

→ F.S. III.4 Wegintegrale = $\int_{\gamma} f(z) dz$ → wichtig für: z.B. - part. Integration in $\mathbb{R}^n$
 - Strömungen berechnen

Wichtig: $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx_i \quad \lambda_i \in \mathcal{C}^0 \text{ (d.h. stetig)}$$

" $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

$$\int_{\gamma} \lambda = \sum_{i=1}^n \int_a^b \lambda_i(\gamma) \dot{\gamma}_i(t) dt$$

ist parametrisierungsunabhängig!

denn: Sei $t(s)$, $\frac{dt}{ds} > 0$ → sehr wichtige Voraussetzung! monoton steigend

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma \circ t(s) \quad [t^{-1}(a), t^{-1}(b)]$$

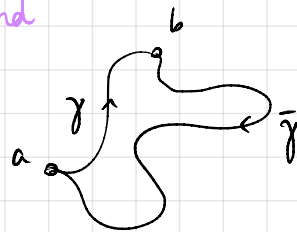
$$\Rightarrow \int_{\bar{\gamma}} \lambda = \int_{\gamma} \lambda$$


Frage: Was passiert, wenn wir die Orientierung umkehren?

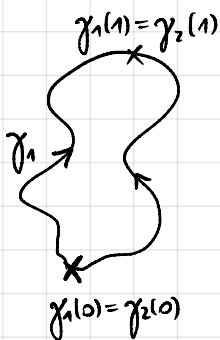
→ $t(s)$, $\frac{dt}{ds} < 0$ monoton sinkend

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma \circ t(s) \quad [t^{-1}(b), t^{-1}(a)]$$

$$\int_{\bar{\gamma}} \lambda = - \int_{\gamma} \lambda$$



⇒ Wir geben uns 2 Wege:



$$\gamma_1[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\gamma_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$$

$$\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$$

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) & t \in [1, 2] \end{cases}$$

$$\lambda = df$$

$$\frac{d}{dt} (2-t) = -1 < 0$$

$$\int_{\gamma} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda - \int_{\gamma_2} \lambda$$

III.4.5 Satz (7.4.2 Sk.)

Sei $\lambda \in C^0(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = M_{1 \times n}(\mathbb{R}))$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) $\exists f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda = df$ (f heisst Potential von λ)

ii) $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in C_{\text{stet}}^1([0,1]; \mathbb{R}^n)$

mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$

$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda$$

iii) $\forall \gamma \in C_{\text{stet}}^1([0,1], \mathbb{R}^n)$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt $\int_{\gamma} \lambda = 0$

Beweis vom Satz $\uparrow$

i) $\Rightarrow$ ii) $\checkmark$

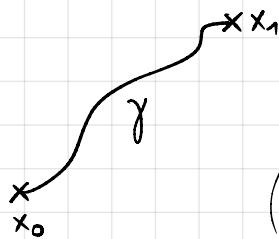
Beweis von ii) $\Rightarrow$ i)

1) nehmen an: Hyp. ii) gilt. $\rightarrow$ Wie kann man $f(x)$ aus λ erstellen?

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $f(x_0) = 0$

$\hookrightarrow \exists$ noch nicht!

(Erinnerung: $\int_{\gamma} df = f(\text{Ende}) - f(\text{Anfang})$)



$$\text{Sei } f(x_1) := \int_{\gamma} \lambda$$

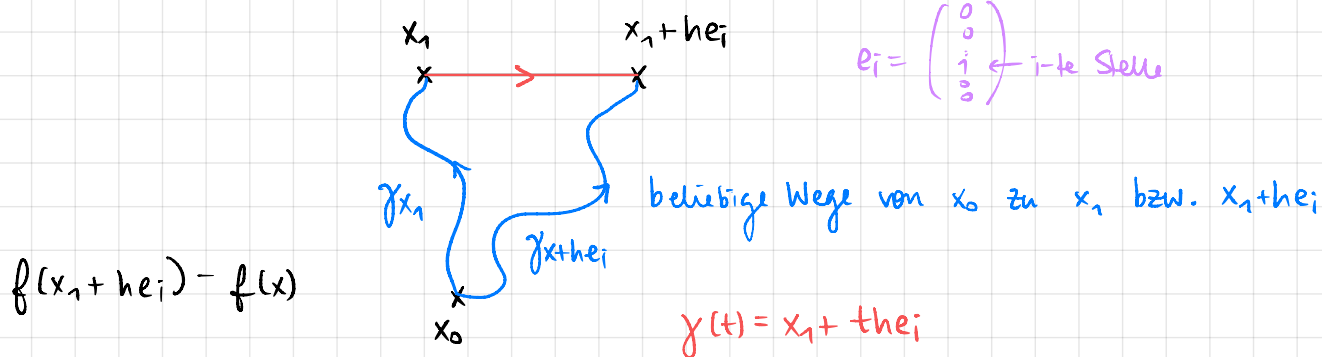
wegen ii) wegunabhängig!

Macht Sinn $\Rightarrow$ weil: $f(x_1)$ ist von γ unabhängig

$\rightarrow$ d.h. $\exists f$!

2 Fragen: - ist f von der Klasse C^1 (d.h. sind part. Abl. von f stetig?)

Behauptung: Die Funktion f besitzt überall auf $\mathbb{R}^n$ stetige partielle Ableitungen



Hypothese: Integral ist unabhängig vom Weg

$$\text{d.h. } f(x_1 + h e_i) - f(x_1) = \int_{\gamma_{x_1 + h e_i}} \lambda - \int_{\gamma_{x_1}} \lambda \stackrel{\text{Ziel}}{=} \int_{\gamma_{x_1}} \lambda + \int_{\gamma} \lambda - \int_{\gamma_{x_1}} \lambda$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \lambda_j(x_1 + t h e_i) \cdot \frac{d\gamma_j}{dt} dt = \int_0^1 \lambda_i(x_1 + t h e_i) h dt$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_1^i + t h \\ \vdots \\ x_1^n \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = h e_i$$

$$\frac{f(x_1 + h e_i) - f(x_1) - h \lambda_i(x_1)}{h} = \int_0^1 \lambda_i(x_1 + t h e_i) - \underbrace{\lambda_i(x_1)}_{\text{Konstante}} dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

λ_i ist stetig

$\hookrightarrow$ d.h. γ wird immer kleiner und kleiner

weil: $\lambda_i(x_1 + t h e_i)$ und $\lambda_i(x_1)$ konvergieren zueinander

Wir haben bewiesen, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h e_i) - f(x_1) - h \lambda_i(x_1)}{h} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_1) = \lambda_i(x_1) \text{ existiert \& ist stetig!}$$

Def. part. Ableitung

$\Rightarrow f$ besitzt stetige partielle Ableitungen in alle Standardrichtungen (weil i beliebig)

$\Leftrightarrow f$ ist C^1

$$\rightarrow df_{(x_1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_1) dx_0^i = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_1) dx^i = \lambda$$

$\square \text{ ii)} \Rightarrow \text{i)}$

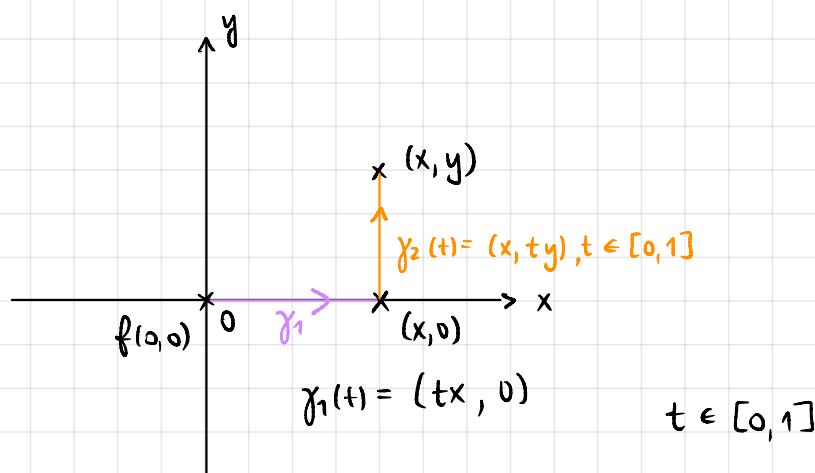
III. 4. 6 Beispiele (Sk. 7. 4. 2)

i) $\lambda(x, y) = 2xy^2 dx + 2x^2y dy$

Besitzt diese 1-Form ein Potential? d.h. $\exists f(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mit $df = \lambda$?

$f(0, 0) \rightarrow$ wir nehmen an, dass ein solches f existiert.

$\rightarrow$ Wir arbeiten unter der Voraussetzung, dass so ein f existiert.



falls λ besitzt Potential: $\gamma_1: f(x, 0) - f(0, 0) = \int_{\gamma_1} \lambda$

$$= \int_0^1 2\gamma_1^x(t) \underbrace{(\gamma_1^y(t))^2}_{=0} dx \frac{dx}{dt} + 2(\gamma_1^x(t))^2 \underbrace{(\gamma_1^y(t))}_{=0} dy \cdot \frac{dy}{dt} dt$$

$\text{da } y \text{ geht der } x\text{-Achse entlang}$

$\gamma_1^x, \gamma_1^y = x$ & y -Koordinaten von unserem Weg γ_1

$\Rightarrow$ falls $\exists f(x, 0) \Rightarrow f(x, 0) \equiv 0$

$\gamma_2: f(x, y) - f(x, 0) = \int_{\gamma_2} \lambda$

$$= \int_0^1 2(\gamma_2^x(t)) \underbrace{(\gamma_2^y(t))^2}_{=x^2 \forall t} dx \cdot \frac{d\gamma_2^x}{dt} + 2(\gamma_2^x(t))^2 \underbrace{(\gamma_2^y(t))}_{=x^2 \forall t} dy \cdot \frac{d\gamma_2^y}{dt} dt$$

Covektor: nimmt ein Vektor & liefert eine reelle Zahl.

$$dy \frac{d\gamma_2^y}{dt} = dy \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^1 2xt^2y^2 \cdot 0 + 2x^2ty^2$$

$$= \int_0^1 2t dt x^2y^2 = x^2y^2 \stackrel{?}{=} f(x, y)$$

$\rightarrow$ nun zurück zur Frage: besitzt λ ein Potenzial?

$$\Rightarrow d(x^2 y^2) = 2xy^2 dx + 2yx^2 dy = \lambda$$

Somit: $\lambda(x, y) = 2xy^2 dx + 2x^2 y dy$ besitzt ein Potential. :)

ii) $\lambda(x, y) = 2xy^2 dx + 2y dy$

Wir stellen uns dieselbe Frage: besitzt diese 1-Form ein Potential?

Gleiche Vorgehensweise wie oben:

Wir arbeiten
immer mit der
Hyp., dass das
gült & berechnen
f → am Schluss
eindeutig!

- 1.
2. $f(x, 0) = \dots = 0$
3. $f(x, y) = y^2$
4. $dy^2 = 2y dy \neq \lambda$

——— der x-Achse entlang

→ Nein.

Können wir überprüfen, ob es übereinstimmt.

Fälle =

- ja: λ besitzt Potential
- Nein: Widerspruch! λ besitzt kein Potential.

III.4.7 Definition (7.4.2 Sk.)

Sei $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) dx_i \in C^0(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$.

Das zugehörige Vektorfeld lautet:

$$V_\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) e_i$$

$\forall W$ Vektorfeld gilt: $\lambda \cdot W = \langle V_\lambda, W \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) W_i$

↑ Skalarprodukt

$\Rightarrow \int_\gamma V_\lambda := \int_\gamma \lambda$ Integral von einem Vektorfeld

III.5 Höhere Ableitungen

III.5.1 Definition: (7.5.1 Sk)

Eine Funktion f heisst von der Klasse C^2 falls $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und

III.5.2 Beispiel:

$$f(x, y) = x e^y$$

$$(x, y) \mapsto e^y = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ ist } C^1$$

$$(x, y) \mapsto x e^y \text{ ist auch } C^1$$

Wir wissen bereits:

$$\begin{cases} f \text{ ist } C^1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x e^y \end{cases}$$

dann ist f von der Klasse C^2

III.5.3 Satz: (7.5.1 Sk)

Sei $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

d.h. $\rightarrow$ die Ordnung der Ableitungen hat keine Wirkung!

III.5.4 Bemerkung:

! Die Voraussetzung $f \in C^2$ ist notwendig.

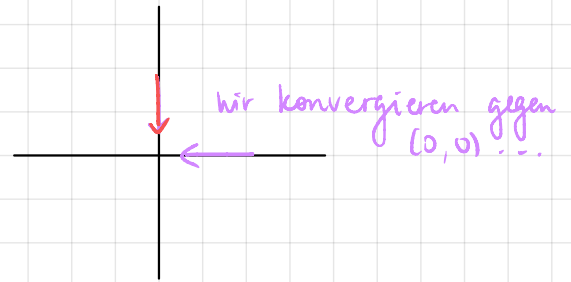
Denn: z.B. Sei $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{an der Stelle } (0, 0) \end{cases}$

$\hookrightarrow f$ ist superglatt ausser an der Stelle $(0, 0)$

$\uparrow$
 f ist stetig ergänzbar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} - 2yx^2 \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + 4 \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \stackrel{\text{analog wie } \frac{\partial f}{\partial x} \dots}{=} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 4 \frac{y^2 x^3}{(x^2 + y^2)^2}$$



$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -\frac{y^3}{y^2} = -y$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \frac{x^3}{x^2} = x$$

→ Nun: Ableitungen davon nehmen...

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, y) = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, 0) = +1$$

≠

diese 2 Ableitungen sind unterschiedlich!!

→ f ist nicht C^2 -ergänzbar an der Stelle $(0, 0)$.

III.5.5 Korollar (Sk. 7.5.1)

Sei V ein konservativer C^0 Vektorfeld ($V = \nabla f \Leftrightarrow \lambda_V = df$).

d.h. ein Vektorfeld, das sich als Gradient schreiben lässt

Dann gilt $\forall i, j: \frac{\partial}{\partial x_j} V_i - \frac{\partial}{\partial x_i} V_j = 0$

Grund: $V_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad V_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \xrightarrow{\text{Satz III.5.3}}$

→ Bsp: (aus der Physik) in $\mathbb{R}^3$: $\text{Curl } B =$

↑
Vektorfeld
(hier B-Feld)
kein Potential (?)

$\text{Curl } E = 0$ weil $E = \nabla f$
↑
El. Feld ↑
hat ein Potential