ldewindt@ethz.ch

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) = \partial^\alpha f$$

$$\alpha_j = \{\# \text{ von } i_l \text{ mit } i_l = j\} \qquad |\alpha| = \sum \alpha_i = k$$

$$\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$$

α_i .. wie viel mal die Ableitung x_i ?.

zurück zu $\mathbb{R}^2$:

$$f(y) = f(x) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i) + \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\\ |\alpha|=2}} \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}(x)(y_1-x_1)^{\alpha_1}(y_2-x_2)^{\alpha_2}$$

d.h. i.A.:

$$\boxed{\sum_{i_1 \cdots i_m = 1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}}(z) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(z)}$$

n Tupel

→ wichtige Identität ! → Beweis: Serie 9

im Skript: das fehlt (Typo)

$$\boxed{\alpha! = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j!}$$

III.5.10 neue Formulierung von der Taylor-Entwicklung:

$f \in C^m(\mathbb{R}^n)$, $y, x \in \mathbb{R}^n$. Dann $\exists\ z \in [x,y]$ mit

$$\boxed{f(y) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \le m-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) (y-x)^\alpha}_{= T_{m-1} f_x(y) \text{ Polynom des Grads } m-1} + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(z)(y-x)^\alpha}$$

m Tupel

$(y-x)^\alpha = \prod (y_i - x_i)^{\alpha_i}$

→ gut verstehen !! (bis $\mathbb{R}^2$)

$T_{m-1} f_x(y)$ Polynom des Grads $m-1$

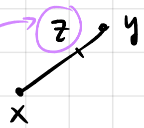
III.5.11 Korollar (Sk: Bem. 7.5.4)

$$\lim_{y\to x} \frac{|f(y) - T_m f_x(y)|}{\|x-y\|^m} = 0 \qquad f \in C^m(\mathbb{R}^n)$$

↳ d.h. $T_m f_x(y)$ nähert $f(y)$ sehr gut an

↳ doch: <u>Fehler der Ordnung m</u>

Grund: $$f(y) - T_m f_x(y) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{\left[\partial^\alpha f(z) - \partial^\alpha f(x)\right]}_{\to 0} (y-x)^\alpha \qquad / \div \|x-y\|^m$$



irgendwo zwischen x & y

$$y \to x \Rightarrow z \to x$$

$$\frac{f(y) - T_m f_x(y)}{\|x-y\|^m} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{\left[\partial^\alpha f(z) - \partial^\alpha f(x)\right]}_{\to 0} \frac{(y-x)^\alpha}{\|x-y\|^m}$$

→ je höher m, desto kleiner der Fehler.

n Tupel

$$(y-x)^\alpha = (y_1 - x_1)^{\alpha_1} (y_2 - x_2)^{\alpha_2} \quad \cdots \quad (y_n - x_n)^{\alpha_n}$$

$$\|y-x\|^m = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{\frac{m}{2}} \geq \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^m$$

→ Nun: wir möchten diese Taylorapproximation anwenden, um eine Funktion in der Nähe eines geg. Pktes besser zu verstehen...

III.6 Die Hesse-Matrix von einer C^2 Funktion

$$T_2 f_x(y) = f(x) + df_{(x)}(y-x) + \underbrace{\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)(y_i - x_i)\cdot(y_j - x_j)}$$

Das können wir in Form einer Matrixmultiplikation umschreiben! ..

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)(y_i - x_i)\cdot(y_j - x_j) = \frac{1}{2}(y-x)^T \operatorname{Hess} f(x)\,(y-x)$$

$$\text{mit} \quad \underset{\in \mathbb{R}^{n\times n}}{\operatorname{Hess} f(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}}_{\text{diese Matrix ist symmetrisch !!}} = \operatorname{Hess}^T f(x)$$

$$\boxed{T_2 f(x)(y) = \underbrace{f(x)}_{\text{konstant}} + \underbrace{df_{(x)}(y-x)}_{\text{linear }(y-x)} + \underbrace{\frac{1}{2}(y-x)^T \operatorname{Hess} f(x)\,(y-x)}_{\text{quadratische Form}}}$$

↳ Die quadratische Näherung von f

↳ weil: $f(y) = T_2 f_x(y) + \underbrace{r_{2,x}(y)}_{\text{Fehler}}$

$$\frac{r_{2,x}(y)}{\|x-y\|^2} \xrightarrow[y\to x]{} 0$$

Sehr wichtige Punkte einer Funktion:
Pkte, wo der lineare Teil $df_{(x)}(y-x)$ verschwindet

? quadratische Form ?

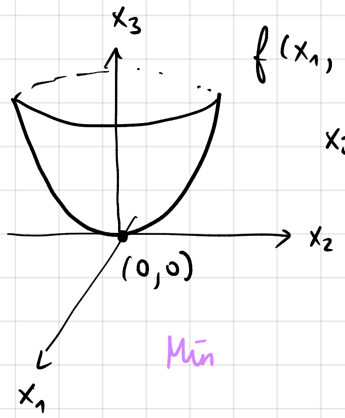
Geg: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist eine lokale Minimalstelle bzw. Maximalstelle falls

f Funktion auf $\mathbb{R}^n$ $\quad \exists r > 0$ mit

$$\forall x \in B_r(x_0)\ f(x) \geq f(x_0)$$

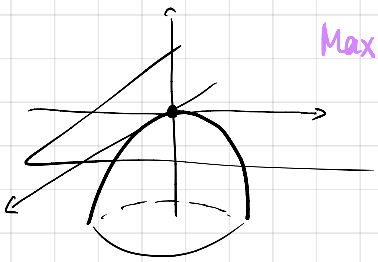
bzw. $(\ldots \leq \ldots)$

Beispiel:



$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$x_3 = f(x_1, x_2)$



$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$

III.6.1 Erinnerung an lineare Algebra

$A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n$

$a_{ij} = a_{ji}$

Eine symmetrische Matrix heisst positiv (bzw. negativ) wenn:

$\forall x \neq 0$ gilt ${}^t X A X > 0$ (bzw. bzw. < 0)

$\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind > 0 (bzw. < 0)

$${}^t X A X \geq \min_{\lambda \in EW} \lambda \, |X|^2$$

Matrixtransponierte

„$A > 0$"

$\uparrow$

Matrix!

III.6.2 Satz (7.5.3 Sk.)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$

1) x_0 ist eine lokale Minimal- bzw. Maximalstelle. Dann . . :

$\boxed{df(x_0) = 0}$ (x_0 heisst dann kritischer Punkt von f).

die wichtigen Pkte in der Natur, Technik usw.

ii) Sei x_0 ein kritischer Punkt von f

alle Haupt-minoren

Falls $\text{Hess}f(x_0) > 0$ ($x^T H x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ → positiv definit) dann ist x_0 eine lokale Minimalstelle

Falls $\text{Hess}f(x_0) < 0$ ($x^T H x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ → negativ definit) " Maximalstelle

Vorzeichen der Hauptminoren: $<, >, <, >, <, \dots$

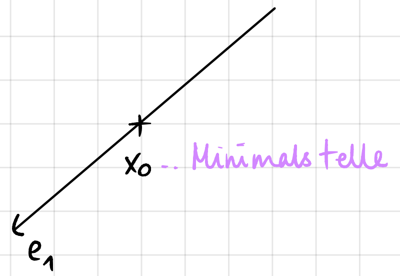
Beweis vom Satz III.6.2

1). Beweis von i) Sei x_0 ein lokales Min.

Wir nehmen an, dass die Aussage nicht gilt. d.h. $df(x_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \neq 0 \quad , \text{ d.h. } \|\nabla f(x_0)\| \neq 0$$

$$\text{Sei} \quad e = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} \qquad \|e\| = 1$$

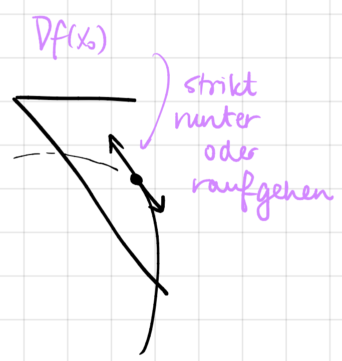


$$f(x_0 + te) \overset{!}{=} \underbrace{f(x_0) + df(x_0)\, te}_{\text{Taylorentwicklung 1. Ordnung}} + r_{x_0}(x_0 + te)$$

wir wissen: $\dfrac{r_{x_0}(x_0+te)}{\|x_0 + te - x_0\|} \longrightarrow 0$

$$\text{d.h.} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{r(x_0+t)}{t}}_{\text{Fehlerterm}} = 0$$

$$f(x_0+te) = f(x_0) + t \underbrace{df(x_0) \cdot \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}}_{\|\nabla f(x_0)\| > 0} + r_{x_0}(x_0 + te)$$



$\Rightarrow$ $t > 0$ klein genug alles durch t dividieren..

$$\frac{f(x_0+te)}{t} = \frac{f(x_0) + t}{t}\, df(x_0) \cdot \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} + \frac{r_{x_0}(x_0+te)}{t}$$

$\Rightarrow f(x_0 + te) > f(x_0)$

$t < 0 \quad \Rightarrow f(x_0 + te) < f(x_0)$

Widerspruch! $\lightning$ $\Rightarrow df(x_0) \overset{!}{=} 0$

2) Beweis von ii) Sei $df_{(x_0)} = 0$, $\text{Hess} f(x_0) > 0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\|x-x_0\|^2} = \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{{}^t(x-x_0)}{\|x-x_0\|}\,\text{Hess} f(x_0)\,\frac{(x-x_0)}{\|x-x_0\|}}_{\geq \frac{1}{2} \min_{EW} \lambda > 0} + \underbrace{\frac{r_{2,x_0}(x-x_0)}{\|x-x_0\|^2}}_{\to 0} > 0 \qquad \|x-x_0\| < r$$

$x \neq x_0$

Einheitsvektoren ! :)

weil $\text{Hess} f(x_0) > 0$

$\Rightarrow f(x) > f(x_0)$

$\to$ x_0 ist lokales Minimum. □

III. 6.3 Beispiel (Sk. 7.5.2)

$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + \alpha y^2) + \beta xy$ α, β unbekannte Parameter

1) Differenzial von f berechnen:

$df(x,y) = (x + \beta y)\,dx + (\alpha y + \beta x)\,dy$

kritischer Punkt $\to$ $(x,y) = (0,0)$ $df(0,0) = 0$

Nun: studieren, ob $f(x,y)$ an der Stelle $(0,0)$ (abhängig von den Parametern α und β) ein:
- lok. Min.
- lok. Max.
- nichts

ist

2) Hesse-Matrix berechnen:

$$\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} \end{pmatrix}$$

$\det(\text{Hess} f(0,0)) = \alpha - \beta^2$

1. Fall $\alpha - \beta^2 > 0 \iff \lambda_+ \lambda_- > 0$ wegen $\text{Det} = \prod \text{EW}$

d.h.: $\iff$ $\begin{cases} \lambda_+ \text{ und } \lambda_- > 0 & \Rightarrow \text{lokales Minimum} \\ \text{oder} & \\ \lambda_+ \text{ und } \lambda_- < 0 & \Rightarrow \text{lokales Maximum} \end{cases}$

$$\lambda_\pm = \frac{1+\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2}{4} - \alpha + \beta^2}$$

aus $\alpha - \beta^2 > 0 \Rightarrow \alpha \geq 0 \Rightarrow \lambda_+ > 0 \Rightarrow \lambda_- > 0$

$\Rightarrow$ Matrix ist positiv definit

Bem: $\text{Hess} f(x)$ ist immer diagonalisierbar!!

$\Rightarrow$ lok. Min. gefunden.

F.S. vom Bsp.

$$\text{Hess}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$f(0,0) = 0$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)\,\text{Hess}_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r_{2,0}(x,y) \qquad \frac{r_{2,0}(x,y)}{\|(x,y)\|^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

da $\lambda_+, \lambda_- > 0 \Rightarrow (x,y)\,\text{Hess} f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \min \lambda \, \|(x,y)\|^2 > 0$

symm.   ↳ kleinster EW

wenn $(x,y) \neq (0,0)$

$\Rightarrow f(x,y) > 0$ für $(x,y) \neq (0,0)$
$\|(x,y)\| < r$

→ aber nur in der Nähe von $(0,0)$!

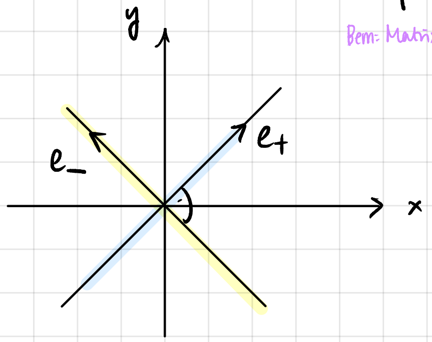
$\Rightarrow (0,0)$ ist ein lokal Minimum.

$$\lambda_\pm = \frac{1+\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2}{4} - \alpha + \beta^2}$$

$\alpha - \beta^2$

wenn $\alpha < \beta^2 \Rightarrow \lambda_- < 0 < \lambda_+$

Bem: Matrix ist symm $\Rightarrow$ in Orthonormalbasis diagonalisierbar!



$$\begin{cases} \text{Hess}_f(0,0)\, e_+ = \lambda_+ e_+ \\ \text{Hess} f(0,0)\, e_- = \lambda_- e_- \\ \|e_\pm\| = 1 \end{cases}$$

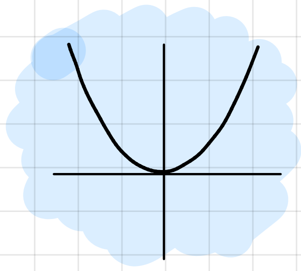
sich der blauen Achse entlang bewegen ...

$$f(te_+) = \frac{t^2}{2} e_+^T \operatorname{Hess} f \, e_+ + r_2(te_+)$$

$$= \underbrace{\frac{t^2}{2}\lambda_+}_{\text{dieser Term dominiert!}} + \underbrace{r_2(te_+)}_{\ll t^2}$$

→ hier $\lambda > 0$

$$\frac{r_2(te_+)}{\|te_+\|^2} \longrightarrow 0$$

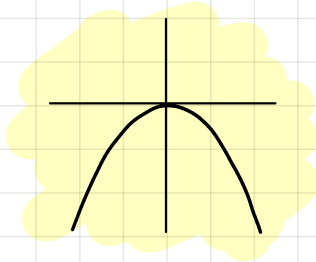


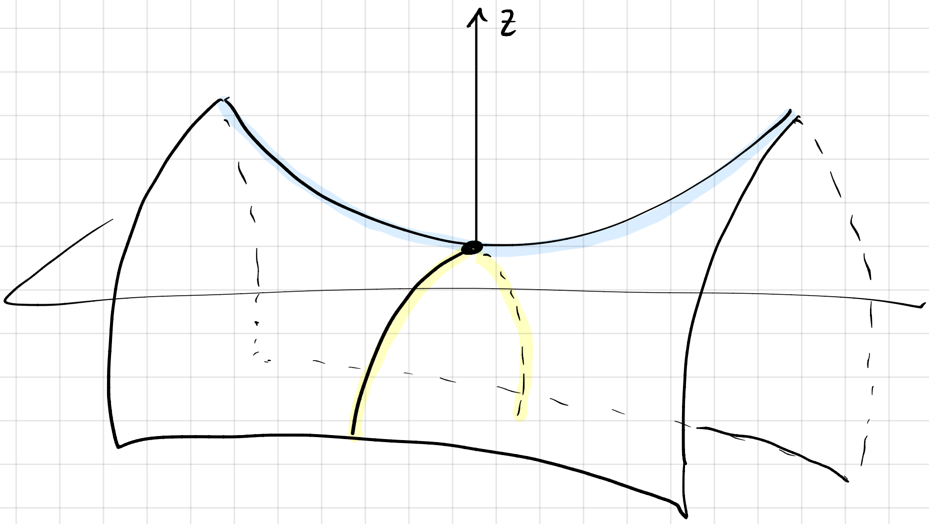
$$= \varphi_+(t)$$

sich der gelben Achse entlang bewegen ...

$$\varphi_-(t) = f(te_-) = \underbrace{\frac{t^2}{2}\lambda_-}_{\text{dominierender Term}} + \underbrace{r_2(te_-)}_{\ll t^2}$$

→ hier $\lambda < 0$





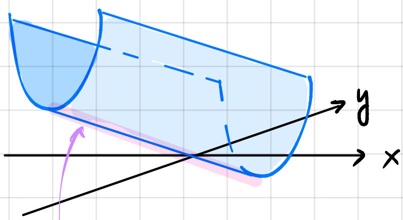
$z = f(x,y)$

Sattelpunkt

Fall: $\alpha = \beta^2$ $\quad$ ($\det \operatorname{Hess} f(0,0) = 0$) $\Rightarrow$ Rang $\operatorname{Hess} f < 2$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x + \beta y)^2 \geq 0$$

$$f(-\beta y, y) = 0 \qquad x + \beta y = 0$$



→ Der degenerierte Fall

hier: Kern der Hesse-Matrix

II.7 Vektorwertige Funktionen

→ ab jetzt: f ist ein Vektor! (d.h. $\vec{f}$)

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l \qquad l \in \mathbb{N}^*$$

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^l \end{pmatrix}$$

Differential: ursprünglich ein Covektor.

nun:

II.7.1 Definition (7.6.1 Sk)

i) Die Funktion f heisst an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar wenn alle f^j an der Stelle x_0 diffbar sind.

Das Differenzial von f schreibt man wie folgt:

$$df_{(x_0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, dx_i = l\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{n} \right. \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$$

nur die 1. Koordinate von f

lineare Abb.! :)

Diese $l \times n$ Matrix heisst die Jacobi-Matrix von f an der Stelle x_0.

ii) $\vec{f}$ heisst von der Klasse C^m, wenn alle f^j von der Klasse C^m sind.

II.7.2 Bemerkung:

$\vec{f}$ ist an der Stelle x_0 diffbar genau dann wenn ($\Leftrightarrow$) $\exists$ $l \times n$ Matrix A s.d.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A\cdot(x - x_0)}{\| x - x_0 \|} = 0}$$

und $A = df_{(x_0)}$ = Jacobi-Matrix von f

II.7.3 Beispiel:

i) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix}$ → das ist in $\mathbb{C}$: $z \mapsto z^2$

$$df_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

ii) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}$

J-Matrix von f: $\quad df_{(x_1, x_2, x_3)} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{pmatrix}$

2x3

II.7.4 Satz (7.6.1 Sk)

$f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$

$x_0 \in \Omega$, f und g sind an der Stelle x_0 diffbar.

Dann sind die Funktionen

$f+g$, $\langle f, g \rangle_{\mathbb{R}^\ell} = \sum_{i=1}^{\ell} f^i(x) g^i(x)$ diffbar und es gilt:

i) $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$

ii) $d\langle f, g\rangle (x_0) = \sum_{i=1}^{\ell} f^i(x_0)\, dg^i(x_0) + df^i(x_0)\, g^i(x_0)$

II.7.5 Satz (7.6.2) → Kettenregel

Sei $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ und $f: \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$

g ist an der Stelle x_0 diffbar und f ist an der Stelle $g(x_0)$ diffbar.

Dann ist $f \circ g$ an der Stelle x_0 diffbar und es gilt folgendes:

$$df^i(g(x_0)) \cdot dg(x_0) = d(f^i \circ g)(x_0)$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} \frac{df^i}{dy^j}(g(x_0)) \frac{\partial g^j}{\partial x_k} dx_k$$

Matrixmultiplikation von den J-Matrizen von f & g

direkt aus Kettenregel Ver. 2

$$\Rightarrow \boxed{d(f \circ g) = \underbrace{df(g(x_0))}_{m \times \ell \text{ Matrix}} \cdot \underbrace{dg(x_0)}_{\ell \times n \text{ Matrix}}}$$

III.7.6 Beispiel

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:)

$$f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1^2 - y_2^2 \\ 2y_1y_2 \end{pmatrix}$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

allg. Tipp für solche Aufgaben:

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^\ell & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x = (x_1 \cdots x_n) & & y = (y_1 \cdots y_\ell) & & z = (z_1 \cdots z_m) \end{matrix}$$

und nicht z.B. $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - y \\ z^2 \end{pmatrix}$

1) $$dg_{(x_1,x_2,x_3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

2) $$df_{(y_1,y_2)} = \begin{pmatrix} 2y_1 & -2y_2 \\ 2y_2 & 2y_1 \end{pmatrix}$$

3) Jacobi-Matrix für die Verknüpfung $f \circ g$:

$$df_{(x_1 - x_2,\, x_3^2)} \cdot dg_{(x_1, x_2, x_3)} = \begin{pmatrix} 2y_1 & -2y_1 & -4x_3y_2 \\ 2y_2 & -2y_2 & 4x_3y_1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_3^2}}{=} \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) & -2(x_1 - x_2) & -4x_3^3 \\ 2x_3^2 & -2x_3^2 & 4x_3 \cdot (x_1 - x_2) \end{pmatrix}$$

III.8 Umkehrsatz

zurück zu Ana1

III.8.1 Umkehrsatz für Funktionen der Variabel $\mathbb{R}$

(Kowalski Prop. $\begin{cases} 3.4.1 \\ 5.1.6(5) \end{cases}$

bei uns: Sk. 5.2.2

f stetig auf $[a,b]$

$f \in C^1((a,b)) \quad f' > 0$ auf (a,b)

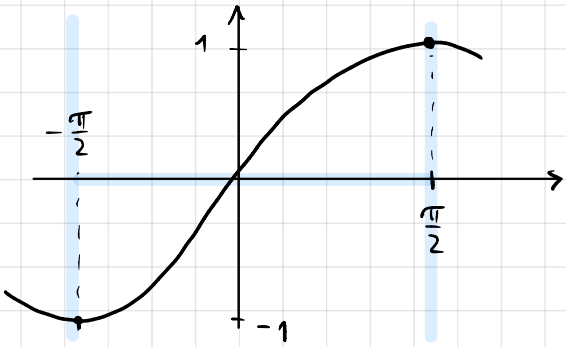
Dann ist $f: [a,b] \to [f(a); f(b)]$ bijektiv und die Umkehrfunktion f^{-1} ist auf $[f(a), f(b)]$ stetig und auf $(f(a), f(b))$ der Klasse C^1.

$$f^{-1} \circ f\,(x) = x$$

$$(f^{-1})'(f(x))\, \underset{\substack{\neq \\ 0}}{f'(x)} = 1$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad (y = f(x))$$

z.B. $\sin(x)$

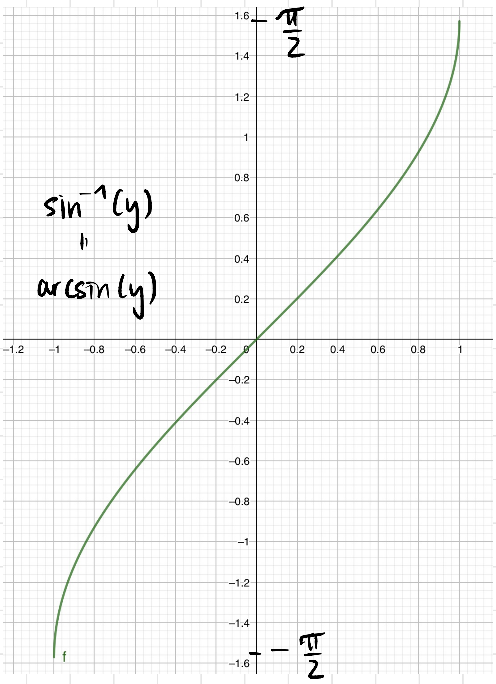


$f(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x$

$\cos x > 0 \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Umkehrsatz $\Rightarrow$ $\sin\ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto [-1, 1]$ ist invertierbar

Graph: 90° Umdrehung, dann Spiegelung:



$$\frac{d}{dy} \arcsin(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \square$$

$f'(x_0) > 0$ (oder < 0)

$$df_{(x_0)} \underset{}{\overset{\in L(\mathbb{R},\mathbb{R})}{}}\; h = f'(x_0) \cdot h$$

$f'(x_0) \neq 0$ $\quad \Leftrightarrow \quad$ $df_{(x_0)}$ ist invertierbar

äquivalent zur Tatsache

III.8.2 Satz (Umkehrsatz in $\mathbb{R}^n$) (Sk. 7.7.1) $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$!

Sei $f \in C^1(\Omega \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Sei $x_0 \in \Omega$ so dass $df(x_0)$ invertierbar ist.

die Jacobi-Matrix

Dann: $\exists r > 0$ sodass

$f: B_r(x_0) \longmapsto f(B_r(x_0))$ invertierbar ist und f^{-1} ist von der Klasse C^1 auf $f(B_r(x_0))$ und

$$\boxed{d(f^{-1})(f(x)) = (df(x))^{-1}} \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

So eine Abbildung heisst Diffeomorphismus zw. $B_r(x_0)$ und $f(B_r(x_0))$ $\square$.

↳ f und f^{-1} sind beide C^1

→ es ist nur lokal !!

der Umkehrsatz in $\mathbb{R}^n$ ist nur lokal !