

III.8.3 Beispiele (7.7.1 Sk)

i) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$ Frage: kann man die Funktion invertieren?

→ Jacobi-Matrix: $df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$

⇒ Frage: an welchen Stellen ist die J-Matrix invertierbar?

$$\det(df(x_1, x_2)) = 4(x_1^2 + x_2^2)$$

$$(x_1^2 + x_2^2) \neq 0$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) \neq (0, 0) \Rightarrow df(x_1, x_2) \text{ ist invertierbar}$$

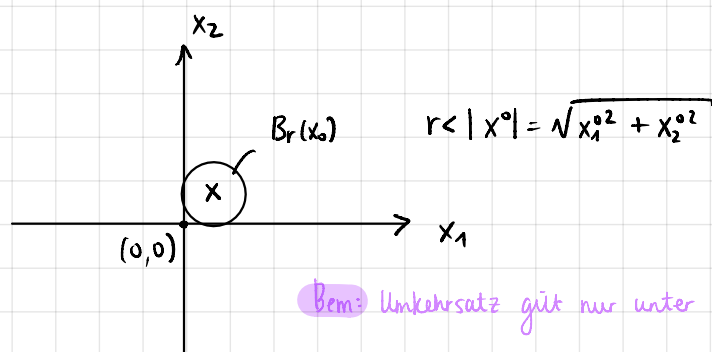
Umkehrsatz $\Rightarrow \forall \overset{=x^0}{(x_1^0, x_2^0)} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$\exists r > 0$ s.d. $f|_{B_r(x^0)} : B_r(x^0) \rightarrow f(B_r(x^0))$ ist invertierbar

Doch: es ist nicht global invertierbar!

$$f(x_1, x_2) = f(-x_1, -x_2) \rightarrow \text{nicht injektiv (global)}$$

⇒ d.h. nicht bijektiv auf ganz $\mathbb{R}^2$



Bem: Umkehrsatz gilt nur unter gewissen Beschränkungen
↳ lokal!

$$d(f^{-1})(f(x)) = \frac{1}{2|x|} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Differenzial
an der Stelle $f(x)$

Da in diesem Fall: $f(x_1, x_2)$ ist recht einfach - d.h. wir können ihn auch explizit (d.h. ohne Umkehrsatz) invertieren... $\rightarrow$ i.A. das geht leider nicht

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 - x_2^2 \\ y_2 = 2x_1x_2 \end{cases}$$

Wir suchen $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ wobei diese Gleichungen gelten.

Annahme: $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

Wähle Voraussetzung: $x_2 \neq 0$

$$\leadsto x_1 = \frac{y_2}{2x_2}$$

in 1. Gl. einsetzen $\Rightarrow y_1 = \frac{y_2^2}{4x_2^2} - x_2^2 \quad / \cdot 4x_2^2$

$$\Leftrightarrow 4x_2^4 + 4x_2^2 y_1 - y_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x_2^2 + y_1)^2 - y_1^2 - y_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_2^2 = -y_1 \pm \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

in 1. Gl. einsetzen: $\Rightarrow 2x_1^2 \neq y_1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$
 $x_1^2 = y_1 + x_2^2$

⋮

do it yourself :)

ii) Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

$$f: \underbrace{(0, \infty) \times \mathbb{R}}_{= \Omega \in \mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

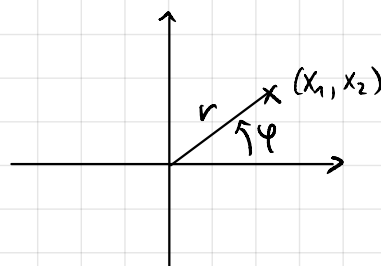
$$f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Umkehrbarkeit von f studieren:

→ diese Funktion ist nicht global invertierbar!

$$\text{Grund: } f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$$

↪ Injektivität ist zerstört!



Aber trotzdem: wir können f lokal invertieren:

$$df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det df = r > 0 \quad \rightarrow \text{lokal invertierbar :)}$$

$f|_{\omega}$ wobei $\omega = (0, \infty) \times (-\pi, +\pi)$
 $\underbrace{f \text{ auf } \omega}_{\text{einschränken}}$

$$f(\omega) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \text{ mit } x \leq 0\}$$

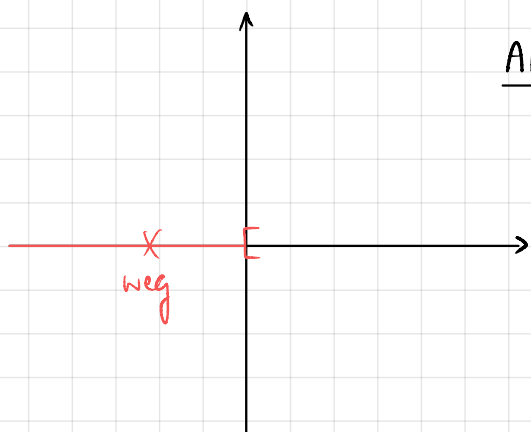
Aussage: $f|_{\omega}$ ist zwischen ω und $f(\omega)$ invertierbar

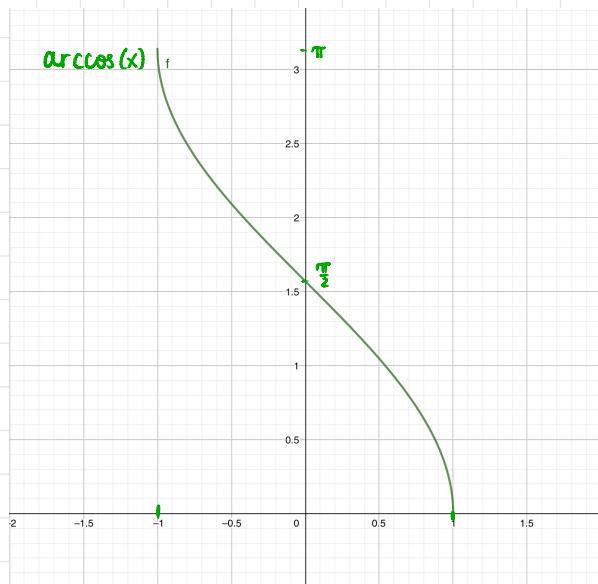
Umkehrsatz $\Rightarrow f|_{f(\omega)}^{-1}$ ist der Klasse C^1

$\Rightarrow f$ bildet ein Diffeomorphismus

zw. $\omega \rightarrow f(\omega)$.

$$\Rightarrow (f|_{\omega})^{-1}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{cases} \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & x_2 \geq 0 \\ -\arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & x_2 < 0 \end{cases}$$





geht auch mit

$$\varphi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

Anwendung des Umkehrsatzes:

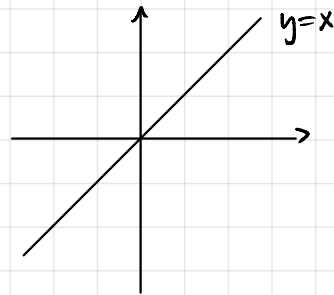
III.9 Implizite Funktionen (7.8 Skript)

wir sind auf $\mathbb{R}^2$ $f(x, y) = 0$

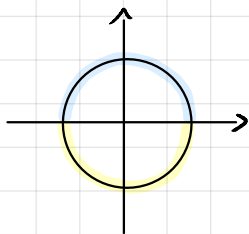
$$f \in C^1$$

Bsp 1: $f(x, y) = x - y$

$$f^{-1}(0) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$



Bsp 2: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ $f^{-1}(0)$



$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Frage Kann man $f^{-1}(0)$ lokal als ein Graph beschreiben?

III. 9.1 Satz (Sk. 7.8.1) mit $l=1$ Implizite Funktion

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^{n-1} \times \mathbb{R}_y$ $x = (x_1 \dots x_{n-1})$

Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$

Sei (x_0, y_0) mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

nichtigste Voraussetzung

$\exists r > 0$ und eine offene Umgebung W von (x_0, y_0) und eine Funktion $h: B_r^{n-1}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^1 .

$$h(x_0) = y_0$$

$$f(x, h(x)) = 0 \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

$$f^{-1}(\{0\}) \cap W = \{(x, h(x)) \mid x \in B_r(x_0)\}$$

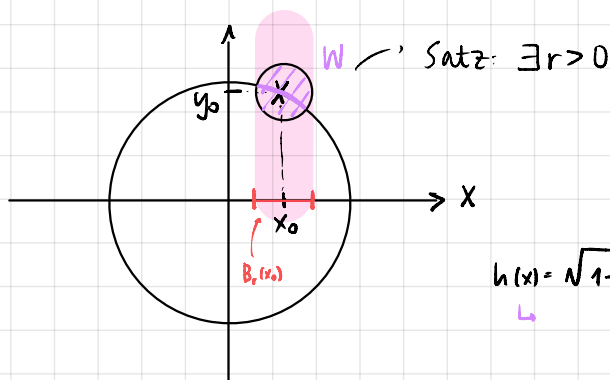
Urbild

$$dh(x) = - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x))}$$

zurück zum Bsp. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Sei (x_0, y_0) $f(x_0, y_0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y_0 \neq 0 \Rightarrow y_0 \neq 0$$



$$h(x) = \sqrt{1-x^2}$$

(> Was ist genau in W ?

Beweis vom Satz III.9.1 (Implizite Funktion)

$$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}_x^{n-1} \times \mathbb{R}_y$$

Rahmen für
implizite
Fkt.

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$$

einführen: $F(x, y) := (x, f(x, y))$

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Jacobi-Matrix von F berechnen:

$$dF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

← alles an der
Stelle (x_0, y_0)

$$\det dF(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

$\Rightarrow F$ ist lokal invertierbar $\Rightarrow$
Umkehrsatz

$$\Rightarrow F^{-1}(x, 0) = (x, h(x))$$

□

1. Teil

→ wir haben h bekommen $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Umkehrsatz: $h(x) \in C^1$

2. Teil: Um den Beweis abzuschließen, brauchen wir nur noch $dh(x)$ zu berechnen.

$$\varphi(x) := (x, h(x)) \quad x \in B_r^{n-1}(x_0)$$

$$\hookrightarrow 0 \equiv f \circ \varphi(x)$$

$$0 = df(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x)$$

$$d\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \phi \\ \phi & & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$df(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \phi \\ \phi & & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$1 \times n$ $n \times (n-1)$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_{n-1}} \right) = 0$$

$1 \times (n-1)$

$$\text{Somit: } dh = - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

□

III.9.2 Anwendungen & Beispiele: (Sk. 7.8.3)

i) $f(x, y) := x + y + x^2 y$

$$\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\{(x, y) \text{ mit } f(x, y) = 0\}}_{(0,0)} = f^{-1}(\{0\})$$

es geht nicht darum, dass die Funktion invertierbar ist! → Es ist das Urbild (hier von 0)!

Was ist $f^{-1}(\{0\})$ in der Nähe von $(0, 0)$

y als Funktion von x schreiben: d.h.: $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$

$$\exists h(x) \quad x \in (-r, r)$$

$$\begin{matrix} \cap \\ B_r^{n-1=1}(0) \\ \text{"} x_0 \end{matrix}$$

$$f^{-1}(\{0\}) \cap W = \{(x, h(x))\}$$

Wir haben: $0 = x + h(x) + x^2 h(x)$

$$h(x) = -\frac{x}{1+x^2} //$$

explizite Funktion gefunden :)

ii) $f(x, y) = x + y + x^2 \sin(\exp(\cos y))$

↳ explizite Funktion finden ... :)

⇒ implizite Funktion ... :)