ldewindt@ethz.ch

F.S. I.2 Homogene GDGS

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \ldots + a_0 f = 0 \quad (*)$$

Ableitungsoperator: $Df = f'$

Identitäts-Operator: id: $id(f) = f$

$$D \circ D(f) = D(f') = f''$$

$$D: C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$$

$$D^k = \underbrace{D \circ D \circ \ldots \circ D}_{\text{k-mal verknüpft}}$$

$$D^k(f) = f^{(k)}$$

$$(*) \Leftrightarrow D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 id(f) = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$$= \prod_{i=1}^{\ell} (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \Leftarrow i \neq j \qquad m_i \in \mathbb{N}^*$$

m_i = Vielfachheit der NST

$\mathbb{N}^*$ = natürliche Zahlen ohne 0

$$\sum_{i=1}^{\ell} m_i = n$$

$$f_{ik} = t^k e^{\lambda_i t} \qquad \# f_{ik} = n$$

$i = 1, \ldots, \ell$

$0 \leq k < m_i$

die $\{f_{ik}\}$ Familie bildet eine Familie von genau n Elementen.

Satz I.2.14 (aus letzte Vorlesung): steht dort genauer.

$$\text{Span}\{f_{ik}\} = Z(a_0 \cdots a_{n-1}) = \text{Lösungsraum von } (*)$$

Bildet eine Basis von unserem Lösungsraum!

Beweis von I.2.14

Wir haben schon in der letzten V bewiesen, dass:

$$\operatorname{span}\{f_{ik}\} \subset Z(a_0 \cdots a_{n-1}).$$

Jetzt beweisen wir: $Z(a_0 \cdots a_{n-1}) \subset \operatorname{Span}\{f_{ik}\}$

$$\dim Z = n$$

→ Es genügt zu beweisen, dass die Familie $\{f_{ik}\}$ eine linear unabhängige Familie innerhalb $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ bildet:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$$
$$= \prod_{i=1}^{\ell} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$

$$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0 \,\mathrm{id}$$

$$(D+\lambda_i \,\mathrm{id}) \circ (D-\lambda_j \,\mathrm{id})(f) = (D-\lambda_i \,\mathrm{id})(\dot f - \lambda_j f)$$

$\lambda_i \neq \lambda_j$

$$= \ddot f - (\lambda_i + \lambda_j)\dot f + \lambda_i\lambda_j f$$
$$= (D-\lambda_j \,\mathrm{id}) \circ (D-\lambda_i \,\mathrm{id})$$

mittels Induktivbeweis $\Rightarrow P(D) = \prod_{i=1}^{\ell} (D-\lambda_i \,\mathrm{id})^{m_i}$

(was mit $\prod$ dargestellt wird =) Verknüpfung

letztes Mal gesehen: $(D-\lambda_i \,\mathrm{id})(q(t)e^{\lambda_i t}) = q^{(k)}(t)\, e^{\lambda_i t}$

$$\Rightarrow \boxed{(D-\lambda_i \,\mathrm{id})^{m_i}(\underbrace{t^k e^{\lambda_i t}}_{= f_{ik}(t)}) = 0 \quad k < m_i}$$

$\Rightarrow t^k e^{\lambda_i t}$ Mitglied vom Lösungsraum!

$$0 = \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{k=0}^{m_i - 1} b_{ik} f_{ik}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

linearkomb. von Funktionen

$$b_{ik} \in \mathbb{C}$$

Ziel: wir beweisen, dass alle $b_{ik} = 0$

↳ daraus folgt dann direkt, dass alle f_{ik} lin. unabh. sind.

Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass $\exists\, i_0$ und k mit $b_{i_0 k} \neq 0$

$b_{i_0 m_0-1} \quad b_{i_0 m_0-2} \quad \cdots \quad b_{i_0 0}$: es existiert mind. 1 $b_{i_0 k}$ hier wo $\neq 0$ ist.

Sei k_0 der höchste $k \in \{0 \cdots m_{i_0}-1\}$ mit $b_{i_0 k_0} \neq 0$

Vorgehensweise: wir versuchen, so viele Koeffizienten wie möglich von $\sum_{i=1}^{l} \sum_{k=0}^{m_i-1} b_{ik} f_{ik}$ zu "töten"

$$\prod_{i \neq i_0} (D-\lambda_i\, id)^{m_i} \left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{k=0}^{m_i-1} b_{ik} f_{ik}\right) = \prod_{i \neq i_0} (D-\lambda_i\, id)^{m_i} \left(\sum_{k=0}^{k_0} b_{i_0 k} f_{i_0 k}\right) = \underline{0}$$

es bleibt nur die Summe für i_0 (alle $i < i_0$ verschwinden.)

2. Schritt: alle $b_{i_0 k}$ mit $k < k_0$ umbringen:

$$\underline{\underline{0}} = \underbrace{(D-\lambda_{i_0}\, id)^{k_0} \circ \prod_{i \neq i_0} (D-\lambda_i\, id)^{m_i}}_{\text{Operator}} \left(\sum_{k=0}^{k_0} b_{i_0 k} f_{i_0 k}\right)$$

wenden auf an

diese 2 Operatoren kommutieren! → umkehren:

$$\underline{\underline{0}} = \prod_{i \neq i_0} (D-\lambda_i\, id)^{m_i} \circ (D-\lambda_{i_0}\, id)^{k_0} \left(\sum_{k=0}^{k_0} b_{i_0 k} f_{i_0 k}\right)$$

d.h. alle $k < k_0$ verschwinden!

$$0 = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{l} (D-\lambda_i\, id)^{m_i} \circ (D-\lambda_{i_0}\, id)^{k_0} \left(b_{i_0 k_0} t^{k_0} e^{\lambda_{i_0} t}\right) =$$

$\boxed{k_0\text{-te Ableitung von } t^{k_0} = k_0!}$

$$= \prod_{i \neq i_0} (D-\lambda_i\, id)^{m_i} \left(b_{i_0 k_0} k_0!\, e^{\lambda_{i_0} t}\right) = b_{i_0 k_0} k_0! \prod_{i \neq i_0} (\lambda_{i_0}-\lambda_i)^{m_i} e^{\lambda_{i_0} t} \;\underline{\underline{\neq}}\; 0$$

Induktivbeweis

Widerspruch! ■

I.3 Inhomogene GDGS (5.7 Skript)

GDGS gewöhnliche DGSysteme

I.3.1 Beispiel:

$$\dot{f} = -\alpha f + 1$$

$$\dot{f} + \alpha f = 1$$

Quelle → inhomogene Gleichung!

Wie lösen? → Wir suchen eine partikuläre Lösung:

$$f_{part}(t) \equiv \frac{1}{\alpha}$$

← warum löst das die GDGS ??

!

$\forall f$ nehmen wir $f - f_{part} = f_{hom}$

$$\dot{f}_{hom} + \alpha f_{hom} = 0$$

I.3.2

Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

Sei $B \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ Vektorfunktion

Sei F_{part} eine partikuläre Lösung von dem Inhomogenen System

von der Form: $\boxed{\frac{dF}{dt} = AF + B}$

Dann sind alle Lösungen von der Form $\boxed{F = F_{part} + F_{hom}}$

wobei F_{hom} das zugehörige homogene System

$\boxed{\frac{dF_{hom}}{dt} = AF_{hom}}$ löst.

D.h. $F = F_{part} + \text{Exp}(tA)F_0$ es reicht, 1 part. Lösung zu finden!

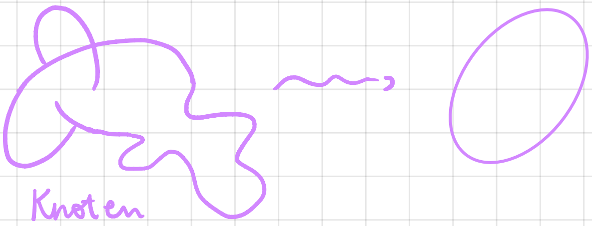
→ es gibt i.A. kein Rezept um eine partikuläre Lösung zu finden! → Übung & Glück.

II. Stetigkeit auf $\mathbb{R}^d$ + ein wenig Topologie (Skript Kap. 4)

↳ = Studium von Räumen, aber ohne Abstände zu messen.

mini-Exkurs:

Topologie → Ähnlichkeit: kann man ein Objekt in ein anderes Objekt transformieren, ohne ihn zu zerreissen, ohne Gewalt



Verbindung zur Knotentheorie!

⇒ in Topologie gleiches Objekt!

II.1. Grenzwerte von Funktionen:

II.1.1 Beispiel: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

a-priori wird f nur auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert.

↑ Lücke!

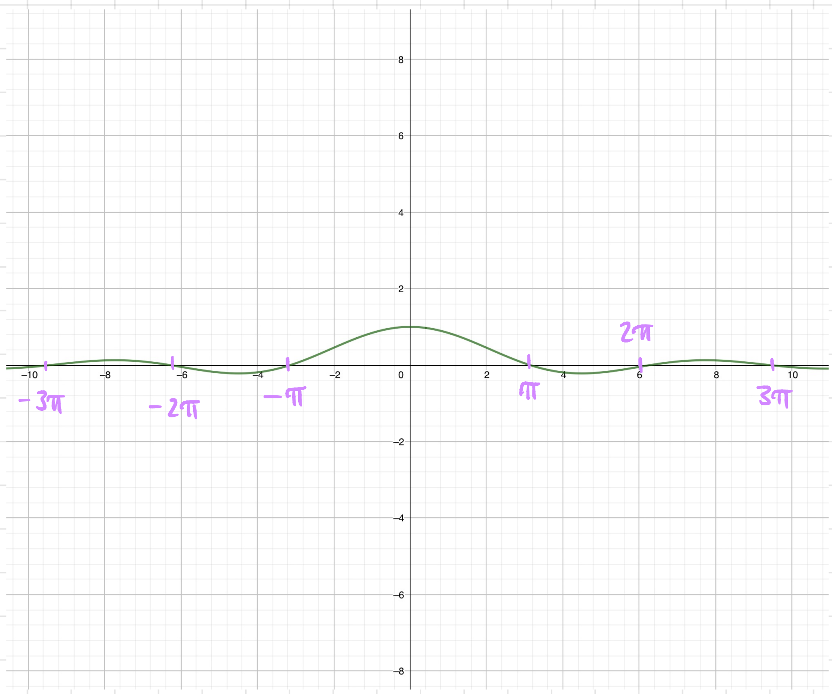
$\sin x = x(1 + r(x))$ Kor. 5.7.8 Kowalski

$\lim\limits_{x \to 0} r(x) = 0$

$r(x) = o(1)$

$\frac{\sin(x)}{x} = 1 + r(x)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3(r_3(x))$



$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + x^2(r_3(x)) \qquad \lim_{x\to 0} r_3(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Wir "können" $f(x)$ mit dem Wert $f(0) = 1$ an der Stelle 0 stetig ergänzen.

Thema: Darf man eine Funktion als stetige Funktion ergänzen ("Lücken füllen") oder nicht?

II.1.2 Definition: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$ man sagt dass

$x_k \to x$ <u>konvergiert</u>, wenn:

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\|_2 = 0$$

$$\|x_k - x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_k^i - x^i)^2}$$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ \vdots \\ x_k^d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall i = 1 \dots d \quad \boxed{\lim_{k\to\infty} x_k^i = x^i}$$