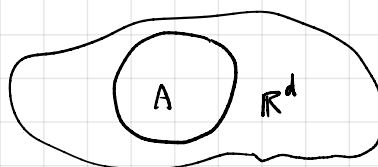


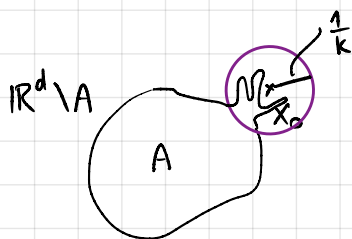
Satz II.3.12 (Charakterisierung von Abgeschlossenheit)

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ i) A ist abgeschlossen (d.h. $\mathbb{R}^d \setminus A$ offen)ii) $\forall$ Folgen von Punkten in A $((x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k \in A$) s.d. $\exists x_0$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ $\rightarrow$ dann $x_0 \in A$ $\rightarrow$ Diese 2 Aussagen sind äquivalent.

Beweis:

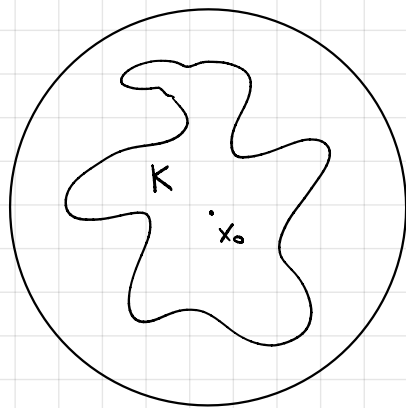
i) $\Rightarrow$ ii) letzte Vorlesung.Behauptung: ii) $\Rightarrow$ i)Sei A s.d. ii) gilt. zu beweisen: A ist abg. bzw. $\mathbb{R}^d \setminus A$ offenSei $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus A$

nehmen typischerweise das.

 $\exists r > 0$ mit $B_r(x) \subset \mathbb{R}^d \setminus A \quad ? \quad \forall x$ Indirekter Beweis: nehmen wir an, dass so ein $r > 0$ nicht existiert.d.h. $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x_k \in A \cap B_{1/k}(x_0)$ $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ Hypothese: $\Rightarrow x_0 \in A$ Widerspruch! $\Rightarrow$ die Behauptung $\square$

! Satz II.3.13 (Charakterisierung der Kompaktheit):

 $K \subset \mathbb{R}^d$: dann sind die 2 folgenden Aussagen äquivalent:i) K ist kompaktii) K ist beschränkt & abgeschlossen. $\rightarrow$ d.h. $\nexists$ Teile von A , die gegen ∞ divergieren. d.h. $\exists R > 0$ mit $K \subset B_R(0)$



II.3.14 Beispiele:

i) $B_1^d(0) = \{ x = (x_1 \dots x_d) \mid \sum_{i=1}^d x_i^2 \leq 1 \} = \overline{B_1^d(0)}$ (Abschluss von $B_1^d(0)$)

Ist abgeschlossen.

↳ abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^d$

ii) Sei Ω beschränkt.

Dann ist $\overline{\Omega}$ kompakt.

Warum? $\overline{\Omega}$ ist abg. (aus Def.)

$$\Omega \subset B_R(0) \quad (\text{da } \Omega \text{ beschränkt})$$

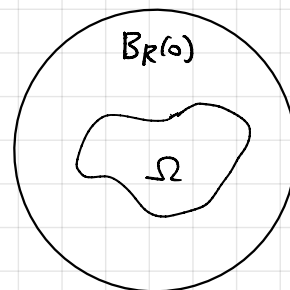
$$\Rightarrow \overline{\Omega} \subset \overline{B_R(0)} \Rightarrow \overline{\Omega} \text{ ist beschränkt.}$$

↑

$$\text{Grund: } \forall x \in \Omega \quad \|x\| < R$$

$$x_k \in \Omega \quad x_k \rightarrow x_0 \Rightarrow \|x_0\| \leq R$$

↑
konvergierende Folge von Elementen



Beweis (Satz II.3.13):

① Behauptung: i) $\Rightarrow$ ii)

Sei K kompakt. Ist K tatsächlich beschränkt?

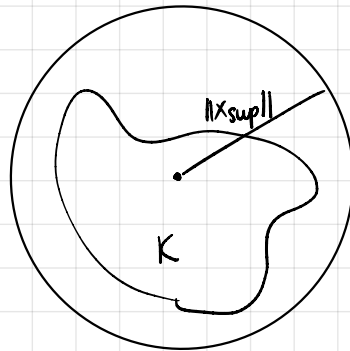
→ Nach Satz II.7: $\forall$ stetige Funktionen $f: K \rightarrow \mathbb{R}$: das Infimum & das Supremum von f wird in K erreicht.

d.h. $\exists x_{\inf} \in K$, $\exists x_{\sup} \in K$ mit $\begin{cases} f(x_{\inf}) = \inf \{ f(x), x \in K \} & \leftarrow \text{Minimum} \\ f(x_{\sup}) = \sup \{ f(x), x \in K \} & \leftarrow \text{Maximum} \end{cases}$

wir nehmen: $f(x) = \|x\|$ 1-lipschitz $\Rightarrow$ d.h. f ist überall auf $\mathbb{R}^d$ stetig.

$$\Rightarrow \exists x_{\text{sup}} \in K \quad \text{mit} \quad \|x_{\text{sup}}\| = \sup \{ \|x\|; x \in K \}$$

$$K \subset B_{\|x\|_{\text{sup}}} (0) \Rightarrow K \text{ ist beschränkt!} //$$



K kompakt $\Rightarrow K$ ist abgeschlossen //

$\Rightarrow$ Behauptung ① bewiesen.

Die Reziproke:

②. Behauptung: $ii) \Rightarrow i)$

(K beschränkt & abg. $\Rightarrow K$ kompakt)

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ $x_k \in K \subset \mathbb{R}^d$

$$x_k = (x_k^1, \dots, x_k^d) \quad \leftarrow d \text{ Folgen!}$$

$(x_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge von reellen Zahlen.

$$\max_{i=1 \dots d} |x_k^i| \leq \|x_k\| \leq R \quad R > 0$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^d (x_k^i)^2}$$

$\Rightarrow x_k^i$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$

Nach Satz von Bolzano-Weierstraß (Sk. 3.4.1):

$$\exists x_{\ell_1(k)}^1 \longrightarrow x_0^1$$

↑ Teilfolge

$x_{\ell_1(k)}^2$ ist beschränkt $\leftarrow$ Bolzano-Weierstrass anwenden

$$\stackrel{\text{BW}}{\Rightarrow} \exists \ell_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ monoton mit } x_{\ell_1 \circ \ell_2(k)}^2 \longrightarrow x_0^2$$

Bemerkung: $x_{\ell_1 \circ \ell_2(k)}^1 \longrightarrow x_0^1$

↑

Teilfolge von einer Folge, die konvergiert!

... d x BW anwenden

$$\rightarrow \forall i=1 \dots d \quad x_{\ell_1 \circ \ell_2 \circ \dots \circ \ell_d(k)}^i \longrightarrow x_0^i$$

Wir haben dann eine Teilfolge von x_k gefunden, für welche alle Koordinaten konvergieren:

$$x_0 = (x_0^1 \dots x_0^d)$$

$\rightarrow$ alle Elemente der Folge konvergieren $\Rightarrow$ die Folge konvergiert!

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\ell_1 \circ \ell_2 \circ \dots \circ \ell_d(k)} \longrightarrow x_0$$

2. Hyp. K ist abg. $\Rightarrow x_0 \in K$

$$\Rightarrow K \text{ ist kompakt} \quad \square$$

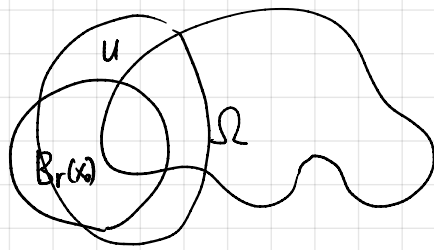
gilt alles auch für alle anderen Normen.

II.4 Topologisches Kriterium für Stetigkeit

II.4.1 Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

i) $x_0 \in \Omega$ $U \subset \Omega$ heißt relative Umgebung von x_0 in Ω falls

$$\exists r > 0 \text{ mit } B_r(x_0) \cap \Omega \subset U$$



ii) $U \subset \Omega$ ist **relativ offen** falls U Umgebung von alle ihren Punkten ist.

iii) $A \subset \Omega$ heisst **relativ abgeschlossen**, falls $\Omega \setminus A$ relativ offen ist.

relativ $\hat{=}$ immer bez. einer Auswahl von Ω

II.4.2 Beispiel: $\Omega = [0, 1)$ weder offen noch abgeschlossen.

$\forall 1 > r > 0$ $[0, r)$ relativ offen

$\rightarrow = \Omega \cap (-r, r)$ (offene Kugel)
(haben die negativen Zahlen vergessen)

II.4.3 Bemerkung: Charakterisierung vom Begriff "relativ offen"

U in Ω ist relativ offen genau dann wenn $\exists$ eine offene Menge von $\mathbb{R}^d$, G mit $U = \Omega \cap G$

Beweis der Charakterisierung:

Behauptung ①: Sei G offen (in $\mathbb{R}^d$). Dann ist $\Omega \cap G$ in Ω relativ offen.

Sei $x_0 \in U = \Omega \cap G$ (Beweisen, dass U eine relativ Umgebung von x_0 ist)

Da G offen ist (bzw. $\mathbb{R}^d$) und $x_0 \in G$:

$\exists r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset G$

$B_r(x_0) \cap \Omega \subset G \cap \Omega = U$

$\Rightarrow U$ ist eine relativ Umgebung von x_0
 $\quad \quad \quad \wedge$
 $\quad \quad \quad \text{zu } \Omega$

$\Rightarrow U = \Omega \cap G$ ist relativ offen.

Behauptung ②: Sei U eine relativ offene Menge in Ω . Dann $\exists G$ offen
(in $\mathbb{R}^d$) mit $U = G \cap \Omega$

Beweis: $\forall x \in U \exists r_x > 0$ mit $B_{r_x}(x) \cap \Omega \subset U$

$$\left. \begin{array}{l} \uparrow \text{Umgebung für } x \\ \downarrow \text{Vereinigung} \\ G = \bigcup_{x \in U} B_{r_x}(x) \supset U \\ B_{r_x}(x) \cap \Omega \subset U \end{array} \right\} \Rightarrow G \cap \Omega \subset U$$

$$U = G \cap \Omega$$

Satz II.3.3 $\Rightarrow G$ ist offen

$\Rightarrow$ Behauptung ② bewiesen.

2. Aussage: $A \subset \Omega$ ist relativ abgeschlossen genau dann wenn $\exists$ eine abgeschlossene Menge $F \subset \mathbb{R}^d$ s.d. $A = \Omega \cap F$

Beweis: A ist relativ abgeschlossen $\Leftrightarrow \Omega \setminus A$ ist relativ offen

$$\Leftrightarrow \exists G \text{ offen in } \mathbb{R}^d \text{ mit } \underbrace{\Omega \setminus A}_{\Omega \cap A^c} = \Omega \cap G$$

Komplement von einem Schnitt = Vereinigung vom Komplement

$$\begin{aligned} (\Omega \cap A^c)^c &= (\Omega \cap G)^c = \Omega^c \cup G^c \\ &= \Omega^c \cup (A^c)^c = \Omega^c \cup A \end{aligned} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(\Omega^c \cup A) \cap \Omega = (\Omega^c \cup G^c) \cap \Omega = \Omega \cap G^c$$

$$= A \cap \Omega$$

$$= A$$

$\uparrow$
nach Voraussetzung

$\uparrow$
Komplement von einer offenen Menge = abgeschlossene Menge

□

Satz II.4.4 (Sk. 4.5.1)

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$x_0 \in \Omega$ die folgenden Aussagen sind äquivalent

i) f ist an der Stelle x_0 stetig

ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d.

$$\forall x \in \Omega \quad \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

iii) $\forall V$ Umgebung von $f(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$

$U = f^{-1}(V)$ bildet eine relative Umgebung von x_0 in Ω .
 $\uparrow$
Urbild von V