ldewindt@ethz.ch

Sei V ein $C^1(\Omega)$ <u>konservativer</u> Vektorfeld

(d.h. $\exists f \in C^2$ mit $V = \nabla f$) dann gilt:

$\forall i,j = 1 \dots n$ $\quad \boxed{\frac{\partial v^j}{\partial x^i} - \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(x_0) = 0} \quad \forall x_0 \in \Omega \qquad (*)$

Bemerkung: diese Bedingung ist nicht nur eine notwendige Bedingung für die Existenz von einem Potential, es ist auch eine hinreichende Bedingung. (Satz von Poincaré Satz 8.7.2 Sk)

III.5.6 Bemerkung

Beispiel für Benutzung des Kor.

$$\mathbb{R}^2 \qquad V(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 2x_1x_2^2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Frage: Ist dieses Vektorfeld konservativ?

$$\lambda_V(x_1, x_2) = 2x_1x_2^2\, dx_1 + 2x_2\, dx_2 \quad \leftarrow \text{1-Form}$$

Frage: Kann man λ_V als df schreiben?

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(2x_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1x_2^2) = 0 - 4x_1x_2 \neq 0$$

$(*) \Rightarrow$ Somit: $V(x_1, x_2)$ ist nicht konservativ.

Beweis von dem Satz III.5.3

Sei $f \in C^2(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$

$f(x_1, x_2)$ $\qquad$ $\underset{\Omega}{\underset{\cap}{0}} = (0,0)$

Frage: haben wir $\boxed{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(0,0) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(0,0)}$?

↳ um diese Frage zu beantworten, werden wir eine gewisse Formel 4 mal benutzen, und zwar... // Pause in dem Beweis //

↳ wir beweisen zuerst diese Formel:

Beweis von "Formel"

→ $g(x+he_i) - g(x) =$ $\qquad$ $x \quad x+he_i \longrightarrow e_i$ $\qquad$ $h \ll 1$

$\gamma(t) = x + the_i$ mit $t \in [0,1]$

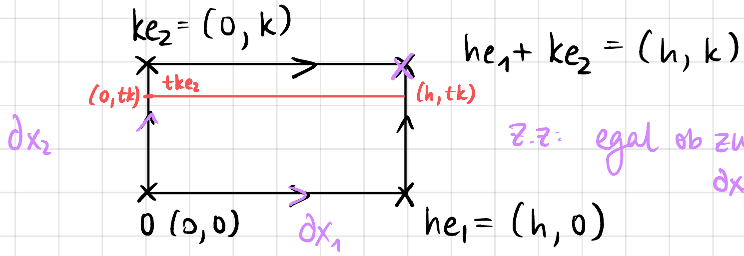
$$g(x+he_i) - g(x) = \int_\gamma dg = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x+the_i)\,\frac{d\gamma_j}{dt}\,dt =$$

$$= h\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x+the_i)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g(x+he_i) - g(x) = h\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x+the_i)\,dt} \quad (*)$$

Nun fahren wir weiter fort mit dem Beweis ...

→ wir erstellen ein infinitesimales Rechteck:



z.z.: egal ob zuerst ∂x_1 dann ∂x_2 oder ∂x_2 und ∂x_1, wir landen auf (h,k)

$$I_{hk} = \underbrace{f(h,k) - f(h,0)}_{= k\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(h,tk)\,dt} - \underbrace{\big(f(0,k) - f(0,0)\big)}_{= k\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,tk)\,dt}$$

$g = f$, $x = (h,0)$ $\qquad$ $g = f$, $x = (0,0)$

$$\Rightarrow I_{hk} = f(h,k) - f(h,0) - \big(f(0,k) - f(0,0)\big) = k\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(h,tk) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,tk)\; dt$$

$g = \frac{\partial f}{\partial x_2}$

$x = (0, tk)$

$$\| \qquad kh\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(sh, tk)\; ds\, dt$$

$\boxed{g(x+he_i) - g(x) = h\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x+the_i)\, dt}$

$$\Rightarrow \frac{I_{hk}}{hk} = \frac{f(h,k) - f(h,0) - (f(0,k) - f(0,0))}{hk} = \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(sh,tk)\, ds\right) dt \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} f\right)(0,0)$$

$$\|$$

$$= \frac{f(h,k) - f(0,k) - (f(h,0) - f(0,0))}{hk} = \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)(sh,tk)\, dt\right) ds \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f\right)(0,0)$$

konv. gegen

$\square$

III.5.7 Definition (7.5.2 Sk.)

f heisst von der Klasse $C^m(\Omega)$ Ω offen in $\mathbb{R}^m$ falls alle part. Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ von der Klasse C^{m-1} sind.

Sei $f \in C^4(\mathbb{R}^2)$ heisst: wir können 4 Ableitungen von f nehmen & sie sind stetig.

$$\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)\right)\right)\right)}_{} \text{ ist stetig.}$$

doch: das ist ein mess!

$\Rightarrow$ Satz von Schwarz:

$$= \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2\, \partial x_2^2}$$

d.h. i.A.: $m \in \mathbb{N}^*$ $\quad f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ $\qquad \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$i_1, i_2, \dots i_m \in \{1, \dots, n\}$

$i\ \{1 \dots m\} \mapsto \{1 \dots n\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_m}}\right)\right) = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial^\alpha f$$

$\alpha_k =$ Anzahl von $i_j = k$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, \dots, m\}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m$$

→ Doch warum machen wir so viele Ableitungen? → Taylor-Polynome

Wiederholung: Analysis 1: Theorem 5.7.4 Kowalski, Satz 5.5.1 Sk.

$f \in C^m(\mathbb{R})$

$$\boxed{f(y) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d^k f}{dx^k}(x) \frac{(y-x)^k}{k!} + \frac{d^m f}{dx^m}(z) \cdot \frac{(y-x)^m}{m!}} \quad \text{Taylorentwicklung}$$

$z \in [x, y]$

Aber warum ist die Taylorentwicklung so wichtig?

→ Funktionen mit Polynomen approximieren...

$$T_m f_x(y) = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (y-x)^k}_{\text{Polynom der Variablen } y} \qquad \lim_{y \to x} \frac{|f(y) - T_m f_x(y)|}{|x-y|^m} = 0$$

→ Moral der Geschichte: wir haben es geschafft, unsere Funktion durch ein Polynom zu approximieren

Polynome sind einfache Funktionen! :)

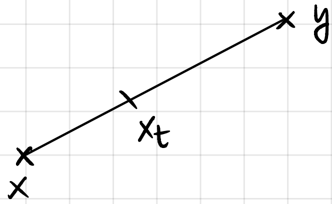
→ Je grösser m, desto präziser ist die Approximation! :)

weil: $|x-y|^m \ll |x-y|^{m-1}$

→ Taylorapproximation in $\mathbb{R}^n$: Philosophie ist genau gleich wie in $\mathbb{R}$ (Ana1). Doch!: Achtung Notation.

→ Wir machen nun dasselbe für $\mathbb{R}^n$! :)

Sei $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$



$y, x \in \mathbb{R}^n$

$x_t := (1-t)x + ty \qquad t \in [0,1]$

$\phi(t) := f(x_t)$

$\phi(0) = f(x)$

$\phi(1) = f(y)$

$\phi : t \longmapsto f(x_t)$ ist C^m

$$\underset{t=1}{\phi(1)} = \phi(0) + \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} \frac{d^k\phi}{dt^k}(0)\frac{\cancelto{1}{t^k}}{k!} + \frac{\cancelto{1}{t^m}}{m!}\frac{d^m\phi}{dt^m}(\xi)}_{\text{Fehlerterm}} \quad \text{mit } \xi \in [0,1]$$

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = \frac{d}{dt} f((1-t)x + ty)$$

$$\underset{\text{Kettenregel V2}}{=} df(x_t) \cdot \frac{d}{dt} x_t = df_{(x_t)}(y-x)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_t) \cdot (y_i - x_i)$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}(t) = \sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}(x_t)(y_{i_2} - x_{i_2})(y_{i_1} - x_{i_1})$$

$$\frac{d^k\phi}{dt^k}(x_t) = \underbrace{\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}(x) \prod_{j=1}^{k}(y_{i_j} - x_{i_j})}_{\text{Polynom auf } \mathbb{R}^n \text{ mit Grad } k}$$

III.5.8 Satz (7.5.2) Taylor Entwicklung

$f \in C^m(\mathbb{R}^n) \quad y, x$

$$f(y) = f(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) \prod_{j=1}^{k} (y_{i_j} - x_{i_j}) + \frac{1}{m!} \sum_{i_1 \dots i_m = 1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}(x_\xi) \prod_{j=1}^{m} (y_{i_j} - x_{i_j})$$

$\exists\, \xi \in [0,1] \qquad x_\xi = (1-\xi)x + \xi y$

Bsp: $\mathbb{R}^2$ $\quad n=2, \quad m=2$

$$f(y) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(y_1 - x_1) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)(y_2 - x_2)}^{i_1=2 \quad i_2=1} + \overbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_\xi)(y_1 - x_1)^2}^{i_1=1 \quad i_2=1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_\xi)(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}_{i_1=1 \quad i_2=2} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_\xi)(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)} + \overbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x_\xi)(y_2 - x_2)^2}^{i_1=2 \quad i_2=2}$$

diese 2 Terme sind identisch!