Lina De Windt - ldewindt@ethz.ch

F.S. Bsp. $\phi(x,y) := (x, y, \psi(x,y))$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

für $(x,y) \in B_1(0)$ und $\psi(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-r^2}$

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right| = \sqrt{1 + |\Delta \psi|^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \psi = \left(-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}, -\frac{2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)^T$$

$$|\nabla \psi|^2 = \frac{r^2}{1-r^2} \Rightarrow 1 + |\nabla \psi|^2 = \frac{1}{1-r^2}$$

$$\mu_2(\phi(B_1(0)) = \int_{B_1(0)} \frac{1}{1-x^2-y^2} \, d\mu = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \, dr \, d\varphi = 2\pi \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 = 2\pi$$

$$\shortparallel$$

$$\text{Area}(S)$$

IV.6.5 Definition (Sk. 8.6.3)

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ lokale Immersion.

Sei $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ beschränkt, Jordan messbar. Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

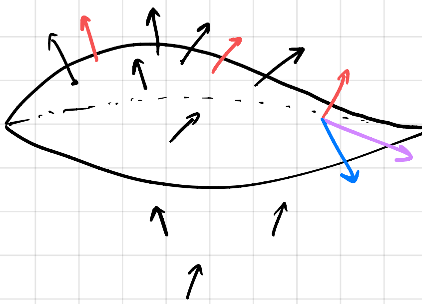
Das Integral von f auf $S = \phi(\Omega)$

$$\boxed{\int_S f \, d\sigma = \int_\Omega f \circ \phi \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right| d\mu}$$

IV.6.6 Beispiel

$\phi(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$

$S = \phi(B_1(0))$ $\quad \displaystyle\int_S \text{Höhe} \, d\sigma = \int_{B_1(0)} \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}} \, d\mu = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \pi$ $\quad \square$



$$n = \frac{\partial_x \phi \times \partial_y \phi}{|\partial_x \phi \times \partial_y \phi|}$$ ist der Einheitsnormalvektor zu der Fläche $\phi(U)$

$K = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig

IV.6.8 Definition

Der Fluss von K durch S gleicht $\int_S K \cdot n \, do = \int_\Omega K \circ \phi \cdot n \, |\partial_x \phi \times \partial_y \phi| \, d\mu$

$$= \int_\Omega K \circ \phi \cdot (\partial_x \phi \times \partial_y \phi) \, d\mu$$

IV.7 Der Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

$$\text{rot } V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \quad \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \text{ "}= \nabla \times V\text{" } = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

$= 0 \iff V$ ist ein Gradient

Bem: alle Vektoren können in einer Σ von Rot und Grad zerlegt werden!

IV.7.1 Satz von Stokes (Sk. 8.7.1)

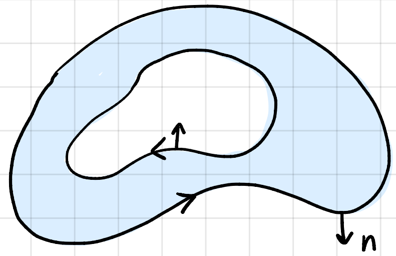
Sei $V \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, Sei $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ lokale Immersion.

Sei $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan messbar.

$$\int_{S=\phi(\Omega)} \text{rot } V \cdot n \, do = \int_\Omega (\text{rot } V) \circ \phi \, (\partial_x \phi \times \partial_y \phi) \, d\mu$$

$= \int_{\partial\Omega} V \circ \phi \cdot \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma) \, dt =$ Die Zirkulation von V ∂S entlang.

IV.8 Der Satz von Gauss



Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ ein Gebiet der Klasse C^1.

Der Einheitsnormalvektor zum Rand ist der Einheitsvektor, welcher orthogonal zum Rand ist und ausserhalb des Bereiches zeigt.

Sei $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ der Klasse C^1

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} V_2$$

Divergenz von V

IV.8.1 Satz von Gauss in 2D

Die Längeform

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} V \, d\mu = \int_{\partial\Omega} V(\gamma) \cdot n \underbrace{\left| \frac{\partial \gamma}{dt} \right| dt}}$$

Fluss von V durch $\partial\Omega$ unabhängig von der Parametrisierung.

weil: $\dfrac{\partial \gamma (t \circ s)}{\partial s} = \dfrac{\partial \gamma \circ t}{dt} \cdot \dfrac{dt}{ds}$

Beweis vom Satz IV.8.1

$$W = \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

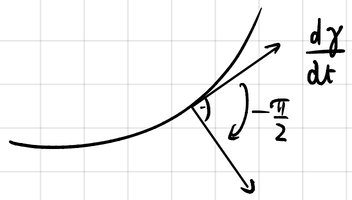
$$\operatorname{rot} W = \frac{\partial}{\partial x} W_2 - \frac{\partial}{\partial y} W_1 = \frac{\partial}{\partial x} V_1 + \frac{\partial}{\partial y} V_2 = \operatorname{div} V$$

$$\int_\Omega \operatorname{rot} W \, d\mu \underset{\text{Green}}{=} \int_{\partial\Omega} W(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\frac{d\gamma}{dt} \, dt}_{\text{orientiertes Längenelement}}$$

$$W(\gamma) \frac{d\gamma}{dt} = \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\gamma_2}{dt} \\ -\frac{d\gamma_1}{dt} \end{pmatrix}$$

Frage: was ist

$$\begin{pmatrix} \frac{d\gamma_2}{dt} \\ -\frac{d\gamma_1}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\gamma_1}{dt} \\ \frac{d\gamma_2}{dt} \end{pmatrix}$$



$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{mit } \theta = -\frac{\pi}{2} \quad \rightsquigarrow \text{ Rotation um } -\frac{\pi}{2}.$$

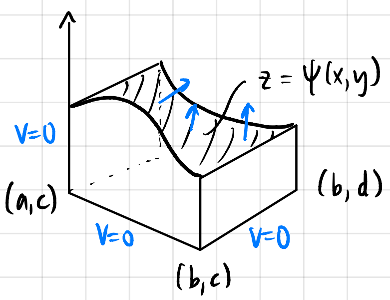
$$\begin{pmatrix} \frac{d\gamma_2}{dt} \\ -\frac{d\gamma_1}{dt} \end{pmatrix} = n \cdot \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|$$

$$\int_\Omega \operatorname{div} V \, d\mu = \int_{\partial\Omega} V \cdot n \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt \qquad \square$$

IV.8.2 Satz von Gauss in 3D

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

Sei $\phi(x,y) = (x, y, \psi(x,y))$ mit $\psi \in C^1([a,b] \times [c,d], \mathbb{R}_+)$



$$\Omega_\psi = \{(x,y,z) \text{ mit } (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \quad 0 \le z \le \psi(x,y)\}$$

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} V_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} V_3$$

$V \equiv 0$ für $z \le 0$ und für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus [a,b] \times [c,d]$

$$\boxed{\underbrace{\int_{\Omega_\psi} \operatorname{div} V \, d\mu}_{\text{3D-Integral}} = \int_{S = \phi([a,b]\times[c,d])} V \, n \, do = \underbrace{\int_{[a,b]\times[c,d]} V \circ \phi \cdot (\partial_x \phi \times \partial_y \phi) \, d\mu_2}_{\text{2D-Integral}}}$$

Beweis von dem Satz von Gauss:

für $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial}{\partial x_3} V_3 \in C^0$$

bez. der 3. Dim.

$$\int_{\Omega_\psi} \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \, d\mu \underset{\text{Fubini}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\underset{Q}{\overset{\shortparallel}{[a,b]\times[c,d]}}} \left(\int_0^{\psi(x,y)} \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \, dx_3 \right) d\mu_2 = \int_Q V_3(x,y,\psi(x,y)) \, d\mu_2$$

$$\partial_x \phi \times \partial_y \phi = \begin{pmatrix} -\partial_x \psi \\ -\partial_y \psi \\ 1 \end{pmatrix}$$

$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3 \end{pmatrix}$ $\qquad V(\phi) \cdot \partial_x \phi \times \partial_y \phi = V_3(x, y, \psi(x,y))$

$$\int_S V \circ \phi \cdot n \, d\sigma = \int_Q V_3(x, y, \psi(x,y)) \, d\mu_2$$

$\square$

Ende des Stoffes der Ana2-Vorlesung. :)