ldewindt@ethz.ch

F.S. I.2 Homogene Systeme linearer Gleichungen

$$\frac{dF}{dt} = AF \qquad t \longmapsto e^{\lambda_1 t}$$
$$t \longmapsto e^{\lambda t} F_0$$

Exponentialansatz

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_0 f = 0$$
$$t \longmapsto e^{\lambda t}$$

genau dann wenn λ_i = Nullstellen vom chp. $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$

↳ das charakteristische Polynom

Problem: manchmal gibt es verschiedene Lösungen

→ Bsp: $\ddot{f} = 0 \qquad \lambda = 0$

$$at + b = f(t)$$

↪ es gibt mehr Lösungen!

→ müssen Lösungsmenge genauer verstehen!

I.2.12 Nullstellen von komplexen Polynomen & Faktorisierung von kompl. P.

Satz (5.5.4): (Kowalski: Theorem 1.6.6 ; Gradi: 7.1)

Jedes Polynom $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vom Grad ≥ 1 besitzt mindestens eine Nullstelle.

Bsp: $x^2 + 1 = p(x)$

$$(x-i)(x+i) = p(x)$$

Diesen Satz werden wir später in der Vorlesung beweisen.

Anwendung: Sei $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \qquad a_n = 1$ ← Grad vom Polynom ist n

Satz ⇒ es existiert $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sodass $P(\lambda_0) = 0$

$$P(\lambda) = P(\lambda - \lambda_0 + \lambda_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\lambda - \lambda_0 + \lambda_0)^k$$

Binomialtheorem (Kowalski 1.6.10):

$$(\lambda - \lambda_0 + \lambda_0)^k = \sum_{\ell=0}^{k} C_k^\ell (\lambda - \lambda_0)^\ell \lambda_0^{k-\ell}$$

$k \geq \ell$

$$C_k^\ell = \binom{k}{\ell} = \boxed{\frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}}$$

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} a_k C_k^l (\lambda - \lambda_0)^l \lambda_0^{k-l} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_k (\lambda - \lambda_0)^k$$

abhängig von λ_0 → müssen nicht explizite bestimmen was es ist, weil wir brauchen sie nicht!

$P(\lambda_0) = 0 \Rightarrow b_0 = 0$

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} b_k (\lambda - \lambda_0)^k = (\lambda - \lambda_0) \underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{n} b_k (\lambda - \lambda_0)^{k-1}}}_{= q(\lambda)}$$

→ wenn wir eine Nullstelle finden, können wir $P(\lambda)$ so faktorisieren!

Wir wenden nun den Satz 5.5.4 dem Polynom $q(\lambda)$ an → so weit bis ...

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{n-1})$$ Faktorisierung!

↳ Achtung! Es kann sein, dass wir 2 (oder mehr) identische Nullstellen bekommen ↳ müssen diese gruppieren!

Korollar I.2.13: Sei P ein $\mathbb{C}$ Polynom der Form

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

- Es existiert $\lambda_1 \cdots \lambda_l \in \mathbb{C}$ wobei $l \leq n$ ⇐ だった?
- Es existiert $m_i \in \mathbb{N}^*$ ← ? $\lambda_i \neq \lambda_j \Leftrightarrow i \neq j$

so dass $P(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ und $\sum_{i=1}^{l} m_i = n$

Matrix diagonalisierbar ⇔ Matrix mind. halbeinfach
↳ AM=GM $\forall \lambda_i$

$\ddot{f} - 2\dot{f} + f = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
$= \det(A(1,-2) - \lambda I_2)$

$$A(-1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$F = \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \end{pmatrix}$ einführen ⇝ $\dot{F} = AF$

Ableitungsoperator:

Notation

$$D(f) := \dot{f}$$

$$id(f) = f$$ Identität

$$(D - \lambda id)(f) = D(f) - \lambda f = \dot{f} - \lambda f$$

$$\Leftrightarrow (D-\lambda id)(D-\lambda id)(f) = (D-\lambda id)(\dot{f} - \lambda f) = \ddot{f} - 2\lambda \dot{f} + \lambda^2 f$$

$$\ddot{f} - 2\dot{f} + f = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(D - id)^2 (f) = 0$$

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$

$$\parallel$$

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{f} + a_0 f = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\prod_{i=1}^{\ell} (D - \lambda_i id)^{m_i} (f) = 0}$$

⊛ Wir betrachten ganz spezielle Matrizen: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

I.2.14 (Sk. 5.6.5)

Sei $P(\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ mit $m_i \in \mathbb{N}^*$ $\lambda_i \neq \lambda_j \Leftarrow i \neq j$

Der Lösungsraum von der zugehörigen linearen Differentialgleichung, deren charakteristisches Polynom $p(\lambda)$ gleicht, wird durch Linearkombinationen von den folgenden linearen unabhängigen Funktionen

$$\boxed{f_{ik}(t) = t^k e^{\lambda_i t} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq k < m_i}$$

darstellbar.

$$Z(a_0 \cdots a_{n-1}) = \text{span}(t^k e^{\lambda_i t})$$ ← es gibt genau n solche Funktionen!

Beispiel: $\ddot{f} - 2\dot{f} + f = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

$= (\lambda - 1)^2$

$\ddot{f} = 2\dot{f} - f$

$$\dot{\overline{\begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \end{pmatrix}$$

$\underline{e^t} = f_{10} \quad \underline{te^t} = f_{11}$

$\dot{f}_{11} = e^t + te^t$

$\ddot{f}_{11} = 2e^t + te^t$

$\ddot{f}_{11} - 2\dot{f}_{11} + f_{11} = 2e^t + te^t - 2e^t - 2te^t + te^t = 0$

Prüfen, dass $\dot{f}$ und $\ddot{f}$ linear unabhängig sind:

$b_{10}e^t + b_{11}te^t \equiv 0 \quad \underline{\forall t}$ ← muss gelten $\forall t$ b_{10}, b_{11} sind beliebig, aber fest!

$\underline{t=0}$: $b_{10} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \underline{b_{10} = b_{11} = 0}$

$\underline{t=1}$: $b_{11}te^t = 0$

$b_{11}e = 0$

$b_{11} \overset{!}{=} 0$

→ zugehörige Matrix ist nicht diagonalisierbar!
(なんでかよく分からなかった--
something with the Exponentiallösungen)

Beweis von dem Satz I.2.14

$$\prod_{i=1}^{l} (D - \lambda_i\, id)^{m_i}(f) = 0$$

D und λ_i id kommutieren! → d.h. Ordnung egal.

$$(D - \lambda\, id)(qe^{\lambda t}) = (\dot{\overline{q(t)e^{\lambda t}}}) - \lambda qe^{\lambda t} = \dot{q}(t)e^{\lambda t} + q(t)\lambda e^{\lambda t} - \lambda q(t)e^{\lambda t} =$$

beliebige λ ↑ beliebige Funktion

$$= (D - \lambda id)(q(t)e^{\lambda t}) = \dot{q}(t)e^{\lambda t}$$

$\vdots$

$$(D - \lambda id)^m (q(t)e^{\lambda t}) = q^{(m)}(t)e^{\lambda t}$$

$i_0 \in \{1 \dots l\}$ $\quad f_{i_0 k_0} = t^{k_0} e^{\lambda_{i_0} t}$

$\boxed{0 \le k_0 < m_i}$

Proposition: $\prod_{i=1}^{l} (D - \lambda_i \, id)(t^{k_0} e^{\lambda_{i_0} t}) =$

$$= \prod_{i \neq i_0} (D-\lambda_i \, id)^{m_i} \circ \underbrace{(D - \lambda_{i_0} \, id)^{m_{i_0}} (t^{k_0} \underbrace{e^{\lambda_{i_0} t}}_{= g(t)})} =$$

$$= \prod_{i \neq i_0} (D-\lambda_i \, id)^{m_i} \circ \frac{d^{m_{i_0}}}{dt^{m_{i_0}}} \underbrace{(t^{k_0})}_{= 0} e^{\lambda_{i_0} t} = 0$$

$(k_0 < m_{i_0})$

Schluss davon: Alle diese f_{ik} Funktionen lösen die Differenzialgleichung.

$i \quad m_i \quad \sum_{i=1}^{l} m_i = n$

aus Gestern: Dimension des Lösungsraums $= n$

2. Schritt vom Beweis: Behauptung: die Familie

$(f_{ik})_{\substack{i=1 \dots l \\ k=1 \dots m_i}}$ ist linear unabhängig

Seien $b_{ik} \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_i} b_{ik} f_{ik}(t) = 0 \quad \underline{\forall t \in \mathbb{R}}$

Hypothese: Nehmen wir an, dass unsere Aussage nicht stimmt

d.h. es gibt ein $b_{i_0 k} \neq 0$ (Beweis durch Widerspruch)

$b_{i_0 0} \; b_{i_0 1} \; b_{i_0 2} \; \dots \; b_{i_0 k} \; b_{i_0 m_{i_0}-1}$

$\neq 0$

k ist die grösste Zahl $\{0 \dots m_{i_0}-1\}$ sodass $b_{i_0 k} \neq 0$ $\quad k = k_0$

$$\prod_{i \neq i_0} (D-\lambda_i \, id)^{m_i} \sum_{i \neq i_0} b_{ik} f_{ik} = 0$$

$k < k_0$ $\quad (D-\lambda_{i_0} id)^{k_0}(f_{i_0 k}) =$ $\quad k_0 = \max\{k\}$

$$= (D-\lambda_{i_0} id)^{k_0}(t^k e^{\lambda_{i_0} t}) = \frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}}(t^k)\, e^{\lambda_1 t} = 0$$

$$0 = \prod_{i \neq i_0} (D-\lambda_i id)^{m_i} \circ (D-\lambda_{i_0} id)^{k_0} \Big(\sum_{i,k} b_{ik} f_{ik}(t)\Big)$$

PRISMA

Prisma capstone course

"sustainable cities and communities"

design thinking : Methode , kreativ zu denken