

Beweis vom Satz von Green:

$$\begin{aligned}
 - \int_Q \frac{\partial g}{\partial y} d\mu &= - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\
 &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} - \int_a^b g(x, d) dx + \int_a^b g(x, c) dx \\
 &= - \int_{\gamma_3} g(x, y) dx + \int_{\gamma_1} g(x, y) dx
 \end{aligned}$$

d.h. wenn wir die waagrechten Linien y entlang integrieren, kriegen wir 0.

$$\int_{\gamma_1} h(x, y) dy = \int_a^b h(\gamma_1(t)) dy \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$= - \int_Q \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) d\mu = - \int_{\gamma_3} g(x, y) dx + \underbrace{h(x, y) dx}_{=0} + \int_{\gamma_1} g(x, y) dx + \underbrace{h(x, y) dy}_{=0}$$

→ genau dasselbe machen für y (Fubini → dx & dy vertauschen) $\square$

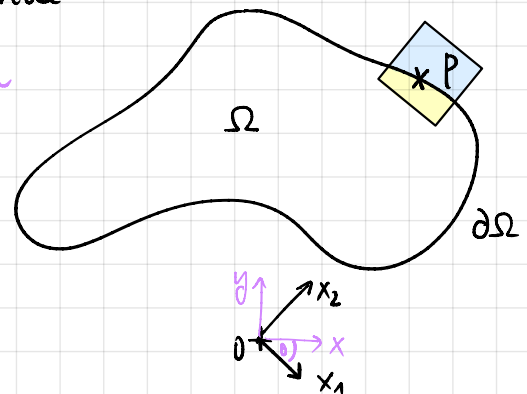
IV.4.2 Definition (Sk. 8.4.2) Gebiete der Klasse C^1

Ein Gebiet ist von der Klasse C_{pw}^1 falls zu jedem Punkt $p \in \partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \overset{\text{Rand von } \Omega}{\Omega}$ es existiert das Folgende:

i) Koordinaten (x_1, x_2) ← gedrehte Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{meistens: } \theta = 0 \\ \text{oder} \\ \theta = \pi/2 \leadsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \end{array} \right)$$



ii) Ein Quader $[a, b] \times [c, d]$ in diesen neuen Koordinaten mit

$$p \in (a, b) \times (c, d)$$

iii) Eine Funktion $\psi \in C_{pw}^1([a, b], [c, d])$ s.d. $\Omega \cap [a, b] \times [c, d] =$

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \in [a, b] \text{ und } C \leq x_2 \leq \psi(x)\}$
 oder $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \in [a, b] \text{ und } C \leq x_2 \leq \psi(x)\}$

Hypograph
 oder
 Hypergraph

von ψ in diesem Quader.

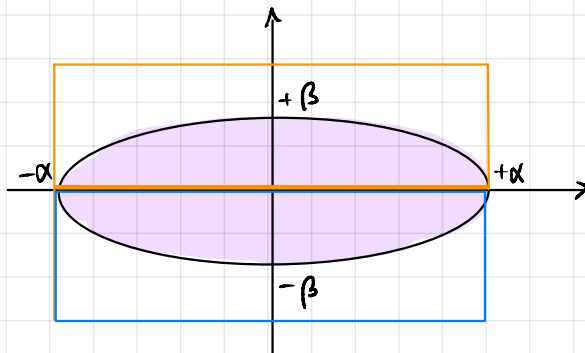
IV.4.3 Beispiele

$$\alpha, \beta > 0$$

i)

$$\Omega = \{(x, y); \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \leq 1\} \quad \leftarrow \text{Ellipse!}$$

Frage: Beweisen Sie, dass es sich um ein C^1 -Gebiet handelt.



$$Q_1 = [-\alpha, \alpha] \times [0, \beta + 1]$$

$$(x_1, x_2) = (x, y)$$

$$\psi(x) = \beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}$$

$$\Omega_\psi = \Omega \cap Q_1$$

(Hypograph von ψ)

$$Q_2 = [-\alpha, \alpha] \times [-1 - \beta, 0]$$

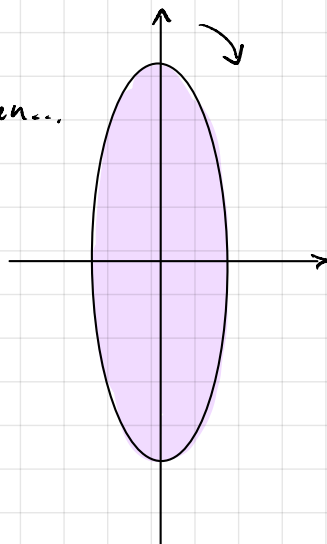
$$(x_1, y_2) = (x, y)$$

$$\psi(x) = -\beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}$$

$$\Omega_\psi^+ = \Omega \cap Q_2$$

(Hypergraph von $\psi(x)$)

→ das ganze drehen...



& genau dasselbe mit 2 neuen Q s wiederholen

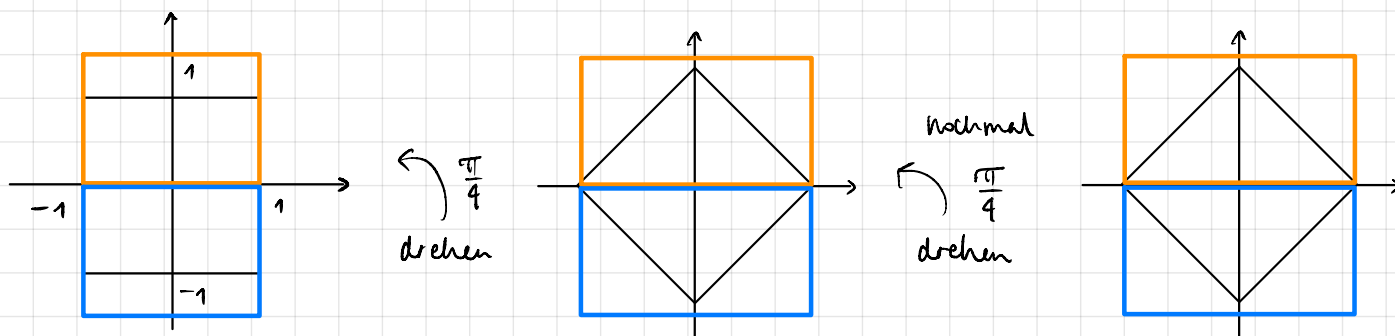
$$x_1 = y$$

$$x_2 = -x$$

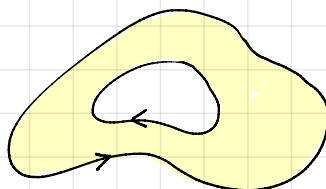
→ lokal hypo-/hypergraph.

ii) $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$

Frage: gleich wie i)



Sei Ω ein C_{pw}^1 Gebiet. Der Rand von Ω wird parametrisiert, so dass Ω zur linken Seite liegt.



IV.4.4 Satz von Green (allgemein)

Sei Ω ein Gebiet der Klasse C_{pw}^1 und seien g und h zwei Funktionen der Klasse C^1 auf $\bar{\Omega}$. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} d\mu = \int_{\partial\Omega} g dx + h dy$$

IV.4.5 Alternative Formulierung des Satz von Green $\rightarrow$ wir sind noch in $\mathbb{R}^2$!

V ist C^1 Vektorfeld auf einem C_{pw}^1 Gebiet Ω

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

! $\text{rot } V = \frac{\partial}{\partial x_1} v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} v_1$ curl

Satz von Green: $\int_{\Omega} \text{rot } V = \int_{\partial\Omega} \langle V, \vec{j} \rangle dt$

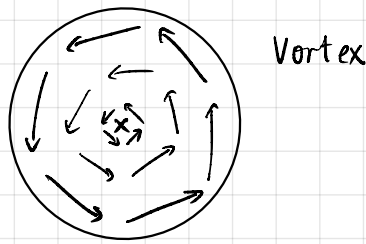
Zirkulation von V

$$\lambda_V = v_1 dx + v_2 dy$$

IV.4.6 Beispiel

$\Omega = B_1(0)$ ist ein C^1 Gebiet, da es gesehen werden kann als Ellipse mit $\alpha = \beta = 1$

$$V = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



$$\text{rot } V = \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) = 1 + 1 = 2$$

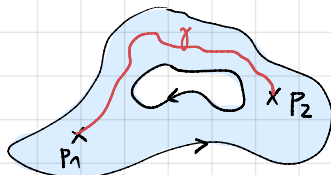
$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} \text{rot } V \, d\mu &= \int_{B_1(0)} 2 \, d\mu \stackrel{2\mu(B_1(0))}{=} \int_{\partial B_1(0)} V \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt \quad \text{mit } \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi] \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \underline{\underline{2\pi}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu(B_1(0)) = \pi$

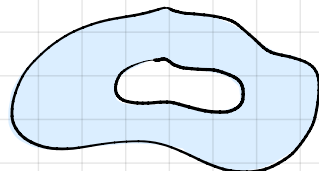
IV.4.7 Definition

Sei Ω ein Gebiet der Klasse C_{pw}^1 . Man sagt dass Ω

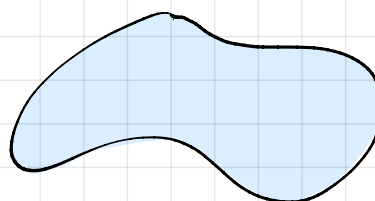
- i) **wegzusammenhängend** ist, falls zu je 2 Punkte P_1 & P_2 in Ω
 $\exists$ ein stetiger Weg γ mit $\gamma(0) = P_1$ und $\gamma(1) = P_2$ $\gamma(t) \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1]$



- ii) Ω heißt **einfach** wegzusammenhängend, wenn $\partial\Omega$ nur eine Komponente hat.



nicht e.z.h.



e.z.h.

keine Löcher!

IV.4.8 Satz von Poincaré

Sei Ω ein Gebiet der Klasse C_{pw}^1 , welche einfach zusammenhängend ist.

Sei V ein C^1 Vektorfeld auf $\bar{\Omega}$.

Dann sind folgende 2 Aussagen äquivalent:

i) V ist konservativ (d.h. $\exists f$ s.d. $V = \nabla f \iff \oint_{\gamma} V = 0$)
Satz 7.4.2 (Sk)

ii) $\operatorname{rot} V = 0$

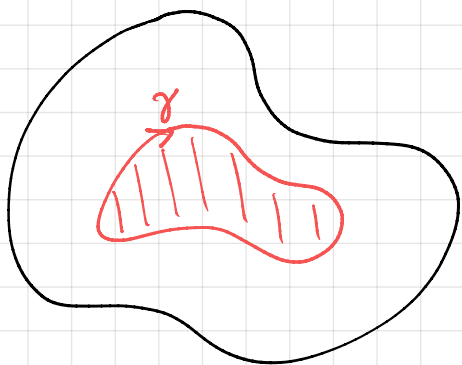
Beweis:

i) $\Rightarrow$ ii) Warum? $\rightarrow$ Korollar von dem Satz von Schwartz

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \operatorname{rot} V = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0$$

ii) $\Rightarrow$ i) Warum?

Frage (neu gestellt): gleicht die Zirkulation von V γ entlang 0?



$\gamma = \partial \omega_\gamma$ $\omega_\gamma \subset \Omega$
da Ω kein Loch hat

Satz von Green $\Rightarrow$ $0 = \int_{\omega_\gamma} \operatorname{rot} V = \int_{\gamma} V \cdot \vec{j} \, dt$
 $\Rightarrow V = \nabla f \quad \square$