Bsp: $g(x,y) = xe^y$ → ist von der Klasse C^1 (d.h. besitzt überall stetige part. Abl.)

$f(t) = t^2 + t$ → werden feststellen, dass Verknüpfung dieser beiden Funktionen ableitbar ist.

$$f \circ g\,(x,y) = (xe^y)^2 + xe^y$$
$$= x^2 e^{2y} + xe^y$$

→ part. Abl. berechnen: $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(f\circ g)}{\partial x}(x_0,y_0) &= 2x_0 e^{2y_0} + e^{y_0} \\ \frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(x_0,y_0) &= 2x_0^2 e^{2y_0} + x_0 e^{y_0} \end{aligned}\right\} \text{sind überall stetig auf } \mathbb{R}^2$$

→ Die partiellen Ableitungen in den Standardrichtungen sind überall stetig auf $\mathbb{R}^2$

⇒ $f \circ g$ ist an der Stelle (x_0, y_0) diff.

Was ist aber nun das Differenzial?:

$$\to \; d(f\circ g)_{(x_0,y_0)} = \underbrace{(2x_0 e^{2y_0} + e^{y_0})}_{\text{das Differenzial von der 1. Koordinaten}}\,dx + (2x_0^2 e^{2y_0} + x_0 e^{y_0})\,dy$$

→ keine math. Notation, sondern Lösung!!

Matrix

$dx = (1, 0) \in M_{1\times2}(\mathbb{R})$

$L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (Linearabbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$)

$$dx \cdot \begin{pmatrix} h^x \\ h^y \end{pmatrix} = h^x \in M_{2\times1}(\mathbb{R})$$

Matrixmultiplikation

? Wann ', wann d ?

$$dg(x_0, y_0) = e^{y_0}\,dx + x_0 e^{y_0}\,dy$$
$$f'(t) = 2t + 1$$

→ Kettenregel: überprüfen:
$$d(f\circ g)(x_0) = f'(g(x_0,y_0)) \cdot dg(x_0,y_0)$$
$$= (2x_0 e^{y_0} + 1)\,[e^{y_0}\,dx + (x_0 e^{y_0})\,dy]$$

$$= (2x_0 e^{2y_0} + e^{y_0})\,dx + (2x_0^2 e^{2y_0} + x_0 e^{y_0})\,dy$$

Stimmt überein mit oben! ☺

Beweis von Kettenregel No 1 (II.2.2)

Behauptung: $$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \cap \\ \Omega \subset \mathbb{R}^n}} \frac{|f\circ g(x) - f\circ g(x_0) - f'(g(x_0))\, dg_{(x_0)}(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} = 0}$$

Beweis von der Behauptung:

Satz 5.5.1
Kowalski Kor. 5.7.8
Taylorentwicklung von f

$$f(y) - f(y_0) - f'(y_0)(y - y_0) = \underbrace{(y-y_0)\, r_{y_0}(y)}_{\text{Restfunktion}}$$

Eigenschaft: $\lim_{y \to y_0} r_{y_0}(y) = 0$

Seien $y = g(x)$
$y_0 = g(x_0)$

Wir wissen: da g an der Stelle x_0 diffbar $\Rightarrow$ $g(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig (*)

$$f\circ g(x) - f\circ g(x_0) - f'(g(x_0))\cdot(g(x) - g(x_0)) =$$
$$= g(x) - g(x_0)\, r_{g(x)}(g(x))$$

Bem: $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ (wegen (*))

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} r_{g(x_0)}(g(x)) = 0$$

$$\frac{|g(x) - g(x_0) - dg_{(x_0)}(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$$|f\circ g(x) - f\circ g(x_0) - f'(g(x_0))\, dg_{(x_0)}(x - x_0)| \,/\, \|x - x_0\|$$
$$= |f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0) - dg_{(x_0)}(x - x_0)) + g(x) - g(x_0)\, r_{g(x_0)}(g(x))| \,/\, \|x - x_0\|$$

Dreiecksungleichung:

$$\overset{\circledast}{\frac{|f\circ g(x) - f\circ g(x_0) - f'(g(x_0))\, dg_{(x_0)}(x-x_0)|}{\|x-x_0\|}} \leq$$

$$|f'(g(x_0))| \underbrace{\frac{|g(x)-g(x_0)-dg_{(x_0)}(x-x_0)|}{\|x-x_0\|}}_{\substack{\xrightarrow{x\to x_0} 0 \\ \text{da } g \text{ diff.}}} + \underbrace{\frac{|g(x)-g(x_0)|}{\|x-x_0\|}}_{\text{beschränkt da } \circledast} \underbrace{|r_{g(x_0)}(g(x))|}_{\to 0}$$

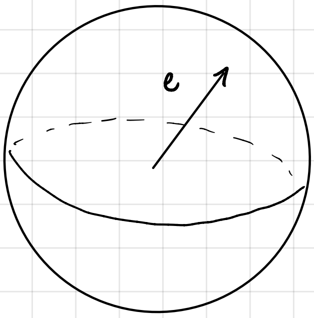
$$\circledast = \underbrace{\frac{|g(x)-g(x_0)-dg_{(x_0)}(x-x_0)}{\|x-x_0\|}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{dg_{(x_0)}(x-x_0)|}{\|x-x_0\|}}_{\text{"unter Kontrolle"}} \leq c$$

$\Rightarrow \lim \circledast = 0$ Behauptung bewiesen. □

Beispiel für Kettenregel No. 2 (II.2.3)

sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beliebig, diff. an der Stelle x_0

führen beliebige Richtung e ein:



$\|e\| = 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$g(t) = x_0 + te$

$$\underbrace{\frac{f\circ g(t) - f\circ g(0)}{t}}_{\substack{\downarrow\ \frac{dg}{dt}(0)=e \\ df_{(x_0)}\cdot e}} = \underbrace{\frac{f(x_0+te) - f(x_0)}{t}}_{\substack{\downarrow \\ df_{(x_0)}\cdot e}}$$

□

II.3 VEKTORFELDER & DIFFERENZIALFORMEN

II.3.1 Definition: Vektorfeld:

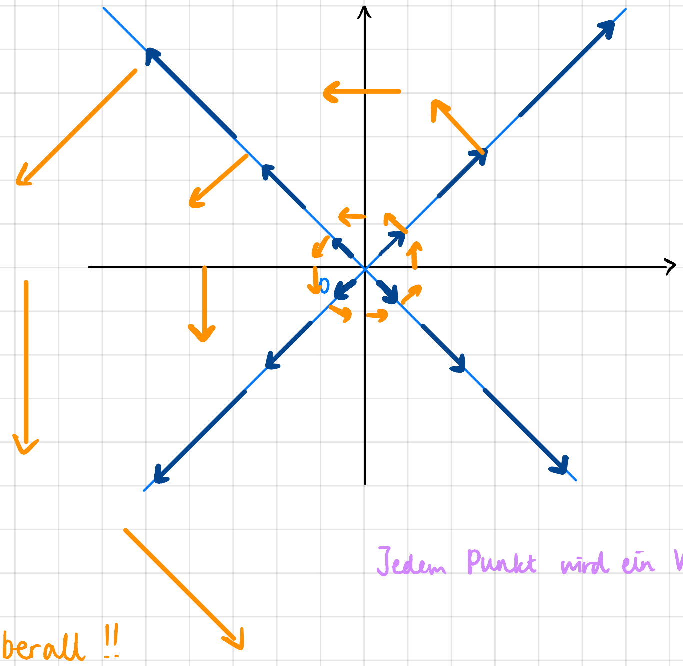
Eine Vektorfunktion $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst Vektorfeld.

II.3.2 Beispiel:

$V(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

$W(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$

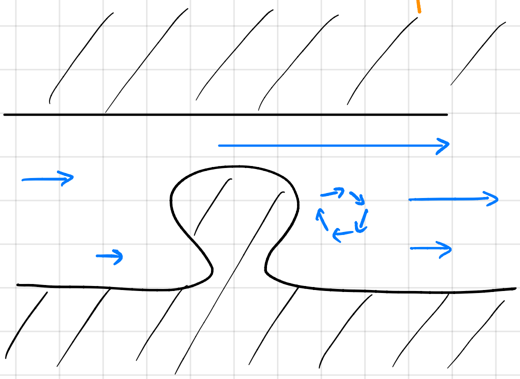
↳ Drehung, Cortex



Jedem Punkt wird ein Vektor gegeben.

Vektorfelder trifft man überall !!

z.B. in der Natur: Wasserfluss



das ist ein Vektorfeld!

nehmen an, dass Tiefe überall gleich ist.

II.3.3 Definition:

linear abb. von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$

Eine Abbildung $\lambda: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longmapsto L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heisst Differenzialform vom Grad 1 (kurz 1-Form)

So eine Abbildung lässt sich so schreiben:

$$\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\, dx_i$$

Differenzialen von den i-ten Koordinaten

$dx_i = (0, \dots, 1, 0 \cdots 0)$ Covektor (Abbildung)

i-te Stelle

$\lambda_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (ganz normale Funktionen)

$\lambda_i \in C^0(\Omega)$ d.h. λ_i ist überall stetig auf Ω

Notation: $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \lambda \in C^0(\Omega, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \\ \qquad\qquad\quad \| \\ \qquad\qquad M_{1,n}(\mathbb{R}) \text{ — Isomorphisch zu } \mathbb{R}^n \text{ selbst} \\ \text{"}C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)\text{" im Skript} \end{array}}$

II.3.4 Beispiele:

i) Seien: $\lambda(x,y,z) = 3\,dx + 2z\,dy + xy\,dz$

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anwendung von λ auf V ausrechnen:

$\lambda = (3, 2z, xy)$ Waagrechtvektor. wenden das auf V an...

$$\lambda \cdot V = (3, 2z, xy) \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 3x^2 + 2zy$$

ganz normale Matrixmultiplikation!

ii) $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ $\boxed{df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}$ ist ein Beispiel von Differenzialform.

$\lambda_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

Wenn eine 1-Form λ sich in der Form $\lambda = df$ für eine C^1 Funktion f auf Ω schreiben lässt, spricht man über f als Potenzial von λ.

II.3.5 Definition: (Sk. 7.3.2)

Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Das Gradientfeld von f ist das Vektorfeld der Form:

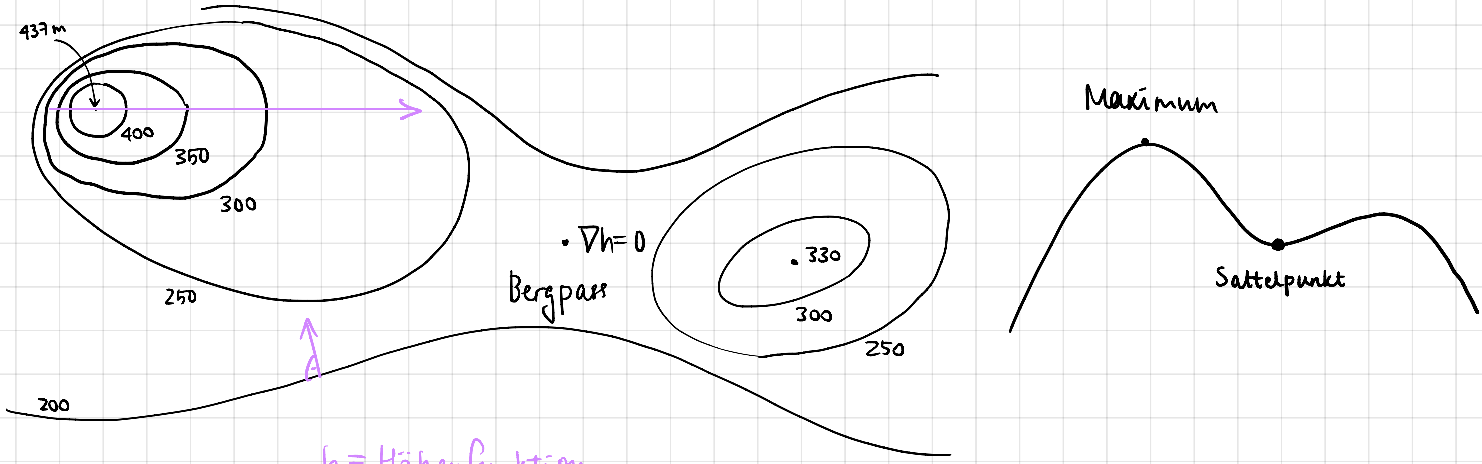
$$\boxed{\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, e_i} \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$\forall$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ gilt: $\underbrace{\langle \nabla f(x) \cdot V \rangle_{\mathbb{R}^n}}_{\text{Skalarprodukt in } \mathbb{R}^n} = df_{(x)} V$

III.3.6 Beispiele:

i) Illustration von den Begriff von Vektorfeldern:

Topographische Landkarte:



h = Höhenfunktion

Betrag des Gradients hat mit Steilheit zu tun!

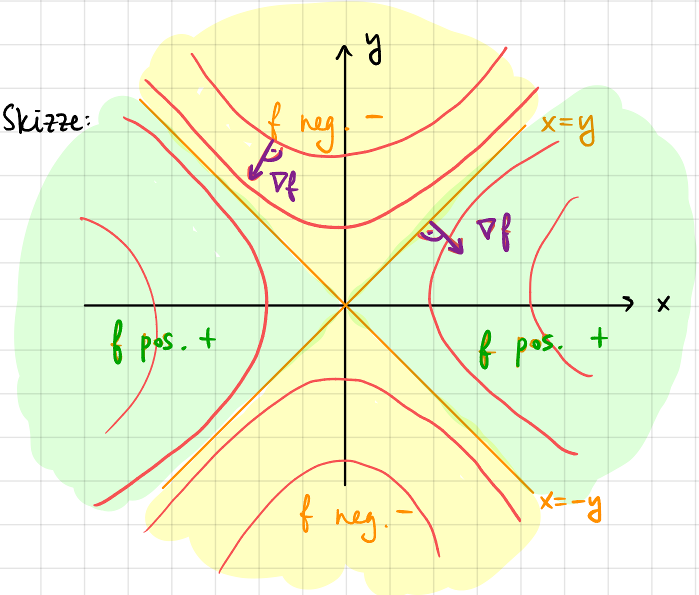
Gradient h ist: - immer $\perp$ zur Höhenlinie
- zeigt immer in Richtung der steilsten Steigung.

ii) $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2}$

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

$\| \nabla f \| (x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \| (x,y) \|$

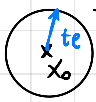
Skizze:



III.3.7 Bemerkungen:

1) $\nabla f(x_0)$ gibt die Richtung des steilsten Anstiegs an.

$f \in C^1(\Omega)$



Infinitesimaler Kreis

$x_0 + te$

$\llcorner$ beliebiger Einheitsvektor

Information ist sehr lokal!

$$\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t}$$

$\because$ für welchen Einheitsvektor e ist der Quotient maximal?

$$\| \quad df_{(x_0)} \cdot e = \langle \nabla f(x_0) ; e \rangle$$

Übereinschätzung vom SP: $$|\nabla f(x) e| \leq \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)^2\Big)^{\frac{1}{2}}}_{= \|\nabla f\|(x_0)} \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}}_{=1}$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\boxed{e = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}}$$ ist die Richtung mit dem steilsten Anstieg.

2) Der Gradient ist orthogonal zu den Level Mengen → Serie 8 Übung 5 :)