

II.4.5 Beispiel $\Omega = \mathbb{R}$

i) (Gegenbeispiel)

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (*)$$

$$f(1) = 1 \quad \exists x_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$x_k \rightarrow 1 \quad f(x_k) = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 0 \neq f(1) \quad \text{↯ Widerspricht der Stetigkeit!}$$

ii) $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$|1 - f(x)| < \frac{1}{2}$$

$$(*) \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$$

$$\text{aus } \|x - x_0\| < \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\|x - 1\| < \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - 1, x_0 + 1)$$

→ Es existieren immer $x \in \mathbb{R}$ in diesem Intervall!

$$\exists \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$f(x_\delta) = 0 \Rightarrow |1 - f(x_\delta)| > \frac{1}{2} \quad \text{↯}$$

iii) $V := \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \ni f(x_0) = 1$

Umgebung

Betrachte Urbild von V

$f^{-1}(V) = \mathbb{Q}$ ist keine Umgebung von 1 Widerspruch! ✓ □
 ↑
 d.h. für alle Werte f^{-1} , die in V sind

Beweis:

1) i) $\Rightarrow$ ii)

Indirekter Beweis (d.h. Kontraposition der Aussage nehmen)

Kontraposition von ii): $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.d. $\forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in B_\delta(x_0)$ mit $\|f(x_\delta) - f(x_0)\| > \varepsilon_0$

↙ Zentrum
 $B_r(x)$
 ↑
 Radius

nehme $\delta = \frac{1}{k}$ $k \in \mathbb{N}^*$; x_k

$$\|f(x_k) - f(x_0)\| > \varepsilon_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x_k = x_0$$

aber $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_k) \neq f(x_0)$ Widerspruch! $\rightarrow$ d.h. es kann nicht sein, dass ii) nicht gilt unter der Voraussetzung, dass i) gilt.

Wir haben bewiesen, dass $i) \Rightarrow ii)$

2) Beweis $ii) \Rightarrow i)$

Sei $x_k \in \Omega$ mit $x_k \rightarrow x_0$

Frage: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$?

$\hookrightarrow$ was bedeutet das? $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq N \implies \|f(x_k) - f(x_0)\| < \varepsilon ?$$

Sei $\varepsilon > 0$ von nun an ε fix. Eine feste Zahl

$$ii) \Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

δ ist von nun an fix.

$$\text{Da } x_k \rightarrow x_0 : \exists N \text{ s.d. } k \geq N \implies \|x_k - x_0\| < \delta \implies \|f(x_k) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

Beweise machen: nicht mit der Hypothese anfangen, sondern mit der Frage.

3) $ii) \Rightarrow iii)$

Sei V eine Umgebung von $f(x_0)$

Wir nehmen $U = f^{-1}(V)$ (alle Punkte, dessen Werte in V ist)

$$x \in U = f^{-1}(V)$$

Wir suchen eine offene Kugel von der Form $B_r(x_0)$ mit $r > 0$ s.d.

$$\Omega \cap B_r(x_0) \subset U$$

Hypothese: $\exists \varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset V$ "Sicherheitszone" = offene Umgebung

$$f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \subset f^{-1}(V)$$

aus ii) $\Rightarrow \exists \delta > 0 \quad x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega \quad \text{d.h. } x - x_0 < \delta$

dann $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$

$$\Rightarrow B_\delta(x_0) \cap \Omega \subset U$$

$\rightarrow U$ ist eine relative Umgebung von x_0 .

4) iii) $\Rightarrow$ ii)

Sei $\varepsilon > 0$ und wir suchen $\delta > 0$ s.d. $\forall x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega$ gilt $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$

Sei $V = B_\varepsilon(f(x_0))$

iii) $\Rightarrow f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ bildet eine relative Umgebung von x_0 in Ω

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \cap \Omega \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$$

$\Rightarrow$ ii)

□

II. 4.6 Satz (Sk. 4.5.2)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $f: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\uparrow$
ein Gebiet

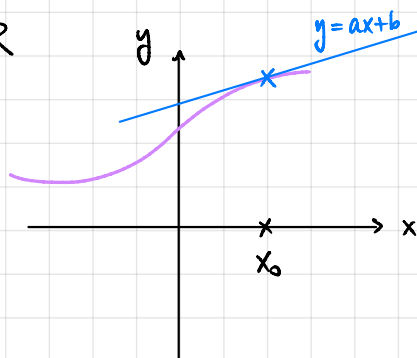
i) f ist an alle Pkte von Ω stetig

ii) Das Urbild $U = f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge V von $\mathbb{R}^n$ ist relativ offen in Ω .

iii) Das Urbild $A = f^{-1}(B)$ jeder abg. Menge B von $\mathbb{R}^n$ ist relativ abgeschlossen.

III Differenzialrechnung in $\mathbb{R}^n$ (Sk.-Kap. 7)

aus Ana1: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



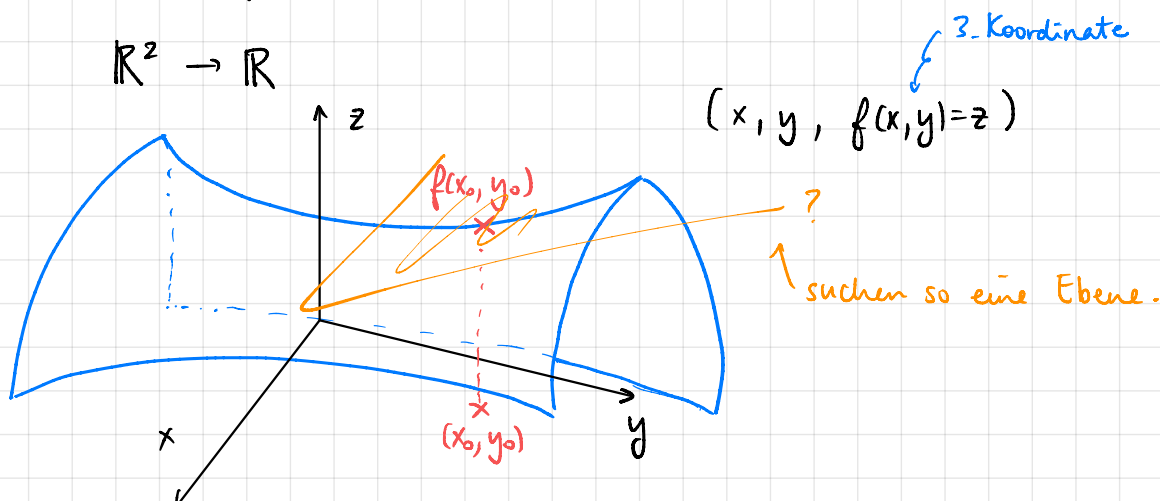
→ Wir suchen, ob die Umgebung von $f(x_0)$ durch eine Gerade approximierbar ist.

$$(x, y = f(x))$$

$$\exists? a > 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Nun in mehreren Dimensionen:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



→ Suchen eine Linearannäherung der Funktion an eine Stelle der Funktion.
↳ wenn ✓ → Funktion ist an dieser Stelle diffbar.

III.1 Partielle Ableitungen und Differenzial (Sk. 7.1)

III.1.1 Beispiel: $f(x, y) = xe^y$

diffbarkeit bestimmen: zurück in $\mathbb{R}$ gehen (Variablen fixieren & eines nach dem anderen für Diffbarkeit überprüfen)

1) Wir frieren $y = y_0$

$$x \mapsto f(x, y_0) = xe^{y_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = e^{y_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

2) Wir fixieren x

$$y \mapsto f(x_0, y) = x_0 e^y$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = x_0 e^{y_0} = \frac{df}{dy}(x_0, y_0)$$

III.1.2 Definition (Sk. 7.1.1)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Sei $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$. Die Funktion f heisst an der Stelle x_0 in der

$\uparrow$
Punkt von $\mathbb{R}^n$ Richtung $e_i = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (kanonische Richtungen)
 $\uparrow$ i -te Stelle

partiell diffbar falls $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$ existiert ($h \in \mathbb{R}$)

und dieser Limes wird folgendermassen notiert:

$$f'_{x_i}(x_0) = \frac{df}{dx^i}(x_0)$$

$$x_0 + he_i = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^i + h, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n)$$

$\hookrightarrow$ alle ausser x_0^i sind "eingefroren"

$\hookrightarrow$ Funktion der Variablen h

$\hookrightarrow$ Part. Ableitung an x_0^i

III.1.3 Definition (Sk. 7.1.2)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen

Die Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Gebiet $\dim > 1$ nach $\dim 1$)

heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, falls eine linearabbildung

$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|_2} = 0$$

$\hookrightarrow$ A linearabbildung $\Rightarrow$ A kann durch eine Matrix dargestellt werden

$\hookrightarrow$ in diesem Fall n Spalten & eine Zeile

$$A = (a_1 \dots a_n) \in M_{1 \times n}(\mathbb{R}) \quad (\text{Covektor})$$

A.. Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$

$$x - x_0 = \begin{bmatrix} x^1 - x_0^1 \\ x^2 - x_0^2 \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{bmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

$\parallel$
 $\mathbb{R}^n$

$$A \cdot (x - x_0) = (a_1 \dots a_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ x^2 - x_0^2 \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i (x^i - x_0^i) \in \mathbb{R}$$

A wird $df(x_0)$ notiert. A heißt das Differential von f an der Stelle x_0 .

III.1.4 Bemerkungen:

1) Wenn f an der Stelle x_0 diffbar ist, dann ist f an dieser Stelle stetig.

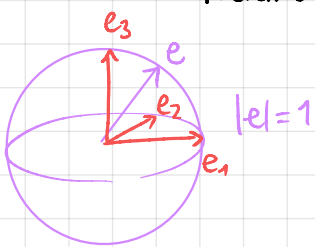
↳ Beweis: nehme Charakterisierung der Stetigkeit mit Folgen

$$|f(x_k) - f(x_0) - A(x_k - x_0)| \leq C \|x_k - x_0\| \quad \text{für } k \text{ gross genug}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

2) Falls f an der Stelle x_0 diffbar ist, dann ist f in allen Richtungen

$$e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \quad \text{partiell diffbar. und } a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$



$$\text{Nehme } x = x_0 + he_i \Leftrightarrow x - x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Stelle } i$$

$$\Rightarrow \|x - x_0\|_2 = |h|$$

$$\text{diffbarkeit} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0) - a_i h}{h} = 0$$

$df(x_0) \cdot e_i$

$$\|x + he - x_0\|_2 = |h|$$

⇒ dh. diese Funktion ist an der Stelle h diffbar

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} = a_i = df(x_0) e_i$$

↖ partielle Ableitung von f in die Richtung e_i .

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \rightarrow f \text{ ist part. diffbar in der Richtung } a_i \text{ und ist } a_i.$$