§2. Lineare Räume / Vektorräume

16.10.20

§2.1 Grundlagen:

Def: Ein reeller /complexer Vektorraum / linearer Raum V ist eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

Operationen
- "+" Addition: $a, b \in V$ dann $a+b \in V$
- "·" Multiplikation mit Skalaren (reelle /complexe Zahlen):

$\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in V$ dann $\alpha a \in V$

$\alpha \in \mathbb{C}$, $a \in V$ dann $\alpha a \in V$

Eigenschaften:

der Addition
- (A1) $a+b = b+a$ für alle $a, b \in V$
- (A2) $(a+b)+c = a+(b+c)$ für alle $a, b, c \in V$
- (A3) Es gibt $0 \in V$ sodass $a+0 = a$ für alle $a \in V$
- (A4) Für jedes $a \in V$ gibt es das Inverseelement $(-a) \in V$ s.d. $a+(-a) = 0$

der Multiplikation
- (M1) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in V$
- (M2) $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in V$ (Distributivgesetz)
- (M3) $1 \cdot a = a$ für alle $a \in V$

Bsp:

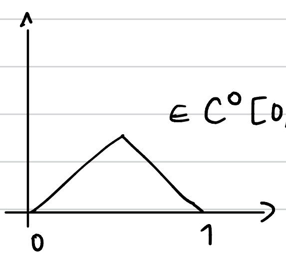
1) $V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ lin. Raum

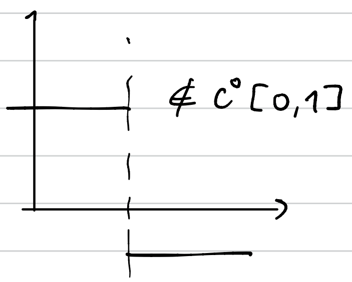
2) $V = \mathbb{R}^n = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ reeller lin. Raum

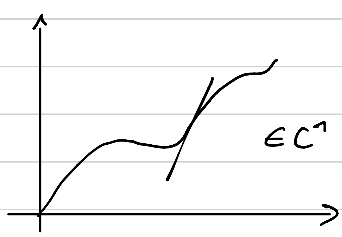
$V = \mathbb{C}^n = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C} \right\}$ complexer lin. Raum

3) $V = C^s[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} ;\ f^{(k)} \text{ stetig für } k = 0, 1, 2, \dots, s \}$

z.B.







$C^\infty[a,b] = \{ f:[a,b] \to \mathbb{R},\ f\ \infty\text{-mal stetig differenzierbar} \}$

z.B. $\sin, \cos \in C^\infty[0,1]$

$C^\infty \subset \dots \subset C^{s+1} \subset C^s \subset \dots \subset C^1 \subset C^0$

Addition von Funktionen: $f, g \in V$: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f^{(k)}, g^{(k)}$ stetig für alle $k = 0, 1, \dots, s$

$f+g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ für alle $t \in [a,b]$

$t \longmapsto f(t) + g(t)$

liegt das in V?

$\Rightarrow$ Klar: $f+g \in V$ da $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$

da $(f+g)^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) + g^{(k)}(t)$ für alle $t \in [a,b]$

⚠ $f(t)$ = reelle Zahl, 1 Komponente
f = Funktion mit 3 Komponenten
} nicht verwechseln!

$C^s[a,b]$ und $C^\infty[a,b]$ sind lin. Räume

4) $V = L^2[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R},\ \int_a^b |f(t)|^2\, dt \text{ existiert} \}$

$\Rightarrow$ Menge der quadratischen integrierbaren Funktionen.

5) $V = P_n = \{ P \text{ Polynome vom Grad} \le n-1 \}$

$p \in P_n$: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

$a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ (Koeffizienten des Polynoms)

P_n linearer Raum bezüglich "+", "·" mit Skalare.

6) $V = \ell = \{ (x_n) \text{ konvergent} \}$

7) Die Menge der Lösungen des homogenen, linearen Differentialgleichungssystems:

$$\underline{y}' = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{y} \quad \text{ist ein linearer Raum.}$$

Weitere Eigenschaften: sei V ein lin. Raum, $a, b \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

(1) aus $a + b = a$ folgt $b = 0$
(2) $\alpha \cdot 0 = 0 \in V$
(3) $0 \cdot a = 0 \in V$

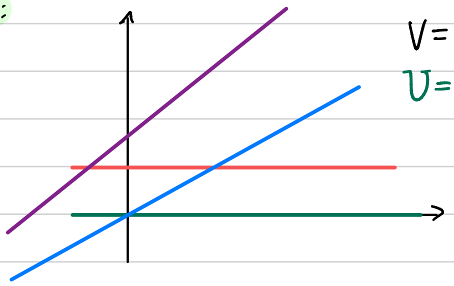
Def: Sei V ein lin. Raum und $\overset{\text{Nullmenge}}{\emptyset} \neq U \subset V$
U heisst **Unterraum von V** falls:

$$\begin{cases} x, y \in U \Rightarrow x + y \in U \\ \alpha \text{ Skalar}, x \in U \Rightarrow \alpha x \in U \end{cases}$$

Bem: Nehme $\alpha = 0$ (Skalar), $x \in U$ Unterraum von V

Dann: $\underbrace{0 \cdot x}_{=0} \in U \Rightarrow 0 \in U$

Bsp:



$V = \mathbb{R}^2$

$U = \underbrace{\left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}}_{\text{Unterraum von } \mathbb{R}^2} \subset V$

$\Rightarrow \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2$ Unterraum

$\tilde{U} = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset V$ aber kein Unterraum da $\underline{0} \notin \tilde{U}$

— auch $\subset V$ aber kein Unterraum
— ist $\subset V$ und Unterraum von $\mathbb{R}^2$ (weil es durch 0 geht.)

$\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n$ Unterraum.

Bsp. 2: $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots \subset P_n \subset P_{n+1} \subset \dots \subset P$
$\subset C^\infty \subset \dots \subset C^{n+1} \subset C^s \subset C^1 \subset C^0 \subset L^2$

$\uparrow$ Unendlich oft differenzierbare Funktionen.

$P = \{\text{Polynome beliebigen Grades}\}$

Bsp 3: (positiv) $U = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,;\, \underline{x} = \begin{bmatrix} x_3 - x_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ mit } x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

Behauptung: $U \subset \mathbb{R}^4$ Unterraum $+$ aus $\mathbb{R}^4$, $\cdot$ mit Skalare aus $\mathbb{R}$.

Beweis: Nehmen $\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{x} \in U$ beliebig.

$$\alpha \underline{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_3 - x_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_3 - \alpha x_4 \\ \alpha x_3 + \alpha x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{bmatrix} t_3 - t_4 \\ t_3 + t_4 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \in U$$

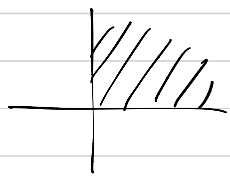
notiere $t_3 = \alpha x_3 \quad t_4 = \alpha x_4$

$\underline{x}, \underline{y} \in U$ beliebig:

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} x_3 - x_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_3 - y_4 \\ y_3 + y_4 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_3 - x_4) + (y_3 - y_4) \\ (x_3 + x_4) + (y_3 + y_4) \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{bmatrix} \in U$$

$\Rightarrow$ Somit ist U ein Unterraum von V

Bsp: (negativ) $X = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\; x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0 \right\}$



$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in X$, $\alpha = -1 \Rightarrow \alpha \underline{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin X$

$\Rightarrow$ X kein lin. Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

ここなんて書いてあった？

Bsp: (neg.) $X = \{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\; x_1 x_2 \geq 0 \}$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\underline{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x}, \underline{y} \in X$

$\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin X \rightarrow X$ kein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^2$

Bem: Sei U lin. Unterraum von lin. Raum V.

$\underline{u}, \underline{v} \in U \Rightarrow \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} \in U$ mit α, β Skalare

↳ jede beliebige lin. Kombination von $\underline{u}, \underline{v} \in U$.

Bsp: Sei $\underline{A}$ eine $m \times n$ Matrix, $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = x_1 \underline{a_1} + x_2 \underline{a_2} + \dots + x_n \underline{a_n} \in \mathbb{R}^m$$

$$= \text{lin. Kombination von Spalten von } \underline{\underline{A}}.$$

$$\text{Bild}(\underline{\underline{A}}) = \{ \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} \in \mathbb{R}^m$$

= Menge aller lin. Kombinationen der Spalten von $\underline{\underline{A}}$.

linearer Raum: $\text{Bild}(\underline{\underline{A}}) \in \mathbb{R}^m$ Unterraum!

$\alpha \in \mathbb{R}$, $b \in \text{Bild}(\underline{\underline{A}})$

$\Downarrow$

Es gibt einen $x \in \mathbb{R}^n$ s.d. $\underline{b} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}$ $\quad | \cdot \alpha$

$$\alpha \underline{b} = \alpha (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}) = \underline{\underline{A}} (\alpha \underline{x}) \Rightarrow \alpha \underline{b} \in \text{Bild}(A)$$

$\underline{b_1}, \underline{b_2} \in \text{Bild}(\underline{\underline{A}}) \Rightarrow$ es gibt $\underline{x_1} \in \mathbb{R}^n$ s.d. $\underline{b_1} = \underline{\underline{A}} \underline{x_1}$

$\underline{x_2} \in \mathbb{R}^n$ s.d. $\underline{b_2} = \underline{\underline{A}} \underline{x_2}$

$$\Rightarrow \underline{b_1} + \underline{b_2} = \underline{\underline{A}} \underline{x_1} + \underline{\underline{A}} \underline{x_2} = \underline{\underline{A}} (\underline{x_1} + \underline{x_2})$$

$$\Rightarrow \underline{b_1} + \underline{b_2} \in \text{Bild}(\underline{\underline{A}})$$

$\Rightarrow$ Behauptung wahr.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \cup \quad &\qquad \cup \\ \underline{x} &\longmapsto \underline{\underline{A}} \underline{x} \end{aligned} \qquad \mathcal{A}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}$$

$$\left(\mathbb{R}^n \xrightarrow{\underline{\underline{A}}} \mathbb{R}^m \right)$$

Bsp:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} ; \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Bild}(\underline{\underline{A}}) = \{ \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} ; \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} ; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\subset \mathbb{R}^3$ Unterraum, selber lin. Raum.

Man sagt auch: Bild $(\underline{A})$ ist aufgespannt / erzeugt von den Spalten $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$

Bsp: $V = C[-1,1] = \{ f: [-1,1] \to \mathbb{R}, f \text{ stetig} \}$

$U = P_n[-1,1] = \{ p: [-1,1] \to \mathbb{R}, \ p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$ mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$

$U \subset V$ Unterraum von V und jedes Element von U lässt sich schreiben als lineare Kombination von $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1} \in U$

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x^2) = x^2, \dots, p_{n-1}(x) = x^{n-1} \quad \text{(Monome)}$$

Sei $p \in U$ beliebig $\to p: [-1,1] \to \mathbb{R}, \ p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$ mit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots a_{n-1} p_{n-1}$ da:

$\to p(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \dots + a_{n-1} p_{n-1}(x)$ für $x \in [-1,1]$ beliebig.

$\Rightarrow U$ ist aufgespannt / erzeugt von den Monomen $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$

Sei V lin. Raum, $v_1, \dots, v_n \in V$

Def: $U = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = \{ x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \in V \}$ lin. Unterraum von lin. Raum V

$\Rightarrow U$ ist aufgespannt / erzeugt von $v_1, \dots, v_n \in V$

Bsp: $P_n = \operatorname{span}\{ p_0, p_1, \dots, p_{n-1} \}$

$n=5$: $P_5 = \operatorname{span}\{ p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 \}$

Bem: $q_0 = p_0, \ q_1 = p_1$

$q_2(x) = \frac{2}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} p_2(x) - \frac{1}{2} p_0(x) \Rightarrow q_2 = \frac{3}{2} p_2 - \frac{1}{2} p_1$

$q_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = \frac{5}{2} p_3(x) - \frac{3}{2} p_1(x) \Rightarrow q_3 = \frac{5}{2} p_3 - \frac{3}{2} p_1$

$q_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} = \frac{35}{8} p_4(x) - \frac{15}{4} p_2(x) + \frac{3}{8} p_0(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow q_4 = \frac{35}{8} p_4 - \frac{15}{4} p_2 + \frac{3}{8} p_0$$

$q_0, q_1, \dots, q_4$ Legendre Polynome

Ziel: überprüfen: $\underbrace{\operatorname{span}\{p_0, \dots, p_4\}}_{P_5} = \underbrace{\operatorname{span}\{q_0, q_1, \dots, q_4\}}_{B}$

Ziel: $P_5 = B$ zeigen.

$\supseteq$ (P_5 ist eingeschlossen in B)
$\subseteq$ (B ist eingeschlossen in P) P_5 ist identisch zu B.)

Zeige: $\supset$: Sei $q \in B = \operatorname{span}\{q_0, q_1, \dots, q_4\}$ beliebig $\Rightarrow$

$$q = c_0 q_0 + c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3 + c_4 q_4$$

$$= c_0 p_0 + c_1 p_1 + c_2\left(\frac{3}{2}p_2 - \frac{1}{2}p_0\right) + c_3\left(\frac{5}{2}p_3 - \frac{3}{2}p_1\right) + c_4\left(\frac{35}{8}p_4 - \frac{15}{4}p_2 + \frac{3}{8}p_0\right)$$

$$= \left(c_0 - c_2\frac{1}{2} + c_4\cdot\frac{3}{8}\right)p_0 + \left(c_1 - c_3\frac{2}{2}\right)p_1 + \left(c_2\frac{3}{2} - c_4\frac{15}{4}\right)p_2 + c_3\frac{5}{2}p_3 +$$

$$+ c_4 \frac{35}{8} p_1$$

also q = lin. Kombination von $p_0, p_1, \dots, p_4 \rightarrow q \in P_5$

$\Rightarrow$ Somit ist $B \subset P_5$ bewiesen.

Zeige: $\subset$: Sei $p \in P_5 = \operatorname{span}\{p_1, p_2, \dots, p_4\}$ beliebig.

$$\Rightarrow p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$

Ziel: Zeigen, dass $p \in B$, d.h. p = lin. Komb. von $q_0, \dots, q_4$.
Das ist klar, falls wir jeden von $p_0, p_1, \dots, p_4$ als lin. Komb. von $q_0, q_1, \dots, q_4$ schreiben können.

$q_0 = p_0$

$q_1 = p_1$

$q_2 = \frac{3}{2}p_2 - \frac{1}{2}p_0$ LGS in Unbekannten $p_0, p_1, \dots, p_4$

$q_3 = \frac{5}{3}p_3 - \frac{3}{2}p_1$ lösen $\exists$ z.z.: p_j = lin. Komb. von $q_0, q_1, \dots, q_4$

$q_4 = \frac{35}{8}p_4 - \frac{15}{4}p_2 + \frac{3}{8}p_0$ $\Rightarrow$ $\subset$ bewiesen.

Somit ist $P_5 = B$ Q.E.D.

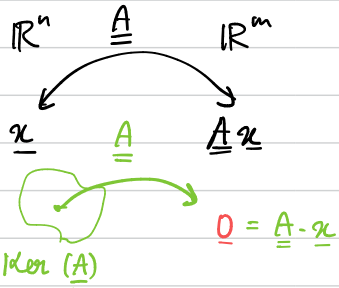
Def: Sei V lin. Raum
$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in V$ heisst **Erzeugendensystem** in V, falls jedes $b \in V$ sich schreiben lässt als lin. Kombination von $v_1, \dots, v_n$

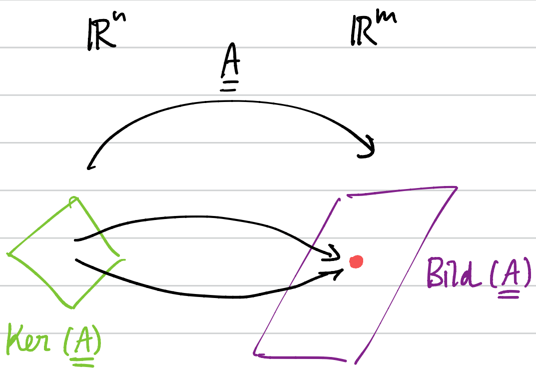
Bsp: Sei $\underline{\underline{A}}$ eine $m \times n$ Matrix

Kern von $\underline{\underline{A}}$: $\operatorname{Ker}(\underline{\underline{A}}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \text{ sodass } \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0} \}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ \cup & & \cup \\ \underline{x} & \longmapsto & \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \end{array} \qquad \mathcal{A}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \cup & & \cup \\ \operatorname{Ker}(\underline{\underline{A}}) & & \operatorname{Bild}(\underline{\underline{A}}) \end{array}$$





$x \in \operatorname{Ker}(\underline{\underline{A}}) \iff \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$

$\operatorname{Ker}(\underline{\underline{A}})$ = Menge der Lösungen des homogenen LGS $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$

$\operatorname{Ker}(\underline{\underline{A}}) \subset \mathbb{R}^n$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$

$\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \operatorname{Ker}(\underline{\underline{A}}) \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 = \underline{0}\ ,\ \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2 = \underline{0}$

$$\underline{\underline{A}}\,(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 + \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2 = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

$\alpha x_1 \in \operatorname{Ker}(\underline{\underline{A}})$ da $\underline{\underline{A}}\,(\alpha \underline{x}_1) = \alpha \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 = \alpha \underline{0} = \underline{0}$

Bsp:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

(leere Menge = nicht !)

Gauss - Elimination:

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - b_2 - b_1 \end{matrix}$$

$\uparrow x_2$ $\uparrow x_4$ freie Parameter

あ,2,3?

Kompatibilitätsbedingung: $b_3 - b_2 - b_1 = 0$ erfüllt für $b = 0$

Lösung von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ ist

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}\,(\underline{\underline{A}}) = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

Wähle $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ $\Rightarrow$ spezielle Lösung: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Wähle $x_2 = 0$, $x_4 = 1$ $\Rightarrow$ spezielle Lösung: $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_4 \\ 0 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Somit ist $\mathrm{Ker}\,(\underline{\underline{A}})$ aufgespannt von $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{Ker}\,(\underline{\underline{A}}) = \mathrm{span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_2} \right\} = \mathrm{span}\,\{ v_1, v_2 \}$$

Bsp: Bild $(\underline{\underline{A}})$ = ?

$\underline{b} \in$ Bild $(\underline{\underline{A}}) \iff \underline{b} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ hat Lösungen

$\iff$ Kompatibilitätsbedingung erfüllt

$\iff b_3 - b_2 - b_1 = 0$

$$\text{Bild}(\underline{\underline{A}}) = \left\{ \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1+b_2 \end{bmatrix} \text{ mit } b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1+b_2 \end{bmatrix} = b_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{w}_1} + b_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{w}_2}$$

oder wähle
$b_1 = 1$, $b_2 = 0$
$b_1 = 0$, $b_2 = 1$

Somit: Bild $(\underline{\underline{A}})$ = span $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\} \subset \mathbb{R}^3$

V6

23.10.20

Bem: Für $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

Wähle die freien Parameter x_2, x_4 als 0:

$x_2 = 0 \qquad x_4 = 0 \quad \rightarrow$ wir bekommen eine partikuläre Lösung

$$\underline{x}^P = \begin{bmatrix} 2b_1 - \frac{1}{2}b_2 \\ 0 \\ \frac{1}{4}b_2 - \frac{1}{2}b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Somit lässt sich die allgemeine Lösung von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ schreiben als

$$\underline{x} = \underline{x}^P + \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2$$

↳ allgemeine Lösung von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$

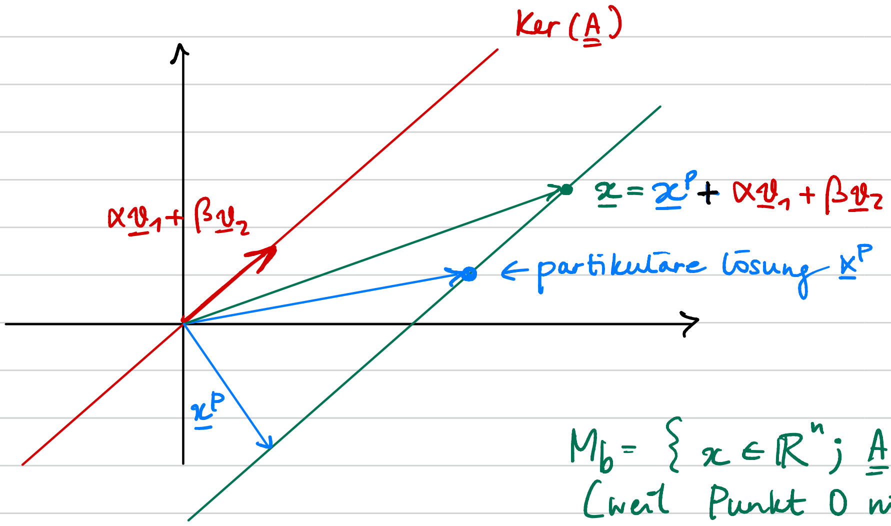
partikuläre Lösung

Beweis:

$\Rightarrow$: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}^P + \underline{\underline{A}} \cdot (\alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2) = \underline{b} + \alpha \underbrace{\underline{\underline{A}} \underline{v}_1}_{0} + \beta \underbrace{\underline{\underline{A}} \underline{v}_2}_{0} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$

$\Leftarrow$: Nehme $\underline{x}$ Lösung von $\left.\begin{matrix} \underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{b} \\ \underline{\underline{A}} \underline{x}^P = \underline{b} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{A}} (\underline{x} - \underline{x}^P) = 0 \Leftrightarrow$

$\underline{x} - \underline{x}^P \in \mathrm{Ker}(\underline{\underline{A}}) \Leftrightarrow \underline{x} - \underline{x}^P = \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{x}^P + \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2$



$M_b = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n ; \underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{b} \}$ ist kein lin. Raum (weil Punkt 0 nicht beinhaltet ist)

Bspe von erzeugende Systeme:

1) $\mathbb{R}^n$: $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \underline{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$\{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots \underline{e}_n \}$ erzeugend für $\mathbb{R}^n$

2) $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ Matrix von Rang n $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{b}$ hat eine einzige Lösung für jedes $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \{ \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \}$ erzeugend in $\mathbb{R}^n$

$\underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \underline{b} = \underbrace{x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n}_{\text{lin. Kombination von } \underline{\underline{A}} \text{ und } \underline{x}}$

3) Monome $P_0 = 1$, $P_1(1) = t$, ..., $P_{n-1}(t) = t^{n-1}$

$\{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\}$ ist erzeugend für P_n

$p \in P_n \Leftrightarrow p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}$ = lin. Komb. von Monomen

4) $\mathbb{R}^3 \ni \underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$ ist erzeugend für $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \text{ beliebig.}$$

$$\underline{x} = x_2 \underline{a}_2 + \frac{1}{2} x_1 \underline{a}_3 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_4$$

Bem: es reichen nur $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_3$ um jedes $x \in \mathbb{R}^2$ darzustellen.

Bsp: $P = \{\text{alle Polynome}\}$

Für P gibt es keine endliche Menge von Polynomen, die den lin. Raum P erzeugen.

Def: ein linearer Raum V heisst endlich dimensional, wenn es eine endliche Menge $V_1, \dots, V_z \in V$ gibt, sodass $\{\underline{V}_1, \dots \underline{V}_n\}$ erzeugend für V ist.

Bsp: $\mathbb{R}^n$, P_n sind endlichdimensional

P, C^k, L^2 sind nicht endlichdimensional.

Frage: Kann man ein Erzeugendes System $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ zu einer möglichst kleinen Menge $\{\underline{v}_{j1}, \dots, \underline{v}_{jr}\}$ (Untermenge von $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$), sodass:

$$\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = \operatorname{span}\{\underline{v}_{j1}, \dots, \underline{v}_{jr}\}$$

Bem: Fälle:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + \dots + x_n \underline{v}_n = \underline{0} \\ \text{falls } x_n \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{v}_n = \frac{-x_1}{x_1} \cdot \underline{v}_1 \cdot \frac{-x_2}{x_n} \underline{v}_2 \cdots - \frac{-x_{n-1}}{x_n} \underline{v}_{n-1}$$

($x_1 \sim x_n$ sind Koeffizienten)

→ dann kann man auf v_n verzichten.

Def: $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ heissen **linear unabhängig**, falls

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

schauen, ob solche x existieren.

sonst heissen $v_1, \dots, v_n$ **linear abhängig**.

Bsp: 1) $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig.

$$x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{matrix}$$

2) $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig ?

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

$a_1, a_2, \dots, a_k$ sind lin. unabhängig dann und nur dann

Wenn Das homogene System $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ nur die triviale Lösung hat.

$\Leftrightarrow$ Rang $(\underline{\underline{A}}) = k \le n$ (sonst gibt es freie Variablen → d.h. es existieren auch nicht triviale Lösungen)

3) $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ Monome sind lin. unabhängig.

Beweis: Sei $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ mit

$x_1 P_0 + x_2 P_1 + \dots + x_n P_{n-1} = 0$ Polynom 1

$0(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$

$x_1 P_0(t) + x_2 P_1(t) + \dots + x_n P_{n-1}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$

Skalar

⊛ Begriff "Polynome":

Polynom 0 → Polynom ist konstant 0

$P = 5$

Polynom 5 $=$ konstant 5

Polynom mit Grad 5 $= ax^4 + bx^3 + \dots + \dots$

$$x_1 1 + x_2 t + \dots + x_n t^{n-1} = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ es gilt auch für $t=0$

$\Rightarrow x_1 \cdot 1 + 0 + \dots + 0 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0$

Somit $x_2 P_1 + x_3 P_2 + \dots + x_n P_{n-1} = 0$

$$x_2 t + x_3 t^2 + \dots + x_n t^{n-1} = 0 \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ P}}{t}\,\underbrace{(x_2 + x_3 t + \dots + x_n t^{n-2})}_{z \in P} = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Polynomdivision durch P_1:

$\Rightarrow z = 0$

$\Rightarrow x_2 + x_3 t + \dots + x_n t^{n-2} = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$

für $t = 0 \Rightarrow x_2 + 0 + \dots + 0 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 0$

oder analytisch: $\left.\begin{array}{l} t z(t) = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \\ z \text{ stetig} \end{array}\right\} \Rightarrow z(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$

Bsp: Die Funktion $f(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$
$g(t) = \cos^2 t$
$h(t) = \cos 2t$

$f, g, h \in C$ sind linear abhängig, weil:

$$\cos 2t = 1 - 2\cos^2 t \quad \text{für alle } t$$
$$\left(g = \tfrac{1}{2} f + \tfrac{1}{2} h\right)$$

Def: Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem eines linearen Raumes V heisst **Basis in V.**

Bsp 1) Kanonische / Standard Basis in $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots \underline{e}_n, \text{ mit } \underline{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j\text{-te Komponente}$$

2) $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ Monome bilden eine Basis in P_n.

3) $q_1, q_2, q_3 \in P$ $\quad q_1(t) = 1+t^2$
$q_2(t) = 1-t^2$
$q_3(t) = 1+t^2+t^4$

klar: $\begin{cases} q_1 = P_0 + P_2 \\ q_2 = P_0 - P_2 \\ q_3 = P_0 + P_2 + P_4 \end{cases}$

Frage: sind q_1, q_2, q_3 lin. unabhängig?

Seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sodass $x_1 q_1 + x_2 q_2 + x_3 q_3 = 0 \in P$

q's ersetzen:

$$x_1(P_0+P_2) + x_2(P_0-P_2) + x_3(P_0+P_2+P_4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 P_0 + x_1 P_2 + x_2 P_0 - x_2 P_2 + x_3 P_0 + x_3 P_2 + x_3 P_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3) P_0 + (x_1 - x_2 + x_3) P_2 + x_3 P_4 = 0 \Rightarrow$$

P_0, P_2, P_4 lin. unabhängig:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{LGS ! ☺}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rang $(\underline{\underline{A}}) = 3 \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ hat nur die triviale Lösung

$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$\Rightarrow q_1, q_2, q_3$ lin. unabhängig.

Bem: $\text{span}\{q_1\ q_2\ q_3\} = \text{span}\{P_0, P_2, P_4\} = S_5$ = Raum der geraden Polynome vom Grad ≤ 4

Wir sehen in S_5 zwei Basen:

$\{P_0, P_2, P_4\}$ und $\{q_1, q_2, q_3\}$

Theorem: Verschiedene Basen für den lin. Raum V bestehen aus gleich viele Vektoren (deren Anzahl die Dimension des Raumes V ist).

Beweis: <u>Hinweis:</u> $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_\ell\}$.
nehme $w_1, \dots, w_k \in V$ lin. unabhängig. $\Big\}$ Dann $k \le \ell$.

Für jedes $j = 1, 2, \dots, k$:
$w_j \in V = \text{span}\{v_1, \dots, v_\ell\} \Rightarrow w_j = \alpha_{1j} \cdot v_1 + \alpha_{2j} \cdot v_2 + \dots + \alpha_{\ell j} \cdot v_\ell$

mit $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{\ell j} \in \mathbb{R}$

Somit $\underline{\underline{A}} = [\alpha_{ij}]$ $\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, \ell \\ j = 1, 2, \dots, k \end{matrix}$ $\ell \times k$ Matrix.

$w_1, \dots, w_k \in V$ lin. unabhängig $\Rightarrow$
aus $x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_k w_k = 0$ folgt $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$.

Schreibe $$\sum_{j=1}^{k} x_j w_j = \sum_{j=1}^{k} x_j \left(\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j \right) v_i$$

Betrachten wir $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j = 0 \\ i = 1, 2, \dots, \ell \end{array} \right.$

Sei $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$ Lösung von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ $\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} x_j w_j = 0 \overset{\text{lin. unabh.}}{\Rightarrow} x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$

Das bedeutet, $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ hat <u>nur</u> die triviale Lösung. $\Leftrightarrow$ Rang $(\underline{\underline{A}}) = k \le \ell$

($k > \ell \Leftrightarrow$ freie Variablen, was der lin. unabhängigkeit widerspricht).

Bsp: $V = \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim \mathbb{R}^n = n$
$\dim P_n = n$
$\dim S_5$ (aus Bsp) $= 5$

P, C^k, L^2 sind nicht endlich dimensional.

Theorem: Sei V ein lin. Raum, $\dim V = n$. Dann:
1) mehr als n Vektoren in V sind linear abhängig
2) weniger als n Vektoren in V sind nicht erzeugend
3) n Vektoren in V sind: lin unabhängig $\Leftrightarrow$ <u>erzeugend</u> (dann und nur dann).
$\hookrightarrow$ alle Vektoren in diesem Raum lassen sich schreiben als lin.

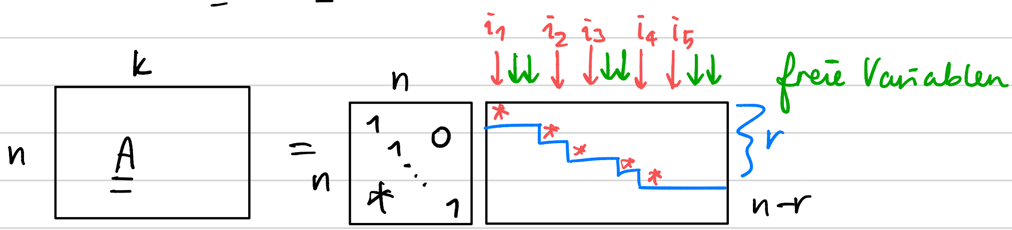
⊛ nicht erzeugend: es gibt Vektoren, die sich nicht beschreiben lassen als lin. Komb. von den gegebenen Vektoren.

Kombination von diesen n Vektoren.

§ 2.1 Fundamentalsatz der linearen Algebra – Teil I

Bem: $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$. Wie wählen wir daraus die maximale Anzahl lin. unabhängiger Vektoren?

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}:$$



$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{U}}\,\underline{x} = 0$$

dieselben Spalten von $\underline{\underline{A}}$ und von $\underline{\underline{U}}$ sind lin. unabhängig.
Spalten $i_1, i_2, i_3, \dots, i_r$ aus $\underline{\underline{A}}$ spannen Bild$(\underline{\underline{A}})$ auf.

Rang

$$\begin{cases} \underline{a}_{i_1} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{u}_{i_1} \\ \underline{a}_{i_2} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{u}_{i_2} \\ \dots \\ \underline{a}_{i_r} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{u}_{i_r} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{r} x_j \underline{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{r} x_j \cdot \underline{\underline{L}}\, \underline{u}_{ij} = \underline{\underline{L}} \sum_{j=1}^{r} x_j \underline{u}_{ij}, \quad \text{somit:}$$

$$\sum_{j=1}^{r} x_j \underline{u}_{ij} = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{L}} \sum_{j=1}^{r} x_j \underline{u}_{ij} = \underline{0} \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{r} x_j \underline{u}_{ij} = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$$

$\Rightarrow \underline{a}_{i1}, \dots, \underline{a}_{ir}$ lin. unabhängig.

Bem: Bild$(\underline{\underline{A}}) \neq$ Bild$(\underline{\underline{U}})$.

Bem: dim. Bild$(\underline{\underline{A}})$ = dim Bild$(\underline{\underline{U}}) = r$ = Rang

Bem: Was ist dim Ker$(\underline{\underline{A}})$? $\rightarrow k-r$

Zeige: dim Ker$(\underline{\underline{A}}) = k-r$

Beweis: Ker$(\underline{\underline{A}})$ muss zu einem LGS kommen.

Notiere $x_{f_1}, x_{f_2}, \dots, x_{f_{k-r}}$ freie Variablen.

Wie im Bsp. letzte Woche: wähle:

$$x_{f_1} = 1, \; x_{f_2} = 0, \dots, x_{f_{k-r}} = 0 \Rightarrow \underline{x}^1 \in \mathbb{R}^k \text{ Lösung von } \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$$

Wähle

$$x_{f_1} = 0, \; x_{f_2} = 1, \dots, x_{f_{k-r}} = 0 \Rightarrow \underline{x}^2 \in \mathbb{R}^k \text{ Lösung von } \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$$

....

$$x_{f_1} = 0, \; x_{f_2} = 0, \dots, x_{f_{k-r}} = 1 \Rightarrow \underline{x}^{k-r} \in \mathbb{R}^k \text{ Lösung von } \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$$

Dann $\mathrm{Ker}(\underline{\underline{A}}) = \mathrm{span}\{\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots \underline{x}^{k-r}\}$

Noch zu zeigen: $x^1, x^2, \dots, x^{k-r}$ lin. unabhängig.

Def: Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-r} \in \mathbb{R}$ sodass
$\alpha_1 \underline{x}^1 + \alpha_2 \underline{x}^2 + \dots + \alpha_{k-r} \underline{x}^{k-r} = 0$

zu zeigen: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-r} = 0$

Betrachte die Komponente f_i mit $i = 1, 2, \dots, k-r$ von

$$\alpha_1 x^1_{f_i} + \alpha_2 x^2_{f_i} + \dots + \alpha_{k-r} x^{k-r}_{f_i} = 0$$

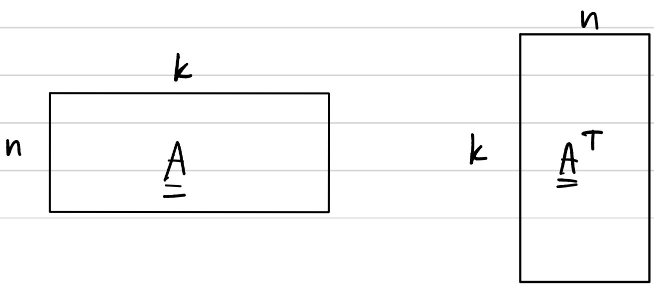
für $i = 1$: $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_{k-r} \cdot 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$
$i = 2$: $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \dots + \alpha_{k-r} \cdot 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$
$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$
$i = k-r$: $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_{k-r} \cdot 1 \Rightarrow \alpha_{k-r} = 0$

$\Rightarrow$ wir haben bewiesen, dass alle Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-r}$ 0 sind.

Somit sind $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^{k-r}$ lin. unabhängig.

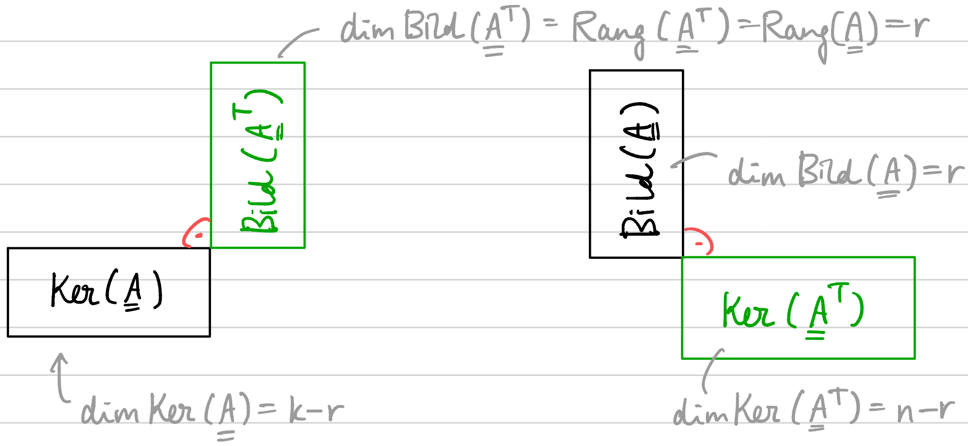
Somit ist $\{\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^{k-r}\}$ Basis in $\mathrm{Ker}(\underline{\underline{A}}) \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(\underline{\underline{A}}) = k-r$.

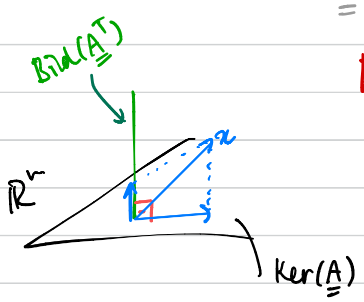
$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times k}$



$\mathcal{A}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \qquad \mathcal{A}(x) = A x \; ; \quad \mathcal{A}^T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \; ; \; \mathcal{A}^T(b) = A^T \cdot b$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^k \arrow[rr, bend left, "\mathcal{A}(x) = A\cdot x"] & & \mathbb{R}^n \arrow[ll, bend left, "\mathcal{A}^T(b) = A^T\cdot b"]
\end{tikzcd}$$





Bedeutung: $x \in \mathbb{R}^k$: $\underset{\text{im Ker}(A)}{x_0} + \underset{\text{im Bild}(A^T)}{x_r}$ und $x_0 \perp x_r$

Theorem: 1) $\dim \text{Ker}(A) + \dim \text{Bild}(A^T) = k$

$\dim \text{Ker}(A^T) + \dim \text{Bild}(A) = n$

2) $\text{Ker}(A) \perp \text{Bild}(A^T)$ Die Räume stehen orthogonal aufeinander.

$\text{Bild}(A) \perp \text{Ker}(A^T)$

Def: Seien U, V lin. Unterräume von $\mathbb{R}^k$. $U \perp V$ falls:

Skalarprodukt

für $u \in U$, $v \in V$ beliebig : $u \perp v$: $\langle u, v \rangle = u^T v = 0$

Beweis: 2) Nehme $x \in \text{Ker}(A)$, $y \in \text{Bild}(A^T)$ beliebig.

$\Updownarrow$

$y = A^T \cdot b$

$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y = x^T \cdot (A^T \cdot b) = (x^T \cdot A^T) b = (A x)^T b = 0^T b = 0$

$x = \text{Ker}(A) \Leftrightarrow A x = 0$ Somit $x \perp y \Rightarrow \text{Ker}(A) \perp \text{Bild}(A^T)$

§ 2.3. Koordinaten und Basiswahl

Sei V lin. Raum, $\dim V = n$.

per Def: es gibt $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ die eine Basis bilden.

für jedes $x \in V$ gibt es eindeutige Koeffizienten (eine eindeutige Darstellung) sodass:

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

$\uparrow$

x lässt sich schreiben als lin. Komb. von $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Beweis der Eindeutigkeit:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \\ x &= y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &0 = (x_1 - y_1) v_1 + (x_2 - y_2) v_2 + \dots + (x_n - y_n) v_n \\ &v_1, v_2, \dots, v_n \text{ Basis } \Rightarrow v_1, \dots, v_n \text{ lin. unabhängig} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 - y_1 = 0,\ x_2 - y_2 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$$

V linearer Raum der Dim. n

Da dim haben wir eine Basis B Basis in V $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$\begin{array}{ccc} V & & \mathbb{R}^n \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{mit } x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

$$k_B : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto k_B(x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{mit } x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ heissen die Koordinaten von x in der Basis B

k_B heisst die Koordinatenabbildung in der Basis B.

Bsp: $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ kanonische Basis

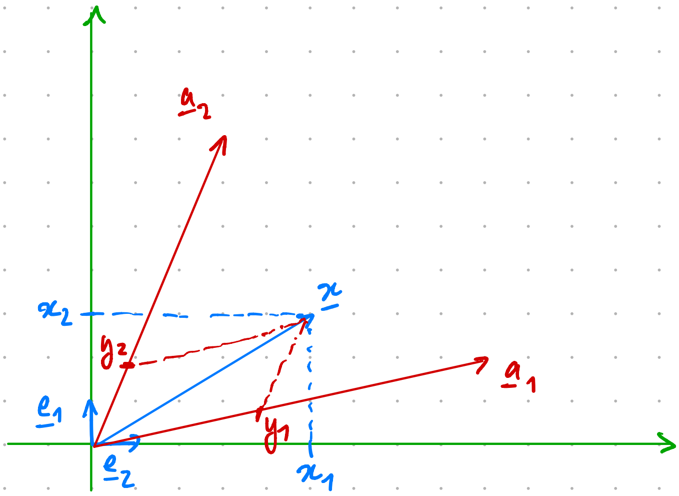
$$x \in V = \mathbb{R}^3 \Rightarrow x = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2, x_3 sind die Koordinaten von x in der kanonischen Basis
$B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

Basis $B' = \{\underbrace{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3}\}$ Basis in $\mathbb{R}^3$
(müssen linear unabhängig sein!)

$$x = y_1\underline{a}_1 + y_2\underline{a}_2 + y_3\underline{a}_3$$

y_1, y_2, y_3 = Koordinaten von x in der Basis $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$



$$V \underset{k_B^{-1}}{\overset{k_B}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto k_B(x) = \underline{x}$$

$$k_B^{-1}(\underline{x}) = x \longleftarrow\!\shortmid \underline{x}$$

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n = \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow x = k_B^{-1}(\underline{x}) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

In diesem Sinne kann man V mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren.

Bsp: $P_n = \{ p \text{ Polynom vom Grad } \leq n-1 \}$

Basis Monome $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$

Sei $p \in P_4$, $p(t) = 12 + 13t + 9t^2 + 4t^3$
Koordinaten von p in der Basis der Monome sind
$12, 13, 9, 4$ da

$$p = 12 p_0 + 13 p_1 + 9 p_2 + 4 p_3$$

$$\begin{array}{ccc} P_4 & & \mathbb{R}^4 \\ \cup & & \cup \\ p & \longmapsto & \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{p} \end{array}$$

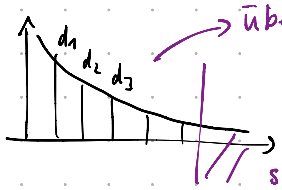
$p \in P$
$\underline{p} \in \mathbb{R}^4$
$p = x_1 p_0 + x_2 p_1 + x_3 p_2 + x_4 p_3$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$
$x_1 \sim x_4$ sind Skalare

Man sagt P_4 ist isomorf mit $\mathbb{R}^4$: $P_4 \sim \mathbb{R}^4$
V $\mathbb{R}^n$: $V \sim \mathbb{R}^n$

$d(t) = $ Druck
$d(t_1), d(t_2), \dots, d(t_n)$ zusammen: $\underline{d} = \begin{bmatrix} d(t_1) \\ d(t_2) \\ \vdots \\ d(t_n) \end{bmatrix}$

$$\underline{d} = \sum_{j=1}^{n} d(t_j)\, \underline{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \cdot \underline{b}_j$$

$$\approx \sum_{j=1}^{n} d_j b_j = \sum_{j=1}^{n} d'_j\, \underline{e}_j$$



übermitteln

Koeffizienten fallen ab

schneiden, 0

Komprimation

(letzendlich muss man nicht mehr mit Funktionen arbeiten, sondern nur noch mit den Koeffizienten).

§ 2.4. Basiswechsel und Koordinatentransformation

V lin. Raum, $\dim V = n$

$B = \{ b_1, b_2, \dots, b_n \}$ Basis alt

$\tilde{B} = \{ \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n \}$ Basis neu

Sei $v \in V$: in der "alten" Basis B: $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n$

mit $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ (Skalare)

v hat in B die Koordinaten $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Ziel: Koordinaten von v in der "neuen" Basis B'

$$v = \tilde{x}_1 \tilde{b}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{b}_2 + \dots + \tilde{x}_n \tilde{b}_n$$

<u>Aber</u>: $\tilde{b}_j \in V \Rightarrow \boxed{\tilde{b}_j} = \underbrace{c_{1j} b_1 + c_{2j} b_2 + \dots + c_{nj} b_n}_{\text{(Elemente der alten Basis)}}$

b_j in der neuen Basis

für $j = 1, 2, \dots, n$ (die <u>Spalten</u> der Matrix c in der Darstellung von V)

$\Rightarrow$ c's bilden eine Matrix: $\underline{C} = [c_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ $m \times n$ Matrix

Somit: $v = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \boxed{\tilde{b}_j} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \boxed{\sum_{i=1}^{n} c_{ij} \underline{b_i}}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \hat{x}_j \right) \underline{b_i} = \sum_{i=1}^{n} (\underline{\underline{C}}\, \underline{\tilde{x}})_i b_i$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$

$\Rightarrow (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\tilde{x}})_i = x_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$

$\underline{\underline{C}}\, \underline{\tilde{x}} = \underline{x} \Rightarrow \underline{\hat{x}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{x}$

Lösung des LGS $\underline{\underline{C}}\, \underline{\tilde{x}} = \underline{x}$

Bsp: S_5 = Raum der geraden Polynome vom Grad ≤ 4:

Geg.: $B = \{p_0, p_2, p_4\}$ $\quad \tilde{B} = \{q_1, q_2, q_3\}$ mit

$q_1(t) = 1 + t^2$
$q_2(t) = 1 - t^2$
$q_3(t) = 1 + t^2 + t^4$

$g \in S_5 \Rightarrow g = x_1 p_0 + x_2 p_2 + x_3 p_4$ mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ (Skalare)

$g \xmapsto{k_B} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{x}$ Koordinatenvektor von g in der Basis B.

x_1, x_2, x_3 sind die Koordinaten von g in der Basis B.

Möchte: Koordinaten von q in der neuen Basis $\tilde{B}$ (typische Prüfungsaufgabe!)

Vorgehensweise

1) Schreibe jedes Element von $\tilde{B}$ als lin. Komb. von den Elementen aus B:

Bsp: hier x_1, x_2, x_3 sind

$q_1 = 1 p_0 + 1 p_2 + 0 p_4$ $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Spalten/Vektor der Koordinaten

$q_2 = 1 p_0 - 1 p_2 + 0 \cdot p_4$ $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$q_3 = 1 \cdot p_0 + 1 \cdot p_2 + 1 \cdot p_4$ $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) Matrix aufschreiben. Die Matrix $\underline{C}$ ist:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) LGS $\underline{\underline{C}}\, \underline{\tilde{x}} = \underline{x}$ lösen:

- Gauss oder mit
- C^{-1}

$$\underbrace{\underline{\underline{C}}}_{\text{gerechnet}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}}_{\text{ges.}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\text{geg.}}$$

Bsp: $\underline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$