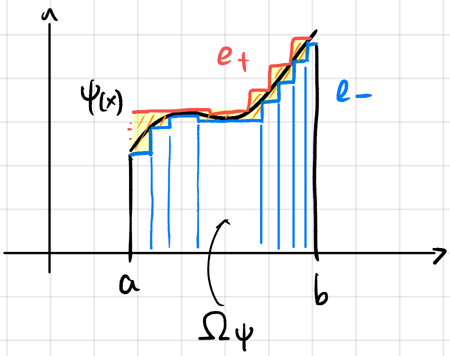
Beweis vom Satz IV.3.2

ψ ist R-integrabel auf $[a, b]$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists e_+, e_-$ Treppenfunktionen $0 \le e_- \le \psi \le e_+$



mit $\left| \underbrace{\int_a^b e_+ - e_-}_{\ge 0} \right| \le \varepsilon$

$$\Rightarrow \chi_{\Omega_{e_-}} \le \chi_{\Omega_\psi} \le \chi_{\Omega_{e_+}}$$

Hypograph von ⌐ bzw. von ⌐ → kann man mit oder ohne Ränder nehmen

Ω_{e_-} ist eine Vereinigung von 2-dimensionalen Quadern!

⚠ **Bem:** $\chi_{\Omega_{e_\mp}}$ ist eine Treppenfunktion von $\mathbb{R}^2$ (und nicht mehr von $\mathbb{R}$!)

(→ diese Treppenfunktion nimmt nur die Werte 0 & 1 an.)

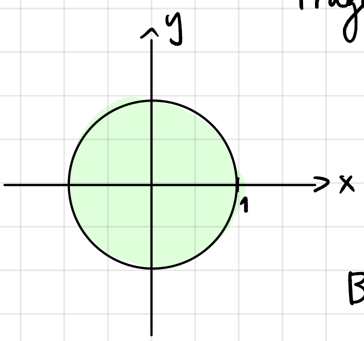
$$\int \chi_{\Omega_{e_+}} - \chi_{\Omega_{e_-}} \, d\mu = \mu(///) \le \varepsilon$$

Not: $\chi_{\Omega_{e_+}}$ .. charakteristische Gleichung vom Hypograph von e_+ (bzw. Hypergraph falls Ω_{e_-})

$$\Rightarrow \chi_{\Omega_\psi} \text{ ist R-Integrabel}$$

$$\int \chi_{\Omega_{e_+}} \to \int_a^b e_+ \to \int_a^b \psi(x)\, dx \qquad \square$$

IV.3.3 Beispiel



Frage: Ist diese Kreisscheibe $B_1^2(0)$ Jordan-Messbar?

Antwort: Ja. Warum?:

$$\chi_{B_1(0)} = \chi_{B_1^+(0)} + \chi_{B_1^-(0)}$$

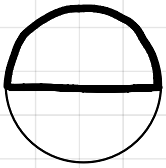
$$B_1^+(0) = \{(x,y) \,;\, y \ge 0 \text{ und } x^2 + y^2 \le 1\} = \Omega_{\psi^+}$$

$$B_1^-(0) = \{(x,y) \,;\, y \le 0 \text{ und } x^2 + y^2 \le 1\} = \Omega_{\psi^-}$$

mit $\psi^\mp(x) := \mp\sqrt{1 - x^2}$ auf $[-1, +1]$

d.h. $\chi_{B_1^\mp(0)} = \chi_{\Omega_{\psi^\mp}}$ sind R-Integrabel $\square$ (R-Integrabel ⇒ Jordan-Messbar) kleine Bem: Was passiert mit dem Rand?

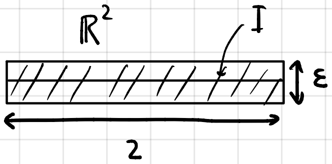
$\chi_{B_1^+(0)} + \chi_{B_1^-(0)}$



$I = \{ y=0 \, , \, -1 \le x \le 1 \}$ $\quad \mu(I) = 0$

$e_- = 0$

$e_+ = 1$



$\int e_+ = 2\varepsilon \to 0$

$\int e_- = 0$

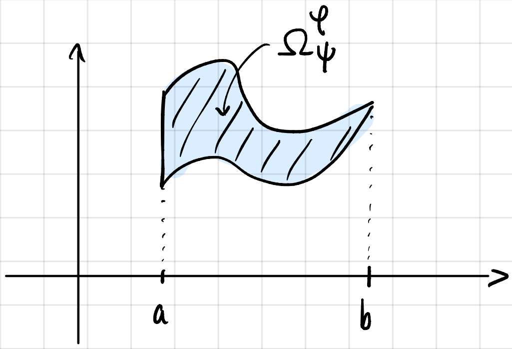
$0 = e_- \le \chi_I \le e_+$

d.h. Rand wird nicht berücksichtigt (weil es sowieso verschwindet)

IV.3.4 Verallgemeinerung vom Satz IV.3.2

Sei $0 \le \psi(x) \le \varphi(x)$ stetig auf $[a,b]$

$\Omega_\psi^\varphi = \{ (x,y) \, , \, x \in [a,b] \quad \varphi(x) \ge y \ge \psi(x) \}$ ist Jordan-Messbar.

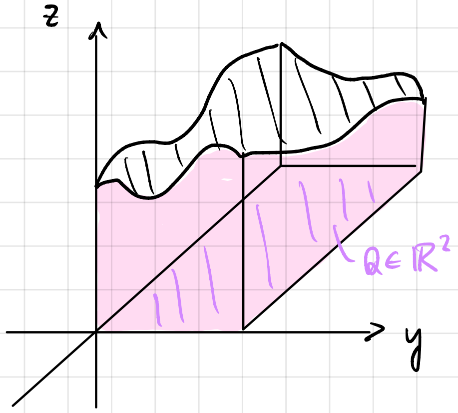


Grund: $\chi_{\Omega_\psi^\varphi} = \chi_{\Omega_\varphi} - \chi_{\Omega_\psi}$

IV.3.5 Fortsetzung vom Satz IV.3.2 in höhere Dimensionen

Sei Q ein n-1 dimensionaler Quader.

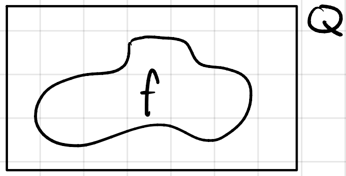
$\psi \in C^0(Q, \mathbb{R}_+)$



$\Omega_\psi = \{ (x', y) \, , \, x' \in Q \quad 0 \le y \le \psi(x') \}$

ist Jordan Messbar.

IV.3.6 Definition (Sk. 8.3.3)



Sei Ω beschränkt und messbar in $\mathbb{R}^n$

Sei f eine beschränkte Funktion auf Ω

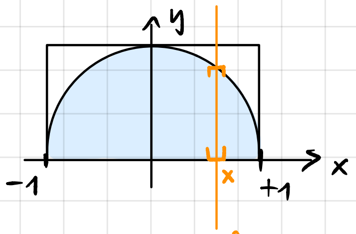
f heisst auf Ω R-integrabel falls die Fortsetzung von f mit 0 auf Q R-integrabel ist.

d.h. $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in Q \setminus \Omega \end{cases}$ ist R-Integrabel

Not: $\boxed{\int_\Omega f \, d\mu = \int_Q \bar{f} \, d\mu}$

IV.3.7. Beispiel

$\Omega_\psi = \{ (x,y) \text{ mit } x \in [-1,+1] \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \}$



$B_1^+(0)$

$\Omega_\psi \subset Q = [-1,1] \times [0,1]$

$f(x,y) = y$

Einschränkung von χ

Def.

$$\int_{\Omega_\psi} f \, d\mu \overset{\text{Def.}}{=} \int_Q f(x,y) \chi_{\Omega_\psi}(x,y) \, d\mu$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 y \, \chi_{\Omega_\psi} \, dy \right) dx$$

Fubini

← Schnitt von $|_x$ mit Kreisscheibe

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Fubini: wir arbeiten 1 Variable nach der anderen.
Die Variablen, die noch nicht gekommen sind, sind einfach Parameter! :)

Kochrezept:
1) $f(x,y)$?
2) $|$? Schnitt
3) Fubini

IV.4 Der Satz von Green in 2 Dimensionen

IV.4.1 Der Satz von Green auf einem 2-Dimensionalen Quader

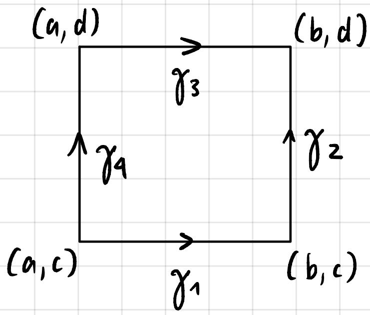
Voraussetzungen $\begin{cases} \text{Sei } Q = [a,b] \times [c,d] \\ \text{Seien } g, h \in C^1(Q) \end{cases}$ d.h. von der Klasse C^1 auf dem Quader Q

Dann gilt : $$\boxed{\int_Q \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = \int_{\partial Q} \underbrace{g\,dx + h\,dy}_{\text{Differenzialformen}}}$$

$g\,dx + h\,dy = \lambda$

∂Q: der Rand von Q

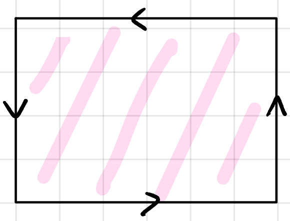
doch wie legt man
∂Q (Rand) genau fest ?:



momentan ist die Orientierung noch ein Durcheinander!

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, c) & t \in [a, b] \\ \gamma_3(t) = (t, d) & t \in [a, b] \\ \gamma_4(t) = (a, t) & t \in [c, d] \\ \gamma_2(t) = (b, t) & t \in [c, d] \end{cases}$$

⚠ Orientierung festlegen (sehr wichtig!):



das Gebiet muss sich immer auf meiner linken Seite befinden, wenn ich über den Rand laufe.

$$\boxed{\partial Q = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}$$