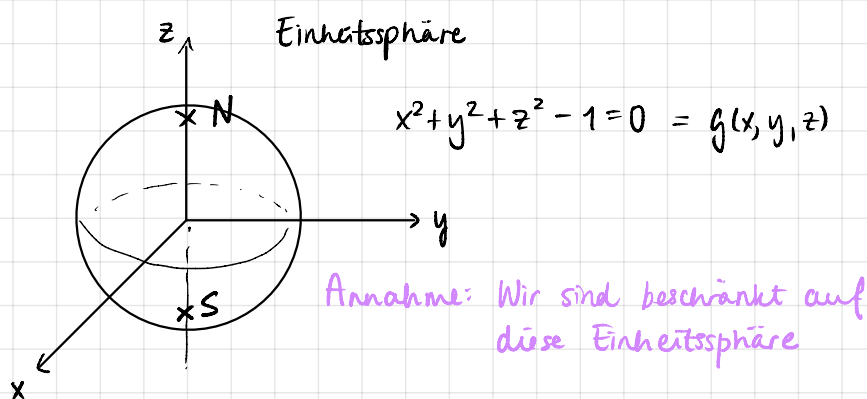


III.10 Extrema mit Nebenbedingungen



Höhenfunktion: $f(x, y, z) = z$

N.. Maximum

S.. Minimum

$df = dz \neq 0$ $\leftarrow df \stackrel{!}{=} 0$ ist nicht die richtige Bedingung, um die Extremalstellen von f zu finden!

$$dg = 2xdx + 2ydy + 2zdz$$

colinear.. parallel zueinander

Sei $f(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$
 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^{n-1} \uparrow \downarrow \mathbb{R}$

$g(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid g(x, y) = 0\}$$

III.10.1 Satz

Sei $(x_0, y_0) \in S$ ein Lokalmaximum (bzw. - minimum) von f auf S .

Falls $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $df(x_0, y_0) + \lambda dg(x_0, y_0) = 0$

wichtige Voraussetzung!

λ heisst der Lagrange - Multiplikator

Bem: im Skript steht l - wir betrachten in Ana 2 $l=1$.

$\hookrightarrow$ an Prüfung auch:

isomorphismus

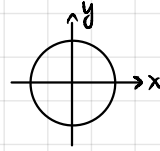
III.10.2 Beispiele → sehr wichtig für nächste Serie & auch für Prüfung!

i) $\mathbb{R}^2$ $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ → wir bleiben auf dem Einheitskreis & vergessen alles andere (d.h. unsere Welt ist nur innerhalb des Einheitskreises --)
 $f(x,y) = x(1+y)$

1. Frage: besitzt f endliche Extremalwerte auf dem Einheitskreis?

d.h. $g^{-1}(\{0\})$

↳ Urbild von 0
≙ alle Pkte auf dem Einheitskreis



2. Frage: werden diese Extremwerte auf dem Einheitskreis erreicht?

d.h. $\exists? (x_0, y_0) \in g^{-1}(\{0\})$ mit $f(x_0, y_0) = \sup_{g^{-1}(\{0\})} f$ (bzw. $\inf_{g^{-1}(\{0\})} f$)

Lösung: 1) $S^1 = g^{-1}(\{0\}) = \partial B_1(0)$
↑
1 Dim. Sphäre
 $= \overline{B_1(0)} \setminus \overset{\circ}{B_1(0)}$ ist abgeschlossen.

2) S^1 ist beschränkt

⇒ S^1 ist kompakt

3) f ist stetig

⇒ die Extremalwerte sind endlich & werden auf dem E-Kreis erreicht
Satz 4.2.3 im Skript

↳ d.h.: Antwort zu den beiden Fragen ist "ja"

Nun: Wo sind die Punkte an welchem die Extremalwerte erreicht werden?

⇒ wir berechnen die 2 Differenziale: von f & von der Nebenbedingung g

$$\begin{cases} df(x,y) = (1+y)dx + xdy \\ dg(x,y) = 2x dx + 2y dy \end{cases} \leftarrow \text{Covektoren}$$

→ Wir suchen die Punkte, wobei $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $df(x,y) + \lambda dg(x,y) = 0$

↑
in S^1 diese 2 Covektoren parallel zueinander sind

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+y) + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \end{cases}$$

Bem: $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (1,0) \\ (x,y) = (-1,0) \end{cases}$

↳ wir müssen die Punkte (x,y) wobei $dg(x,y) = 0$ vermeiden!
 ↳ weil für diese Pkte funktioniert der Satz nicht ...!

$$x = -2\lambda y \Rightarrow (4\lambda^2 + 1)y^2 = 1$$

$$(1+y) - 4\lambda^2 y = 0$$

einsetzen

$$\Rightarrow 4\lambda^2 = \frac{1-y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} - 1$$

$$\Rightarrow (1+y) + \left(1 - \frac{1}{y^2}\right)y = 0$$

$$\Leftrightarrow 1+y + y - \frac{1}{y} = 0 \quad / \cdot y$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(y+1)\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \text{NST: } \begin{cases} y = -1 & \Rightarrow x = 0 \\ y = \frac{1}{2} & \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

λ berechnen ...

$$f(0, -1) = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \rightarrow \text{Maximum}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \rightarrow \text{Minimum}$$

die Pkte, an denen Max. bzw. Min. erreicht wird.

$$f(1, 0) = 1$$

$$f(-1, 0) = -1$$

die 2
anderen
Pkte
testen...

↳ direkte Rechnung da man den Satz nicht anwenden kann.

□

III.10.3 Warnung (7.9.2 Sk.)

Warum $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$

anhand Bsp: Seien: $g(x, y) = x^2 - y^3$
 $f(x, y) = y$

$$g^{-1}(\{0\}) = \{x^2 = y^3\}$$

$$(x, y) \in g^{-1}(\{0\}) \Rightarrow y \geq 0$$

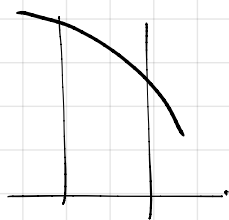
$\Rightarrow \min_{g^{-1}(\{0\})} f = 0$ das wird an $(0, 0)$ erreicht

$$\left. \begin{array}{l} dg_{(0,0)} = 0 \\ df_{(0,0)} = dy \neq 0 \end{array} \right\} \text{ d.h. } dg \not\propto df \Rightarrow \text{können Satz nicht verwenden!}$$

Bem: Wir können immer $\tilde{g}(x, y)$ einführen, wobei $\tilde{g}(x, y) = g(y, x)$
& Bed. für $\tilde{g} = \text{Bed. für } g$

Beweis vom Satz III.10.1

(x_0, y_0) lokal Extremum von f in $g^{-1}(\{0\})$



$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \quad (\text{Voraussetzung})$$

$\exists h(x)$ sodass

$$g^{-1}(\{0\}) \cap \underset{(x_0, y_0)}{W} = \{(x, h(x)) \mid x \in B_r(x_0)\}$$

$$\underset{W}{\mathbb{R}^{n-1}}$$

$$F(x) = f(x, h(x))$$

$\rightarrow$ lokal Minimum von f in $g^{-1}(\{0\}) \cap W$ ist ein üblicher lokalmilimum für F !

d.h.: 1. Differenzial von F berechnen...

$$dF(x_0) = 0$$

$$F(x) = f \circ \varphi(x) \quad \text{wobei } \varphi(x) = (x, h(x))$$

$\cap$
 $B_r(x_0)$

$$dF(x_0) \stackrel{\text{Kettenregel 3. Version}}{=} df(\varphi(x_0)) \cdot d\varphi(x_0)$$

" "
 $(x_0, h(x_0)) = (x_0, y_0)$

$$d\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \partial_{x_{n-1}} h \end{pmatrix}$$

$\xleftarrow{n-1}$ $\xrightarrow{n}$

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dh(x_0) = \circledast$$

$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$

Einschub: $h(x)$.. implizite Funktion $\Rightarrow$ von gestern

Wir haben:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \lambda := \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

□

§4 INTEGRATION IM $\mathbb{R}^n$

IV.1 Riemannsches Integral über einem Quader (8.1 sk)

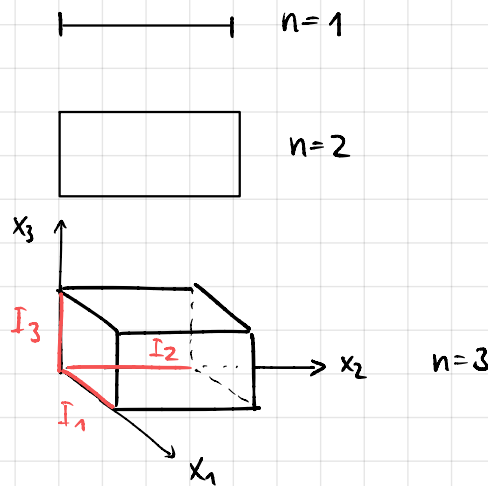
(für $\mathbb{R}^n$ mit $n=1$: Sektion 6.2 Kowalski & 6.2 Skript)

IV.1.1. Definitionen

i) ein n -Dimensionaler Quader ist ein Produkt von der Form

$$Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ mit } x_k \in I_k \}$$

wobei I_k Intervalle in $\mathbb{R}$ sind.



Das **Mass** von Q

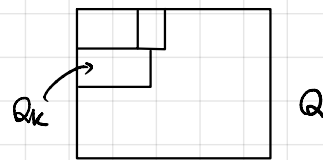
$$\mu(Q) = \prod_{i=1}^n |I_i|$$

($n=1$: Länge, $n=2$ Fläche, $n=3$: Volumen, ...)

ii) Eine **Zerlegung** von Q

$$P = \{ Q_k, 1 \leq k \leq K \}$$

wobei Q_k disjunkt sind $\bigcup_{k=1}^K \bar{Q}_k = \bar{Q}$
Vereinigung von allen Q_k



Q_k sind disjunkt aber alle Q_k zusammen ergibt Q
 alle Ränder sind orth. zu den Einheitsrichtungen

Die Feinheit von so einer Zerlegung gleicht:

$$\delta_P = \max_{1 \leq k \leq K} \text{diam } Q_k$$

diam.. diameter

wobei $\text{diam } Q_k = \max_{x, y \in Q_k} |x - y|$

Bem: $n=1$: $Q = \overbrace{\quad\quad\quad}^l$ $\text{diam } Q = l$

$n=2$: $Q = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ $\text{diam } Q = \sqrt{2} l$

$n=3$: $Q = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ $\text{diam } Q = \sqrt{3} l$

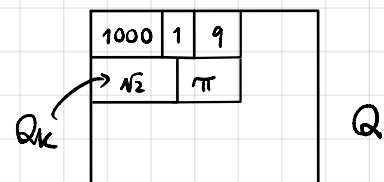
i.A.: $\text{diam } Q = \sqrt{n} l$

iii) Eine Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion** falls f eine Darstellung von der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^K \underbrace{c_k}_{\mathbb{R}, \text{ beliebig}} \chi_{Q_k}(x)$$

besitzt,

wobei $\chi_{Q_k}(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



iv) Das **Riemann Integral** (R-Integral) von einer solchen Treppenfunktion ist die folgende Zahl:

$$\int_Q f d\mu = \sum_{k=1}^K c_k \mu(Q_k)$$

Bem: μ ..bezieht sich auf die Lebesgue-Masse

IV.1.2 Definition (8.1.3 Sk.)

Sei $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$, f beschränkt, d.h.: $\sup_{x \in Q} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty(Q)} = \|f\|_\infty < +\infty$

Das untere (bzw. obere) R-Integral von f sind die folgenden Zahlen:

- unteres R-I:

$$\|f\|_{\infty, \mu(Q)} \leq \int_Q f d\mu = \sup \left\{ \int_Q e d\mu, \text{ wobei } e \text{ Treppenfunktion mit } e \leq f \right\} \leq \|f\|_{\infty, \mu(Q)}$$

beschränkt!

- oberes R-I:

$$\int_Q f d\mu = \inf \left\{ \int_Q e d\mu, \text{ wobei } e \text{ Treppenfunktion mit } f \leq e \right\}$$

↑
reelle Zahlen!

Die Funktion heißt R-Integrierbar falls $\underline{\int_Q f d\mu} = \overline{\int_Q f d\mu}$