ldewindt@ethz.ch

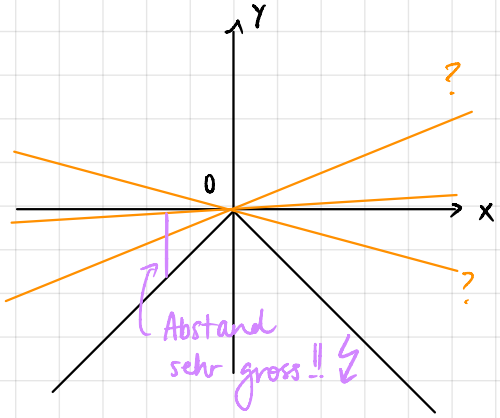
Bem. 3) Aber wofür das Ganze?
Warum ist Diffbarkeit interessant / nützlich für uns?

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

existiert nicht immer! z.B.

$f(x) = -|x|$



an der Stelle $x_0 = 0$:

$f'(x_0)$ existiert nicht.

Warum? → Wir versuchen, die Funktion mit Geraden anzunähern.

$$\tilde{f}(x) = a(x - x_0) + f(x_0) = ax$$

In $\mathbb{R}^n$ funktioniert das genau so.

Die Geometrische Interpretation des Differentials:

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$

nehmen an: f ist an der Stelle x_0 diffbar.

$\tilde{f}(x) = df_{x_0}(x - x_0) + f(x_0)$ ist affine lineare Funktion

$df(x_0)$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(x_0)(x^i - x_0^i) + f(x_0)$$

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \ll \|x - x_0\|$$

d.h. $$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - \tilde{f}(x)|}{\|x - x_0\|} = 0$$

⇒ Funktion mit einer einfachen Funktion ($\tilde{f}(x)$) annähern

↳ das ist unsere Motivation, warum wir differenzieren!

Was ist der Graph von der affinen linearen Funktion $\tilde{f}(x)$?

$\tilde{f}$ wird an jeder Stelle x_0 aufgebaut.

$$\text{Graph}(\tilde{f}) = \{(\underbrace{x^1, \dots x^n}_{x}, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } x^{n+1} = \tilde{f}(x)\}$$

$$= \{(x, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x - x_0)) + f(x_0)\}$$

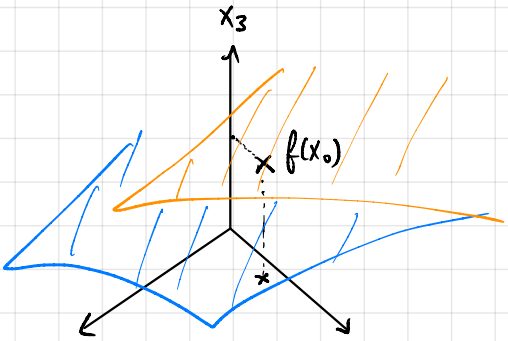
Sei $n=2$ (Dimension 2) allgemein: für dieses Kapitel alles mit Dim 2 interpretieren.

$$x^3 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(x^1 - x_0^1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)(x^2 - x_0^2) + f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\,x^2 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cdot x^1 = f(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}x_0^2 - \frac{\partial f}{\partial x_1}x_0^1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 = b \quad \leftarrow \text{eine 2D-Ebene in } \mathbb{R}^3 !$$

↳ Das ist die Gleichung der 2-dim Ebene, die $\perp$ zu dem Vektor $\begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$ ist und die durch $(x_0, f(x_0))$ geht.



→ wenn wir f mit $\tilde{f}$ ersetzen, ist der Fehler, der dabei entsteht, kleiner als $\|x - x_0\|$ an der Stelle x_0.

Im Allgemeinen (d.h. n beliebig): Der Graph von $\tilde{f}$ (= linear affine Annäherung von f) = die n dimensionale "Ebene", welche orthogonal ist zum Vektor $\begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ -\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$, die durch $(x_0, f(x_0))$ geht.

III.1.5 Beispiele und Gegenbeispiele für Differenzierbarkeit

1) affine lineare Funktionen: $f(x) = Ax + b$

$A = (a_1 \cdots a_n)$ vorgegebener Covektor

$Ax = (a_1 \cdots a_n) \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

f ist überall diffbar und $\frac{df}{dx_i}(x_0) = a_i$ ← unabhängig von x_0

$df_{(x)} h = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(x_i) h^i$ ↳ beliebig in $\mathbb{R}^n$

Koordinatenfunktionen: (= affine lineare Funktionen für

$i \in \{1 \dots n\}$ $A_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

$b = 0$

$f(x) = x^i$

$df_{(x_0)} = dx^i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

↳ Covektor. Bilden eine Basis von dem n-dimensionalen Raum von Co-Vektoren

↳ $= M_{1 \times n}(\mathbb{R})$ - Matrizen

Sei f eine beliebige diffbare Funktion auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Man kann $df_{(x_0)}$ mit der Hilfe von $(dx^i)_{i=1 \dots n}$ ausdrücken

$$df_{(x_0)} h = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(x_0) \cdot h^i$$

h^i: i-te Koordinate vom Vektor h.

$\forall i = 1 \dots n$: $dx^i h = h^i$

$$\Rightarrow df_{(x_0)} h = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(x_0)\, dx^i \cdot h$$

$\forall h$ Vektor in $\mathbb{R}^n$

kann man alles ohne h schreiben

$$\Rightarrow \boxed{df_{(x_0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(x_0)\, dx^i}$$

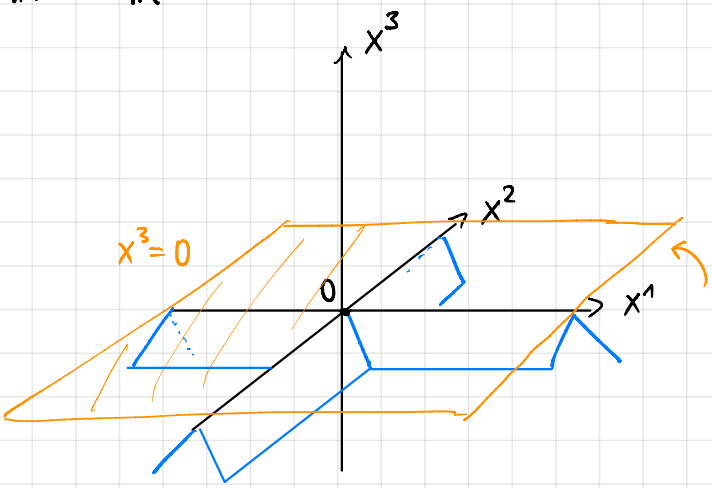
das ist eine Gleichung zwischen Co-Vektoren in $M_{1 \times n}(\mathbb{R})$

⊛ ⊛

Achtung! Es gibt Funktionen, bei denen ⊛ existiert, aber ⊛ nicht und umgekehrt.

2) Gegenbeispiel von Diffbarkeit: Die "Dachfunktion":

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$f(0, x^2) \equiv 0$

$f(x^1, 0) \equiv 0$

ist die einzige Wahl für $df(0)$

↳ wir haben ein Problem!

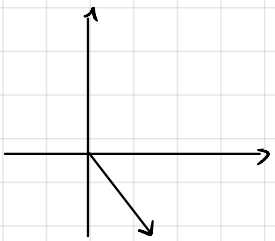
$$\lim_{x^2 \to 0} \frac{f(0,x^2) - f(0,0)}{x^2} = 0 = \frac{df}{dx^2}(0)$$

$$\frac{df}{dx^1}(0,0) = 0$$

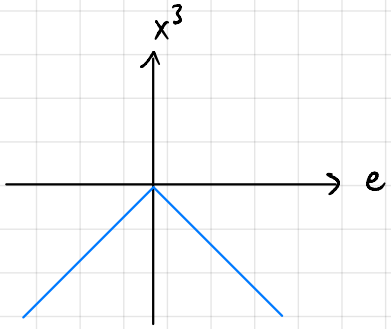
} 2 part. Ableitungen.

→ Falls $df(0)$ existiert, muss $df(0,0) = 0$ sein.

$e = \left(\cos\frac{\pi}{4}, -\sin\frac{\pi}{4}\right)$



Wir machen einen Schnitt: $f(0 + he) = -|h|$



$\lim \frac{f(he) - 0}{h}$ existiert nicht!

→ d.h.: die Funktion besitzt part. Ableitungen bez. kanonische Achsen, sie ist jedoch nicht diffbar! → etwas ist schief gelaufen...
→ Warnung: es reicht nicht, die part. Ableitungen auszurechnen um Diffbarkeit zu bestimmen!

3) Beispiel

$$f(x,y) = xe^y$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = e^{y_0} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = x_0 e^{y_0} \end{cases}$$

$$df_{(x_0,y_0)}(x-x_0,\ y-y_0) = \underbrace{e^{y_0}(x-x_0) + x_0 e^{y_0}(y-y_0)}$$

Wenn Differenzial existiert, dann muss es diese Form haben!

Überprüfen: (damit keine Probleme wie in 2))

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - df_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix}|}{\|(x-x_0,\ y-y_0)\|_2} \overset{?}{=} 0$$

falls ja: gute Approximierung von f

$$\Rightarrow \frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - df_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix}|}{\|(x-x_0,\ y-y_0)\|_2} = \frac{|x(e^y - e^{y_0}) - x_0 e^y (y-y_0)|}{\sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2}}$$

Taylor Entwicklung von e^y an der Stelle y_0 liefert die Existenz von $r_{y_0}(y)$

(Kowalski: Kor. 5.7.8
Strume: Satz 5.5.1)

$$e^y - e^{y_0} = e^{y_0}(y-y_0) + (y-y_0)\cdot r_{y_0}(y) \qquad \lim_{y\to y_0} r_{y_0}(y) = 0$$

e^{y_0}: $(e^y)'$ — $r_{y_0}(y)$: Rest

wir bekommen schlussendlich:

$$\ldots = \frac{|(x-x_0)(y-y_0)e^{y_0} + x(y-y_0)\cdot r(y-y_0)|}{\sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2}} = \circledast$$

$$\frac{(x-x_0)(y-y_0)e^{y_0}}{\sqrt{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2}} \longrightarrow 0 \qquad \text{weil } \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \geq \text{Max}(|x-x_0|, |y-y_0|)$$

$$\circledast = \frac{|x-x_0||y-y_0|e^{y_0}}{|x-x_0|} + \frac{|x||y-y_0|\,r_y(y)}{|y-y_0|} \longrightarrow 0 \quad (x \to x_0,\ y \to y_0)$$

Somit: $f(x,y) = xe^y$ ist überall diffbar.

Ergänzung zu den Koordinaten Funktionen

$x \in \mathbb{R}^n \longmapsto x_j \qquad (dx_j)_{j=1\dots n}$

$\|$

$(x_1, \dots, x_n)$

$$\boxed{\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}}$$ Kronecker-Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$