

II.1.1 Definition: $x_k \in \mathbb{R}^d$ s.d. $\exists x \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$$

II.1.2 Definition:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Der Abschluss von Ω ist die folgende Menge

Abschluss von $\overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^d \text{ s.d. } \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} x_k \in \Omega \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x\}$

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \Omega$$

$$\overline{\Omega} = \mathbb{R}$$

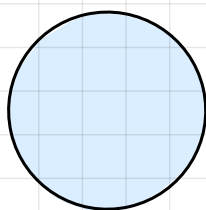
$$x_k = \frac{1}{k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x_k \rightarrow 0$$

$$\Omega \subset \overline{\Omega}$$

II.1.3 Beispiel: $B^2 = \{x = (x_1, x_2) ; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

offene Kugel



$$\overline{B^2} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

mit Rand

Behauptung ist, dass $\overline{B^2} = \overline{B^2}$

Beweis $B^2 \subset \overline{B^2}$ Sei $x \in B^2 \setminus \overline{B^2}$

$$\text{d.h. } |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$\text{Sei } x_k = x \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

$\cap$

$$B^2 \text{ da } |x_k| = 1 - \frac{1}{k} \leq 1$$

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$$

Wir beweisen, dass

$$\bar{B}^2 \subset B^2$$

$$x \in \bar{B}^2$$

per Def: $\exists x_k \xrightarrow{\in B^2} x$

Euklidische Norm

Dreiecksungleichung: $\|x\| = \|x - x_k + x_k\| \leq \underbrace{\|x - x_k\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|x_k\|}_{< 1}$

$$\Rightarrow_{k \rightarrow \infty} \|x\| \leq 1$$

Beispiel 2) $\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, x = \frac{p}{q} \right\}$

$\bar{\mathbb{Q}} = ?$ Behauptung $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar. $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar!

Doch: $\bar{\mathbb{Q}}$ bedeckt ganz $\mathbb{R}$.

Beweis: $x \in \mathbb{R}$

x besitzt eine Dezimaldarstellung.

d.h. $\exists N_x \in \mathbb{N}, \exists a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$$x = \sum_{k=-N_x}^{+\infty} a_k 10^{-k}$$

Kowalski Theorem 2.7-1

$$x_l = \sum_{k=-N_x}^l a_k 10^{-k} \in \mathbb{Q} \rightarrow \text{"}\mathbb{Q} \text{ ist in } \mathbb{R} \text{ dicht"}$$

$\hookrightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} x_l = x$ absolut konvergierende Reihe

Beispiel 3) $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{Q}$

Kowalski Theorem 1.5.1: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} x + \sqrt{2} &= y \\ &\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Von $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \exists y_k \in \mathbb{Q} \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y = \sqrt{2} + x$$

$$\mathbb{Q} \not\ni y_k - \sqrt{2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k - \sqrt{2} = \sqrt{2} + x - \sqrt{2} = x$$

II.1.4 Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\text{Sei } f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Man sagt: f hat an der Stelle $x_0 \in \Omega$ einen Grenzwert,

$$\text{Wenn } \exists a \in \mathbb{R}^n \text{ s.d. } \forall \underset{\Omega}{x_k} \longrightarrow x_0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = a$$

! Bem: Dann muss $a = f(x_0)$ weil $x_k \equiv x_0$

$\rightarrow$ Dann sagt man, dass f stetig ist an der Stelle x_0 .

Sei $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ (Rand von Ω).

f heißt an der Stelle x_0 ergnzbar, wenn $\exists a \in \mathbb{R}^n$

$$\text{s.d. } \forall \underset{\Omega}{x_k} \quad x_k \longrightarrow x_0$$

$$\text{dann } \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = a$$

Man kann dann f an dieser Stelle x_0 stetig ergänzen.

Beispiel: $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad ; \quad x_0 = 0 \in \overline{\Omega} \quad ; \quad a = 1$$

$$\lim_{x_k \rightarrow 0} f(x) = 1$$

II.1.5 Eigenschaften:

1) Seien $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ stetig an der Stelle $x_0 \in \Omega$

dann ist $\alpha f + \beta g$ auch an dieser Stelle stetig.

↳ Erhaltung der Stetigkeit nach Linearkombination

2) Seien $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ stetig an der Stelle x_0 .

dann ist $fg(x) = f(x) \cdot g(x)$ auch an der Stelle x_0 stetig.

(Produkt auf $\mathbb{C}$)

↳ Erhaltung der Stetigkeit nach Produkt

Anwendungen: Sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$

→ P ist an jeder Stelle in $\mathbb{C}$ stetig.

Beweis: im Skript. ■

II.1.6 Gegenbeispiel für Stetigkeit

$$X_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(Charakteristische Gleichung für $\mathbb{Q}$)

X ist nirgendwo stetig!

II.1.7 Definition:

Eine Funktion $f: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt L -Lipschitz falls gilt

$$\forall x, y \in \Omega: \|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$$

II.1.8 Beispiele

i) Die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$

$$\Omega = \mathbb{R}^d \quad f(x) := \|x\|$$

f ist 1-Lipschitz

Beweis: Behauptung: $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

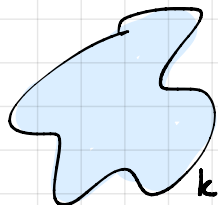
$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

$$\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\|$$

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

$\Rightarrow$ Die Behauptung stimmt

ii)



$\subset \mathbb{R}^d$

$$f(x) := \text{dist}(x, K) = \inf_{x_k \in K} \|x - x_k\|$$

$$K = \{0\} \text{ aus i)}$$

iii) Die Addition in $\mathbb{R}^d$

$(x, y) \in \underbrace{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d}_{\substack{\text{Def. bereich} \\ \text{IS} \\ \mathbb{R}^{2d}}} \xrightarrow{\quad} x + y \in \underbrace{\mathbb{R}^d}_{\text{Wertebereich}}$

weil $x = (x_1 \dots x_d)$

$y = (y_1 \dots y_d)$

$$\Rightarrow (x, y) = (x_1 \dots x_d, y_1 \dots y_d) \in \mathbb{R}^{2d}$$

Behauptung: $+$ ist $\sqrt{2}$ -Lipschitz

Beweis: $\|+(x, y) - +(x^0, y^0)\|^2 = \|x + y - (x^0 + y^0)\|^2 = \|(x - x^0) + (y - y^0)\|^2$

$$= \sum_{i=1}^d |x_i - x_i^0 + y_i - y_i^0|^2 \leq 2 \sum_{i=1}^d |x_i - x_i^0|^2 + |y_i - y_i^0|^2 =$$

$\uparrow$
 $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

$$= 2 \|(x, y) - (x^0, y^0)\|^2 \quad \blacksquare$$

II.1.9 (Skript 4.1.2):

Satz II.1.9

Sei $f: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ L Lipschitz auf Ω .

Dann ist f auf Ω stetig und sie ist auch auf $\bar{\Omega}$ stetig ergänzbar.

Beweis: Sei $x_0 \in \Omega$.

Behauptung 1: f ist an der Stelle x_0 stetig.

$$\text{Sei } x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x \quad \|f(x_k) - f(x)\| \leq \underbrace{L \|x - x_k\|}_{\rightarrow 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

$\Rightarrow$ Behauptung! $\checkmark$

Sei $x_0 \in \bar{\Omega} \setminus \Omega$.

Behauptung 2: f besitzt ein Limites an der Stelle x_0 .

$$x_k \rightarrow x_0$$

Frage: $\exists? a \in \mathbb{R}^n$ eindeutig mit $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = a$

$\hookrightarrow$ unabhängig von der Folge x_k die gegen x_0 konvergiert

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k, l \geq N : \|x_k - x_l\| \leq \varepsilon$$

$$\text{Hyp.} \Rightarrow \|f(x_k) - f(x_l)\| \leq L \|x_k - x_l\| \quad \varepsilon \text{ ist fest!}$$

$$\|f(x_k) - f(x_l)\| \leq L \varepsilon$$

$\nwarrow$ können wir so klein nehmen wie wir wollen!

$$\max_{i=1 \dots n} |f_i(x_k) - f_i(x_l)|$$

$$\Rightarrow \forall i = 1 \dots n$$

$f_i(x_k)$ bildet eine Cauchy Folge $\mathbb{R}$

Theorem: (Kowalski 2.8.8)

$$\exists a_i \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(x_k) = a_i \quad \forall i = 1 \dots n \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|f(x_k) - a\| = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = a$$

Frage: Ist a unabhängig von der Folge? $\rightarrow$ Ja!

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\Omega \ni y_k} & \\ \cup & & \\ x_k & \longrightarrow & x_0 \in \bar{\Omega} \setminus \Omega \end{array}$$

$$\|f(x_k) - f(y_k)\| \leq L \|x_k - y_k\|$$

$$\exists a, b \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = a$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = b$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\|f(x_k) - f(y_k)\|}_{=0} = \|a - b\|$$

$$\Rightarrow a = b \quad \blacksquare$$

II.1.10 Beispiel: Das Skalarprodukt

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

ist $\sqrt{2}L$ Lipschitz auf $B_{\mathbb{R}}(0)$

II.2 Kompaktheit

Recap Ana1: Definition einer Teilfolge:

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$. Eine Teilfolge von x_k ist $\Lambda \subset \mathbb{N}$
wobei Λ unendlich ist.

Sei $l: \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$ eine monotone Abzählung von Λ

$(x_{l(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ist die zugehörige von x_k .

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

Indizes sammeln, z.B. $\{2, 4, 5, \dots\} = \Lambda$
 $\uparrow \uparrow \uparrow$
 $\{1, 2, 3, \dots\}$

→ wir behalten die Ordnung!