ldewindt@ethz.ch

F.S. I.2 Homogene DGS

$$\frac{dF}{dt} = AF$$

$n \times n$ Matrix

Fundamentallösung: $\Phi(t) = \mathrm{Exp}(tA)$ Matrixexponential

$$\boxed{F(t) = \mathrm{Exp}(tA)\, F_0}$$

wobei $F_0 \in \mathbb{R}^n$ (Vektor)

$$F(0) = F_0$$

Bsp (einfacher Fall): A Diagonalmatrix

Wenn $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \emptyset \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Exp}(tA) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \emptyset \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

schwieriger Fall: A nicht Diagonalmatrix → muss noch diagonalisieren!

I.2.6 Die Fundamentallösung wenn die Matrix A diagonalisierbar ist

$$A = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix} T$$

$$\mathrm{Exp}(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

$$A^2 = T^{-1} D \underbrace{T T^{-1}}_{I_n} D T = T^{-1} D^2 T$$

$$\Rightarrow A^k = T^{-1} D^k T$$

...

$$\mathrm{Exp}(tA) = T^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tD)^k}{k!} T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T$$

Wenn A diagonalisierbar ist, sind alle Lösungen des zugehörigen DGS von der Form: $\boxed{F(t) = F_1 e^{\lambda_1 t} + F_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + F_n e^{\lambda_n t}}$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die EW von A sind.

→ anstatt die Matrix vollständig zu diagonalisieren: wichtiger die EW zu kennen!

I.2.7 Der Exponentialansatz (Sk. 5.6.1 iii)

$e^{\lambda t}$

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_1 f' + a_0 f = 0$$

$$\rightarrow \quad F = \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$ (Vektorfunktion) einführen

$$A(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \emptyset \\ & 0 & \ddots & \\ \emptyset & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dF}{dt} = A(a_0 \dots a_{n-1})\, F$$

Ansatz: Wir suchen $\boxed{f(t) = e^{\lambda t}}$ ← mögliche Werte von λ?

$$\dot{f} = \lambda e^{\lambda t}$$
$$\ddot{f} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t}$$

f ist eine Lösung von der Gleichung genau dann wenn λ eine Nullstelle vom Polynom $\boxed{P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0}$ ist. Grad $P = n$

charakteristisches Polynom der Gleichung

Anstatt A zu diagonalisieren → direkt zu chp gehen & Nullstellen bestimmen.

$P(\lambda)$ heisst das charakteristische Polynom der Gleichung

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_0 f = 0$$

Was ist der Zusammenhang zw. Chp. und das zugehörige LDGS?

Behauptung: $P(\lambda) = (-1)^n \underbrace{\det(A(a_0 \cdots a_{n-1}) - \lambda I_n)}_{}$

$=$ das charakteristische Polynom von $A(a_0 \cdots a_{n-1})$ selbst.

Beweis von der Behauptung:

Induktionsbeweis:

$\underline{n=1}$: $\dot{f} + a_0 f = 0$

$P(\lambda) = \lambda + a_0$ (Polynom 1. Grades)

$A(a_0) = (-a_0)$
1x1 Matrix

$$\det(A(a_0) - \lambda I) = \det(-a_0 - \lambda) = -(a_0 + \lambda) = -P(\lambda)$$

Nehmen wir an, dass die Behauptung bis $n-1$ gilt (für alle möglichen Matrizen)

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & & \\ 0 & -\lambda & \ddots & \emptyset \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \emptyset & \ddots & 1 \\ -a_0 & & & -a_{n-1}-\lambda \end{bmatrix} = \underbrace{-\lambda \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & \ddots & & 1 \\ -a_0 & \cdots & & -a_{n-1}-\lambda \end{bmatrix}}_{\det(A(a_0 \cdots a_{n-1}) - \lambda I)} + \underbrace{(-1)^n \det \begin{bmatrix} 1 & \ddots & \emptyset \\ -\lambda & \ddots & \\ \emptyset & \ddots & 1 \end{bmatrix}}_{(-1)^n a_0}$$

Dreiecksmatrix
→ nur Diagonalelemente von Bedeutung für Det.

Nach der Induktionshypothese gilt:

$$\det(A(a_1 \cdots a_{n-1}) - \lambda I_{n-1}) = (-1)^{n-1}(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_1)$$

$$\Rightarrow \det(A(a_0 \cdots a_{n-1}) - \lambda I_n)$$

$$= (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) \quad \blacksquare$$

I.2.8 Beispiel (Sk. 5.6.3 i))

$$f^{(4)} - 3f^{(2)} + 2f = 0$$

$$\to P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 2 = (\lambda^2-1)(\lambda^2-2)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = \sqrt{2} \\ \lambda_4 = -\sqrt{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda_i \neq \lambda_j \\ i \neq j \\ \text{4 davon !} \end{array}$$

→ Wir wissen dann, dass $A(2,0,-3,0)$ diagonalisierbar ist

$$F(t) = F_1 e^t + F_2 e^{-t} + F_3 e^{\sqrt{2}t} + F_4 e^{-\sqrt{2}t}$$

$$F = \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \ddot{f} \\ f^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(t) = f_1 e^t + f_2 e^{-t} + f_3 e^{\sqrt{2}t} + f_4 e^{-\sqrt{2}t}$$

brauchen AB zu $f(t)$ total zu bestimmen.

I.2.9 Federpendel:

$$\ddot{f} + \omega_0^2 f = 0$$

$$\to P(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2 = (\lambda - i\omega_0)(\lambda + i\omega_0)$$

$$\lambda_1 = i\omega_0$$
$$\lambda_2 = -i\omega_0$$

$$f(t) = f_1 e^{i\omega_0 t} + f_2 e^{-i\omega_0 t}$$

$$f_1, f_2 \in \mathbb{C}$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$$

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)$$

Die reellen Lösungen sind von der Form

$$\boxed{f(t) = a\cos\omega_0 t + b \sin\omega_0 t} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Problem: wenn A nicht diagonalisierbar ist:

Bsp: $\ddot{f} = 0$

Wir suchen Lösungen von der Form $f(t) = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 = 0 \iff \lambda = 0$$

$$e^{0t} = 1$$

$f(t) = t$ ist auch eine Lösung (nicht mehr exp! Was passiert?)

$$\dot{F}(t) = \dot{\begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \end{pmatrix} = A\,(0,0)$$

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2$$

Wenn Matrix diagonalisierbar wäre: $T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T = 0$

hier nicht der Fall!

D.h.: wenn Matrix nicht diagonalisierbar ist: wir kriegen neue Art von Lösungen!

I.2.10 Der Begriff von Lösungsraum

$$\frac{dF}{dt} = AF \rightsquigarrow \boxed{X_A := \left\{ F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),\ \frac{dF}{dt} = AF \right\}}$$

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ heisst **Lösungsraum** von dem DGS.

Satz (Sk. 5.6.2)

Sei eine $n \times n$ $\mathbb{R}$ Matrix A

⚠ Der Lösungsraum X_A bildet einen n dimensional-Untervektorraum von $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$

Beweis vom Satz I.2.10

X_A bildet einen Untervektorraum:

Seien $F_1, F_2 \in X_A$ seien a_1, a_2

$$\frac{d}{dt}(a_1F_1 + a_2F_2) = a_1AF_1 + a_2AF_2 = A(a_1F_1 + a_2F_2)$$

Behauptung 1: $\dim X_A \leq n$

$$\Phi: F_0 \in \mathbb{R}^n \xmapsto{\text{ist linear}} \operatorname{Exp}(tA)F_0 \in X_A$$

aus Satz I.2.2 (Sk. 5.6.1) wissen wir, dass Φ surjektiv ist.

$$\Rightarrow \dim X_A \leq \dim \mathbb{R}^n = n$$

linear & surjektiv: Bildraum kleiner als Urbildraum!

Behauptung 2: $\dim X_A \geq n$

$$F_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Stelle } i$$

Seien $F_i(t) = \operatorname{Exp}(tA)F_i$

Seien $(a_1 \cdots a_n) \in X_A$

$$0_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(t) \Rightarrow t=0 \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow (a_1 \cdots a_n) = (0, \cdots 0)$$

$\forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (F_1(t), \ldots, F_n(t))$ in X_A sind linear unabhängig!

aus linAlg: $\Rightarrow \dim X_A \geq n$ ■

Korollar I.2.11 (Sk 5.6.1)

Sei $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$

der Lösungsraum

$$Z(a_0 \cdots a_{n-1}) = \{ f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \ldots + a_0 f = 0 \}$$

bildet ein n-dimensionaler Untervektorraum von $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Beweis vom Korollar I.2.11

$$L: Z(a_0 \cdots a_{n-1}) \longmapsto X_A(a_0 \cdots a_{n-1})$$

$$L(f) = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix} = F(t)$$

L ist:
- linear ✓
- injektiv ✓
- surjektiv ✓

$\Rightarrow$ L bildet einen Isomorphismus ■

↳ die 2 Räume haben dieselbe Dimension