H\|_2 \|AH\|_2 \leq 2 \,|||A|||_2 \|H\|_2^2 \leq C \|H\|_2^2$$

Satz 2.4.1 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$\boxed{\text{Matrixnorm: } |||A|||_2 := \max_{\|a\|_2 = 1} \|Aa\|_2}$ (alle Normen sind äquivalent!)

$$e^{-ct}\left(\frac{d}{dt} H^2 - CH^2\right) \leq 0$$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{-ct} H^2) \leq 0$ ← Funktion ist absteigend! $e^{-ct} H^2 \searrow \; \geq 0$

an der Stelle $t = 0$: $\quad e^{-c \cdot 0} H^2(0) = 0$

$\forall t \geq 0 \;\; e^{-ct} H^2(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \forall t \; H^2(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad H \equiv 0$ auf $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow F = G$ Wir sind mit der Eindeutigkeit fertig.

2. Existenz-Teil des Beweises

$\underset{n \times n \text{ Matrix}}{B} \quad \operatorname{Exp} B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \lim \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}$ ← existiert.

$B^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix}$

$t \longmapsto \operatorname{Exp}(tA)$

Diese Vektorfunktion ist C^1. Warum?

Satz 5.2.2 Skript von Kowalski
für uns: 5.4.1

Sei $f_m(t)$ eine Reihe von C^1 Funktionen auf $[0, T]$ $(T > 0)$

$f_m \xrightarrow[m \to \infty]{} f$ gleichmässig

$f_m' \xrightarrow[m \to \infty]{} g$ auch gleichmässig. $\quad \Rightarrow$ dann gilt $f' = g$

$$\phi(t) = \mathrm{Exp}(tA) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{(tA)^k}{k!} = \begin{pmatrix} \phi^1(t) \\ \vdots \\ \phi^m(t) \end{pmatrix}$$

betrachte $\sum_{k=0}^{m} \frac{(tA)^k}{k!}$: $\quad \phi_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(tA)^k}{k!} = \begin{pmatrix} \phi_m^1(t) \\ \vdots \\ \phi_m^m(t) \end{pmatrix}$

part. Summe

$\phi_m^j(t)$ sind Polynome von t

Serie 2: $\phi_m^j \xrightarrow[\text{gleichmässig}]{} \phi^j \quad [0,T]$

$$(\phi_m^j)' \xrightarrow[\text{gleichmässig}]{f'=g} (\phi^j)'$$

$$\frac{d}{dt}\phi_m(t) = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{d}{dt}(t^k)\frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m} k t^{k-1} \frac{A^k}{k!}$$

*) $\frac{k}{k!} = \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{1}{(k-1)!}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\phi_m(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} A = A \sum_{i=0}^{m-1} \frac{t^i}{i!} A^i \xrightarrow[m\to\infty]{[0,T] \text{ gleichm.}} A\,\mathrm{Exp}(tA)$$

neue Variable einführen: $i = k-1$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(At) = A\,\mathrm{Exp}(At)}$$

Satz 5.4.1 (über gleichm. Konvergenz)

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(\mathrm{Exp}(At))}_{\in M_{n\times n}(\mathbb{R})}\underbrace{F_0}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{A}_{\in M_{n\times n}(\mathbb{R})}\underbrace{\mathrm{Exp}(At)}_{M_{n\times n}(\mathbb{R})}\underbrace{F_0}_{\in \mathbb{R}^n}$$

(Anfangsbedingungen!)

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Exp}(At)F_0) = A\,\mathrm{Exp}(At)F_0$$

Sei $F(t) := \mathrm{Exp}(At)F_0$

$\Rightarrow \dot{F} = AF$ $\qquad$ wir haben eine Lösung!

Somit sind wir mit dem Beweis von der Existenz fertig ■

Beispiel I.2.3:

Geg: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ Anfangsbedingungen: $F_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ges: $F(t)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}$$

Induktivbeweis

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Verhalten genau gleich wie Diagonalmatrix.

Erinnerung Taylorentwicklung

Lösung: $F(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3e^t \\ e^{-2t} \end{pmatrix}}}$

I.2.4 Definition: $\Phi: t \longmapsto \operatorname{Exp}(tA)$ heisst Fundamentallösung des DGS.

I.2.5 Die Fundamentallösung für Diagonalmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \lambda_2 & \\ \emptyset & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Exp}\begin{pmatrix} t\lambda_1 & & \emptyset \\ & t\lambda_2 & \\ \emptyset & & \ddots \\ & & & t\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \emptyset \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ \emptyset & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{\begin{pmatrix} t\lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & t\lambda_m \end{pmatrix}^k}{k!}$$

Beweis: Induktion