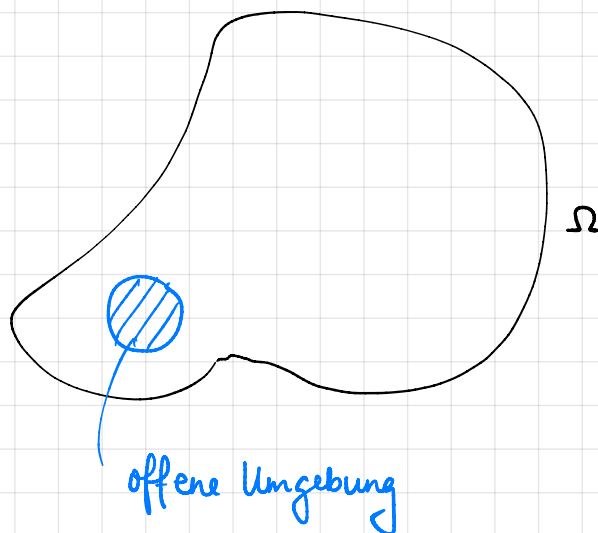


II.3 Ein wenig Topologie von $\mathbb{R}^d$ (kanonische Topologie)



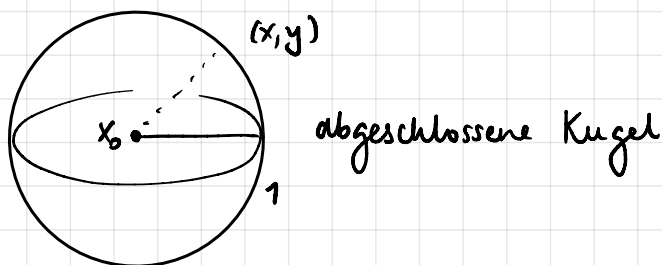
$$\forall x \in \Omega \quad \exists r > 0$$

$$B_r(x) \subset \Omega$$

II.3.5 Definition $A \subset \mathbb{R}^d$ heisst abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^d \setminus A$ offen ist.

II.3.6 Beispiele

i) $B_1^n(0) = \{x = (x_1 \dots x_d) \mid \sum x_i^2 \leq 1\}$



$$\text{Sei } y \in \mathbb{R}^d \setminus B_1^d(0)$$

$$B(y) \subset \mathbb{R}^d \setminus B_1^d(0)$$

$$\|y\| - 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^d \setminus B_1^d(0) \text{ offen} \Rightarrow B_1^d(0) \text{ ist abgeschlossen.}$$

ii) $\partial B_1^d(0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$ ist abgeschlossen.

(Rand der Kugel)

↑
Euklidische Norm

Bem: Es gibt Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind.

Beispiel: $\mathbb{Q}$ ist im $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen.

zeigen: 1) $\mathbb{Q}$ nicht abgeschlossen:

$$x \in \mathbb{Q} \quad \forall r > 0$$

$$\exists y \in B_r(x) = (x-r, x+r) \quad y \notin \mathbb{Q}$$

Grund: alle rationale Zahlen können durch irrationale Zahlen angenähert werden

$$\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

$\mathbb{Q}$ ist auch nicht abgeschlossen

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \forall r > 0 \quad \exists y \in \mathbb{Q} \cap B_r(x)$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ist nicht offen} \Leftrightarrow \mathbb{Q} \text{ ist nicht abgeschlossen}$$

II.3.7 Satz i) $\mathbb{R}^d$ und $\emptyset$ sind abgeschlossen

↑
die leere Menge

ii) Seien A_1 und A_2 abgeschlossen.

$\Rightarrow$ Dann ist $A_1 \cup A_2$ wiederum abgeschlossen.

iii) $(A_i)_{i \in I}$ A_i abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$

↑
Familie von Mengen

dann ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen

↑
Schnitt von A_i

Beweis: ii) $(A_1 \cup A_2)^c = \mathbb{R}^d \setminus (A_1 \cup A_2) =$

$$= \{x \in \mathbb{R}^d; x \notin A_1 \text{ und } x \notin A_2\}$$

$$= (\mathbb{R}^d \setminus A_1) \cap (\mathbb{R}^d \setminus A_2)$$

$$= A_1^c \cap A_2^c \quad \text{Satz I.3.3} \Rightarrow A_1^c \cap A_2^c \text{ ist offen}$$

iii) $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \{x \in \mathbb{R}^d; \exists i_x \in I \quad x \notin A_{i_x}\} =$

↑
 i abhängig von x

$$= \{x \in \mathbb{R}^d; \exists i_x \in I \text{ mit } x \in \mathbb{R}^d \setminus A_{i_x}\} =$$

$$= \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R}^d \setminus A_i) \quad \nwarrow \text{offen}$$

Satz II.3.3 $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R}^d \setminus A_i)$ ist offen

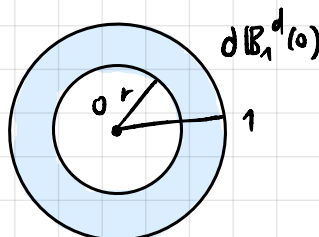
□

Zurück zum Rand der Kugel:

Beweis von $\partial B_1^d(0)$ ist abgeschlossen

wir wissen: $B_1^d(0)$ selber ist abgeschlossen.

$$\partial B_1(0) = \bigcap_{r < 1} \underbrace{\left(B_1^d(0) \cap (B_r(0))^c \right)}_{\text{ist abgeschlossen}}$$



Satz II.3.7 $\Rightarrow \partial B_1(0)$ ist abgeschlossen.

II.3.8 Definition:

Sei Ω eine beliebige Menge von $\mathbb{R}^d$.

i) das Innere von Ω ist die folgende Menge:

$$\overset{\circ}{\Omega} = \text{int}(\Omega) = \{x \in \Omega; \exists r > 0 \ B_r(x) \subset \Omega\}$$

x nicht am Rand -
"in Sicherheit".

Topologie ist qualitativ. $\rightarrow$ man nimmt einfach
Eigenschaften
Geometrie ist quantitativ.

ii) der Abschluss von Ω ist

$$\text{clos}(\Omega) = \bigcap_{\substack{\Omega \subset A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A \quad (\text{ist abgeschlossen})$$

$\Omega \subset A$

A abgeschlossen

Satz II.3.7

(Schnitt von allen A s die Ω enthalten)

iii) der Rand von Ω ist:

$$\partial \Omega = \text{clos}(\Omega) \setminus \text{int}(\Omega)$$

II.3.9 Bemerkung: $\text{clos}(\Omega)$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die Ω enthält während

$\overset{\circ}{\Omega} = \text{int}(\Omega)$ ist die grösste offene Menge, die von Ω enthalten wird.

Innere $\triangleq$ offener Kern

wenn Ω abgeschlossen ist: $\bar{\Omega} = \Omega$

$$\text{int}(\Omega) = \bigcup_{\substack{G \subset \Omega \\ G \text{ offen}}} G$$

$$\textcircled{1} \text{int}(\Omega) \subset \bigcup_{\substack{G \subset \Omega \\ G \text{ offen}}} G$$

Beweis: $x \in \text{int}(\Omega) \exists r > 0$

mit $B_r(x) \subset \Omega$

$$G = B_r(x)$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{\substack{G \subset \Omega \\ G \text{ offen}}} G$$

Vereinigung von G

$$\textcircled{2} \bigcup_{\substack{G \subset \Omega \\ G \text{ offen}}} G \subset \text{int}(\Omega)$$

$$\text{Sei } x \in \bigcup_{\substack{G \subset \Omega \\ G \text{ offen}}} G$$

d.h. $\exists G_x$ offen und $G_x \subset \Omega$ s.d. $x \in G_x$

$$\Rightarrow \exists r > 0 \text{ mit } B_r(x) \subset G_x \subset \Omega$$

$$\Rightarrow x \in \text{int}(\Omega)$$

□

Ω beliebig:

$$(\text{clos}(\Omega))^c = \left(\bigcap_{\substack{A \supset \Omega \\ A \text{ abgeschlossen}}} A \right)^c = \bigcup_{\substack{A \supset \Omega \\ A \text{ abgeschlossen}}} A^c = \bigcup_{\substack{A^c \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega \\ A^c \text{ offen}}} A^c \stackrel{\text{Variablenwechsel } A^c = G}{=} \bigcup_{\substack{G \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega \\ G \text{ offen}}} G$$

$$(\text{clos}(\Omega))^c = \text{int}(\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$$

$$\frac{\circ}{\bar{A}}$$

$$\frac{\circ}{\bar{A}}$$

← Serie 5

Satz II.3.10

$$\text{clos}(\Omega) = \bar{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^d; \exists x_k \in \Omega \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0\}$$

Beweis: Behauptung ①: $\text{clos}(\Omega) \subset \bar{\Omega}$

$$\text{Beweis: } x_0 \in \bigcap_{\substack{A \supset \Omega \\ A \text{ abg.}}} A$$

Indirekt: (Wir beweisen indirekt, dass $\forall r > 0 \quad \Omega \cap B_r(x_0) \neq \emptyset$)

$$\exists r_0 > 0$$

$$\Omega \cap B_{r_0}(x_0) = \emptyset$$

$A := {}^c B_{r_0}(x_0)$ ist abgeschlossen

$$\Rightarrow \Omega \cap B_{r_0}(x_0) = \emptyset \Rightarrow \Omega \subset A$$

$$x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus A \text{ aber}$$

$$\Rightarrow x_0 \notin \bigcap_{\substack{A \supset \Omega \\ A \text{ abg.}}} A \quad \text{Widerspruch!}$$

$$B_{1/k}(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset$$

$$\exists x_k \in \Omega \cap B_{1/k}(x_0)$$

$$\begin{cases} \|x_k - x_0\| < \frac{1}{k} \\ x_k \in \Omega \end{cases} \Rightarrow x_0 \in \bar{\Omega}$$

Behauptung ②: $\bar{\Omega} \subset \text{clos}(\Omega)$

Beweis: Sei $x_0 \in \bar{\Omega}$

$$\exists x_k \in \Omega \text{ mit } x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$$

Falls $x_0 \notin \text{clos}(\Omega)$ wäre (indirekter Beweis):

$$\begin{aligned} \text{d.h. falls } x_0 \notin \bigcap_{\substack{A \text{ abg.} \\ \Omega \subset A \\ A \supset \Omega}} A &\Rightarrow \exists A \text{ abg.} \\ &\quad \Omega \subset A \\ &\quad x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in \underbrace{\mathbb{R}^d \setminus A}_{\text{offen}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists r > 0 \text{ mit } B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^d \setminus A$$

$$\text{aber } (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap \Omega = \emptyset$$

$$\Rightarrow B_r(x_0) \cap \Omega = \emptyset$$

wir hatten die Existenz von $x_k \in \Omega$ mit $x_k \rightarrow x_0$ Widerspruch! $\square$

II.3.11 Charakterisierung des Rands von einer beliebigen Menge

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\partial\Omega := \left\{ x \in \mathbb{R}^d, \forall r > 0 \left\{ \begin{array}{l} B_r(x) \cap \Omega \neq \emptyset \\ \text{und} \\ (\mathbb{R}^d \setminus \Omega) \cap B_r(x) \neq \emptyset \end{array} \right\} \right\}$$

Beweis: $x_0 \in \partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \text{int}(\Omega)$

$$\Rightarrow x_0 \in \bar{\Omega} \text{ d.h. } \forall r > 0$$

$$B_r(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset$$

Falls $\exists r$

$$B_r(x_0) \cap (\mathbb{R}^d \setminus \Omega) = \emptyset$$

$$\text{d.h. } B_r(x_0) \subset \Omega \Rightarrow x_0 \in \text{int}(\Omega) \text{ Widerspruch!}$$

Wir haben $\partial\Omega \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^d; \forall r > 0 \left\{ \begin{array}{l} B_r(x) \cap \Omega \neq \emptyset \\ \text{und} \\ (\mathbb{R}^d \setminus \Omega) \cap B_r(x) \neq \emptyset \end{array} \right\} \right\}$

→ Manchmal ist der Rand viel grösser als die Menge selbst!

$$\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \underbrace{\text{int}(\mathbb{Q})}_{\emptyset} = \mathbb{R} \quad \leftarrow \text{Rand von } \mathbb{Q} \text{ ist viel gr\"osser als } \mathbb{Q} \text{ selbst!}$$

II. 3.12 Satz: Sei $A \subset \mathbb{R}^d$. die folgenden 2 Aussagen sind \"aquivalent:

- ① A ist abgeschlossen
 - ② $\forall x_k \in A$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ (existiert), dann ist $x_0 \in A$.
- $\rightarrow$ man ist "blockiert" in A

Beweis:

Aussage ① $\Rightarrow$ ②

$x_k \rightarrow x_0$ Falls $x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus A$ (offen)

da $\mathbb{R}^d \setminus A$ offen: $\exists r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^d \setminus A$

$\Rightarrow \|x_k - x_0\| > r$ Widerspruch!