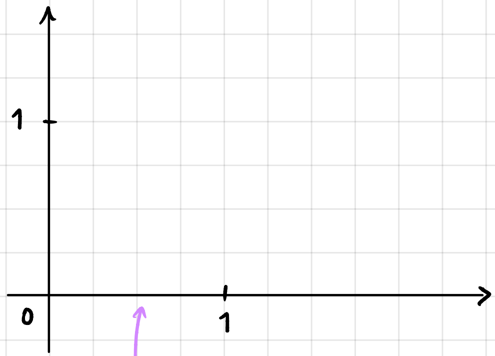
Lina De Windt - ldewindt@ethz.ch

IV.1.3 Beispiele & Gegenbeispiele zu der R-Integrabilität

i) Gegenbeispiel

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) \cap \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$Q = [0,1]$



wegen Dichtheit von $\mathbb{Q}$ ist e oben blockiert!
(sie ist im Intervall $[0,1]$ nie 0)

Sei e_+ eine Treppenfunktion $e_+(x) \geq f(x)$

$\Rightarrow e_+ \geq 1$ auf $[0,1]$

Sei e_- eine Treppenfunktion $e_-(x) \leq f(x)$

$\Rightarrow e_-(x) \leq 0$

$$\Rightarrow \overline{\int_Q} f \, d\mu \geq 1 \qquad \underline{\int_Q} f \, d\mu \leq 0 \quad \Rightarrow f \text{ ist nicht R-Integrabel}$$

(zu viel unstetige Punkte)

ii) Beispiel

Regelfunktionen ⊛ auf $[a,b]$ $a<b$

f ist beschränkt: $\exists e_k$ Folge von Treppenfunktionen die gleichmässig gegen f konvergieren

$$\boxed{\| e_k - f \|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} | f(x) - e_k(x)}$$

$$\lim_{k \to \infty} \| e_k - f \|_\infty = 0$$

$\Rightarrow$ eine solche Funktion f ist R-Integrabel

$\Rightarrow$ Warum? $\exists e_k^{\pm}$ mit $e_k^- \leq f \leq e_k^+$ $\quad \lim_{k \to \infty} \| e_k^{\pm} - f \|_\infty = 0$

$$\Rightarrow \| e_k^- - e_k^+ \|_\infty \to 0 \qquad \left| \int_Q e_k^+ - \int_Q e_k^- \right| \to 0$$

↳ f kann von unten & von oben angenähert werden

e_k konvergiert gleichm. gegen f.

Regelfunktion

$\Rightarrow \underline{\int_Q f \, d\mu} = \overline{\int_Q f \, d\mu}$ die Funktion f ist R-Integrabel

⊛ Regelfunktion

Unter einer **Regelfunktion** oder **sprungstetigen Funktion** versteht man in der Mathematik eine Funktion, deren einzige Unstetigkeitsstellen Sprungstellen sind. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Integrationstheorie. Die Bezeichnung „Regelfunktion“ (*fonction réglée*) wurde von der französischen Mathematiker-Schule eingeführt.

IV.1.4 Satz (Sk. 8.1.1 6.2.3 Fall $n=1$)

Sei $f \in C^0(\overline{Q})$ dann ist f über Q integrabel.

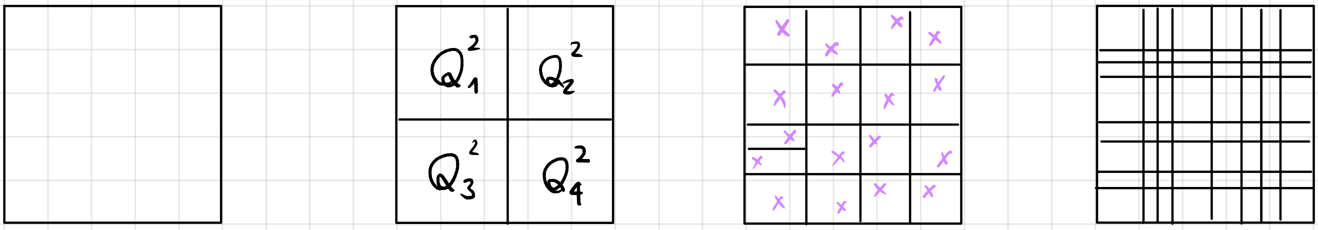
Für jede Folge von Zerlegungen von Q

Index # Quader

$\boxed{P^\ell := \{ Q_k^\ell \quad 1 \leq k \leq K^{(\ell)} \}}$ mit Feinheit $\delta_{P^\ell} \to 0$

P ist eine Zerlegung

Familie von Quadern



P^1 P^2 P^3 P^4

1. Zerlegung: Quader selbst

⚠ Die Zerlegung muss nicht regelmässig sein.

Der maximale Durchmesser von den Teilchen muss einfach $\to 0$ streben.

für eine beliebige Auswahl von Punkten $P_k^\ell \in Q_k^\ell$ (einfach 1 beliebiger Pkt. pro Quader)

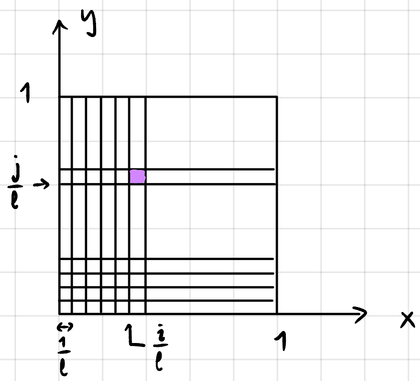
Dann gilt: $\int_Q \underbrace{\sum_{k=1}^{K} f(P_k^\ell) \, \chi_{Q_k^\ell}(x)}_{\text{Treppenfunktion}} = \sum_{k=1}^{K^\ell} f(P_k^\ell) \, \mu(Q_k^\ell) \xrightarrow{\ell \to \infty} \int_Q f$

IV.1.5 Beispiel

$$Q = [0,1] \times [0,1]$$

$f(x,y) = x$ → ist stetige Funktion

1) Zerlegung: wir machen eine regelmässige Zerlegung



$l \in \mathbb{N}$ (l ist sehr gross, z.B. 1000'000)

$k = (i,j) \in \{0,1,\dots l\}^2$ $\qquad K^l = l^2$

$$Q_k^l = \left[\frac{i}{l}, \frac{i+1}{l}\right] \times \left[\frac{j}{l}, \frac{j+1}{l}\right]$$

$$\delta_l = \frac{\sqrt{2}}{l} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

$$P_k^l = \left(\frac{i}{l}, \frac{j}{l}\right)$$

Flächeninhalt von jedem Quader

$$\int_Q f\, d\mu = \lim_{l\to\infty} \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} \underbrace{f(P^l_{(i,j)})}_{= \frac{i}{l}} \frac{1}{l^2} = \lim_{l\to\infty} \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{i}{l^3} = \lim_{l\to\infty} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{i}{l^2} = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l^2} \sum_{i=0}^{l-1} i =$$

was ist das für eine Σ?

$$= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l^2} \cdot \frac{l(l-1)}{2} = \frac{1}{2} \qquad \square$$

$\Rightarrow$
$$\begin{array}{cccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & l-1 & \\ + & l-1 & l-2 & l-3 & & \dots & 0 & = 2\sum_{i=0}^{l-1} i \end{array}$$

IV.1.6 Satz: Eigenschaften von dem R-Integral

Seien f, g R-integrabel & beschränkt auf Q, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

i) αf ist integ. $\int_Q \alpha f\, d\mu = \alpha \int_Q f\, d\mu$ → linearität; folgt direkt aus Definition

ii) $f+g$ ist integ. $\int_Q f+g\, d\mu = \int_Q f\, d\mu + \int_Q g\, d\mu$

iii) falls $f \le g$ dann gilt $\int_Q f \le \int_Q g$

iv) $|f|$ ist auch integrabel und $\int_Q |f| \, d\mu \geq |\int_Q f \, d\mu|$

Grund: $|f| = f_+ - f_-$

$\begin{cases} f_+ = \mathrm{Max}\{f, 0\} \\ f_- = \mathrm{Min}\{f, 0\} \end{cases}$ $\quad f = f_+ + f_-$

$-|f| \leq f \leq |f|$

IV.1.7 Korollar (8.1.1. Sk)

$f_k \in C^0(\overline{Q}) \quad \exists f \in C^0(\overline{Q})$

$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\overline{Q}} |f_k(x) - f(x)| = 0$ → gleichmässige Konvergenz

Dann gilt: $\int_Q f_k \, d\mu \longrightarrow \int_Q f \, d\mu$

Masse vom Quader

Grund: $|\int_Q f_k - f \, d\mu| \leq \int_Q |f_k - f| \, d\mu \leq \int_Q \|f_k - f\|_\infty \, d\mu = \|f_k - f\|_\infty \, \mu(Q) \to 0$

$|f_k - f|(x) \leq \|f_k - f\|_\infty$ iii)

IV.1.8 Satz: Gebietsadditivität (8.1.4 Sk.)

$f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt R-integrabel auf Q

Sei $P = \{Q_k, 1 \leq k \leq K\}$ eine Zerlegung von Q.

Dann gilt: $\boxed{\sum_{k=1}^{K} \int_{Q_k} f \, d\mu = \int_Q f \, d\mu}$

IV.2 Der Satz von Fubini (8.2 Sk.)

IV.2.1 Satz (Fubini) (8.2.1 Sk.)

Sei $Q = [a,b] \times [c,d]$ mit $a<b$ und $c<d$.
(Quader)

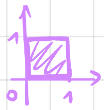
Sei $f \in C^0(\overline{Q})$. → d.h. u.a. f stetig in $\overline{Q}$

Dann gilt: $$\boxed{\int_Q f \, d\mu = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dx \right) dy}$$

→ Beweis: im Skript.

IV.2.2 Anwendungen (Beispiele)

⚠ immer überprüfen, dass f die Fubini-Bedingung erfüllt! (d.h. stetig)

i) $\int_{[0,1]^2} x \, d\mu$ → wollen x auf Quader  integrieren

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 x \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dy = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

ii) $$\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sin(y-x) \, d\mu = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sin(x-y) \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[-\cos(x-y) \right]_0^{2\pi} dx = 0$$

iii) $f(x,y) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) \sin(y-x)$

bez. y int. $\int_0^{2\pi} f(x,y) \, dy = 0$

bez. x int. $\int_0^1 \, ?$

$\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) \sin(y-x)$ ist nicht R-Integrabel! (die Treppenfkt. sind blockiert)

⇒ der Fubini-Satz kann hier nicht angewendet werden

→ d.h. zuerst schauen ob überhaupt R-Integrabel, dann anfangen zu integrieren.

IV.2.3 Satz: Fubini beliebige Dimension (8.2.2 Sk.)

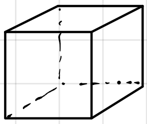
Sei $Q = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, Sei $f \in C^0(\overline{Q})$ wobei $a_i < b_i$

Dann gilt: $$\boxed{\int_Q f \, d\mu = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1 \cdots x_n) \, dx_n \right) dx_{n-1} \cdots \right) dx_1}$$

↪ Die Ordnung der Integrale spielt keine Rolle!

↳ Man darf die Ordnung der unterschiedlichen Integrationen vertauschen :)

IV.2.4 Beispiele (8.2.4 Sk.)

i) $Q = [0,1]^3 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] =$  Einheitswürfel in $\mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = xy^2z^3$

$$\to \int_Q f \, d\mu = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 xy^2z^3 \, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{xy^2z^4}{4} \right]_0^1 dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{xy^2}{4} \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{xy^3}{12} \right]_0^1 dx$$

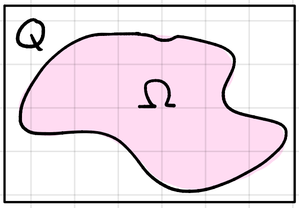
$$= \int_0^1 \frac{1}{12} x \, dx = \left[\frac{x^2}{24} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

Doch im echten Leben hat es mehr als Quader... wir wollen auch über andere Gebiete integrieren können!

IV.3 Jordan-Bereiche (8.3 Sk.)

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$, Ω ist beschränkt

↳ d.h. $\exists$ immer ein Quader, welches Ω selbst enthält



$\exists Q$ Quader $\Omega \subset Q$

IV.3.1 Definition (8.3.2 Sk.)

Ω heisst **Jordan Messbar** wenn:

$$\boxed{\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \in Q \setminus \Omega \end{cases}}$$ über Q R-Integrabel ist

und $\boxed{\mu(\Omega) = \int_Q \chi_\Omega(x)\, d\mu}$ heisst die n-dimensionale **Jordansche Masse** von Ω.

IV.3.2 Satz (Sk. Bsp. 8.3.2 i))

Sei $\psi \in C^0([a,b])$, $a<b$, $\psi \geq 0$

$$\Omega_\psi = \{(x,y),\ x \in [a,b] \text{ und } y \leq \psi(x)\}$$

ist Jordan-Messbar.