§ 4. Norm und Skalarprodukt in lin. Räume

§ 4.1 Normierte lineare Räume

Sei V lin. Raum. Die Funktion

$$\boxed{\|\cdot\| : V \to [0, \infty[}$$ heisst Norm auf V falls:

(N_1) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$

(N_2) α Skalar, $v \in V$: $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$

(N_3) $v, w \in V$: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Dreiecksungleichung

V linearer Raum mit $\|\cdot\|$ Norm heisst normierter lin. Raum.

Bsp: $\mathbb{R}^d$, Euklidische Norm in $\mathbb{R}^d$

$$\boxed{\|\underline{x}\|_2 \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2} = \sqrt{\underline{x}^T \underline{x}}}$$

$\mathbb{C}^d$, Euklidische Norm in $\mathbb{C}^d$

$$\boxed{\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \ldots + \bar{x}_d x_d} = \sqrt{\underline{x}^H \underline{x}}}$$ (komplexe Vektoren)

Frage: Warum gilt (N_3) in $\mathbb{R}^d$?

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 \leq (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)$$

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2 \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2$$

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = (\underline{v} + \underline{w})^T (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{v}^T \underline{v} + \underline{v}^T \underline{w} + \underline{w}^T \underline{v} + \underline{w}^T \underline{w} = \|\underline{v}\|^2 + 2 \underline{v}^T \underline{w} + \|\underline{w}\|^2$$

Man müsste noch zeigen:

$$\underline{v}^T \underline{w} \leq \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\|$$ Cauchy–Bouniakovski–Schwarz

oder

$$\left(\sum_{j=1}^{d} v_j w_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{d} v_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{d} w_j^2\right)$$

Cauchy-Ungleichung: man beweist das induktiv nach Dimension d.

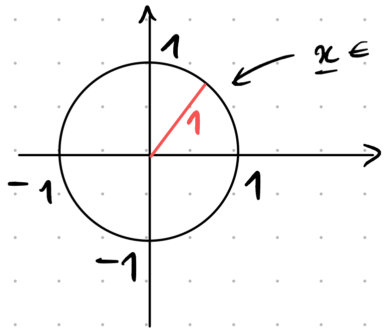
Andere Normen in $\mathbb{R}^d$

$1 \le p < \infty \qquad \|\underline{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_d|^p)^{1/p}$

$\|\underline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_d|\}$

Wie sieht ein Ball in diesen Normen aus?

$p=2$:



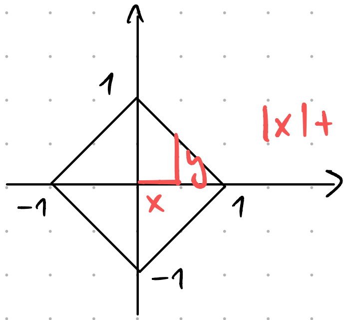
$\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\underline{x}\|_2 = 1$

$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt[2]{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$\|\underline{x}\|_2 = 1$

$p=1$: $\|\underline{x}\|_1 = 1$

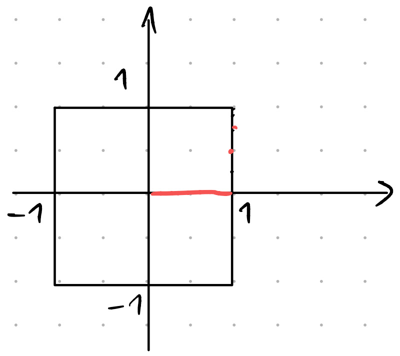
$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2;\ |x_1|^1 + |x_2|^1 = 1$



$|x| + |y| = 1$

$p=\infty$: Ball = Elemente aus $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2;\ \|\underline{x}\|_\infty = 1\}$

$= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2;\ \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1\}$



Warum?

$\|\underline{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p}$

$= \max_{1\le i\le n} \{|v_i|\}$

$\Rightarrow$ d.h. $\|\underline{x}\|_\infty = 1$:

$\max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$

Bsp: $V = \{f: [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig}\}$

$\|f\|_0 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ Norm auf V

$$f_n \to f \text{ falls } \|f_n - f\|_0 \to 0$$
in $\|\cdot\|_0$

f_n konvergiert gegen f in $\|\cdot\|_0$

sup - Norm
max - Norm
(Cauchy - Norm)
uniforme Konvergenz
gleichmässige Konvergenz

Theorem: Alle Normen in $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent

Seien $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ Normen in $\mathbb{R}^d$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(d) \geq 1$ sodass: $\frac{1}{c}\|\underline{v}\| \leq |||\underline{v}||| \leq c\|\underline{v}\|$ für alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^d$

äquivalent bedeutet: Konvergent in $\|\cdot\|$ $\Leftrightarrow$ konvergent in $|||\cdot|||$.

Bsp: $L^2[0,1] = \{ f: [0,1] \to \mathbb{R}, \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty \}$

$$\|f_2\| = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$$

$\mathbb{R}^3$: $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$\mathbb{R}^d$: $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$

Folgen (x_n) $\|(x_n)\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2}$ quadratisch konvergente Reihen

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$$

Skalarprodukt in $\mathbb{R}^d$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d$$

in $\boxed{\mathbb{C}^d}$: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^H \underline{y} = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_d y_d$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$$

§ 4.2. Skalarprodukt in lin. Räume:

Def: Sei V lin. Raum. Ein **Skalarprodukt** auf V ist eine Funktion

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{falls:}$$

$V \times V$

Axiome:

(S_1) $\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b \langle x, z \rangle$

für alle $x, y, z \in V$, a, b Skalare linear im 2. Argument.

(S_2) $\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$ (über $\mathbb{R}$)
$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (falls über $\mathbb{C}$) $\Rightarrow$ symmetrisch.

(S_3) **positiv definiert** falls:

Def: $\begin{cases} \langle x , x \rangle \geq 0 & \text{für alle } x \in V \\ \langle x , x \rangle = 0 & \Rightarrow x = 0 \end{cases}$ $\leftarrow$ wenn nur das erfüllt, dann **positiv semidefiniert.**

Bsp. 1) Euklidisches Skalarprodukt $\boxed{\langle x, y \rangle = x^T y}$ (Standardskalarprodukt)

2) $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)}\, g(x)\, dt$

Bem: $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$: $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$; $f \in L^2$: $\|f_2\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

Def: Man sagt dass $\|\cdot\|$ **aus dem Skalarprodukt** $\langle \cdot , \cdot \rangle$ kommt falls

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.}$$

Def: Seien $x, y \in V$ lin. Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Man sagt x ist **orthogonal auf y** $(x \perp y)$ falls $\boxed{\langle x, y \rangle = 0}$

Bsp: $\mathbb{R}^n$, $\underline{\underline{Q}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal $\quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \text{ mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$$

Dann definieren wir:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{\Lambda}}\, \underline{\underline{Q}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{\Lambda}}^T \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{\Lambda}}\, \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{A}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} \text{ symmetrisch.}$$

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_{\underline{\underline{A}}} \overset{\text{def}}{=} \underline{u}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{v} \in \mathbb{R} \qquad \underline{\underline{A}} = \text{skalarprodukt.}$$

$$\langle \cdot , \cdot \rangle_{\underline{\underline{A}}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Beweis: Axiome überprüfen:

(S1) klar $\langle \underline{u}, a\underline{v} + b\underline{w}\rangle = \underline{u}^T \underline{\underline{A}} (a\underline{v} + b\underline{w}) = \underline{u}^T (a\underline{\underline{A}}\underline{v} + b\underline{\underline{A}}\underline{w})$

$= a\underline{u}^T\underline{\underline{A}}\underline{v} + b\underline{u}^T\underline{\underline{A}}\underline{w} = a\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle_{\underline{\underline{A}}} + b\langle \underline{u}, \underline{w}\rangle_{\underline{\underline{A}}}$

(S2) $\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle_{\underline{\underline{A}}} = \langle \underline{u}, \underline{v}\rangle_{\underline{\underline{A}}}^T = (\underline{u}^T \underline{\underline{A}}\underline{v})^T = \underline{v}^T\underline{\underline{A}}^T\underline{u} \underset{\underline{\underline{A}} \text{ symmetrisch.}}{\overset{\uparrow}{=}} \underline{v}^T\underline{\underline{A}}\underline{u} = \langle \underline{v}, \underline{u}\rangle_{\underline{\underline{A}}}$

(S3) $\langle \underline{v}, \underline{u}\rangle_{\underline{\underline{A}}} = \underline{u}^T\underline{\underline{A}}\underline{v} = \underline{u}^T(\underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{\Lambda}}\underline{\underline{Q}})\underline{u} =$

$= (\underline{u}^T\underline{\underline{Q}}^T)\underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{Q}}\underline{u}) = \underbrace{(\underline{\underline{Q}}\underline{u})^T}_{\underline{v}^T}\underline{\underline{\Lambda}}\underbrace{(\underline{\underline{Q}}\underline{u})}_{\underline{v}} = \underline{v}^T\underline{\underline{\Lambda}}\underline{v}$ mit $\underline{v} = \underline{\underline{Q}}\underline{u}$

Somit: $\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle_{\underline{\underline{A}}} = \underline{v}^T\underline{\underline{\Lambda}}\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\lambda_j}_{>0} \underbrace{|v_j|^2}_{\geq 0} \geq 0$ und

$= 0$ nur falls alle $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$

$\Rightarrow$ falls $\underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{\underline{Q}}\cdot\underline{u} = \underline{0} \Rightarrow \underline{u} = \underline{0}$

Somit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\underline{\underline{A}}}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

$\|\underline{v}\|_{\underline{\underline{A}}} = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle_{\underline{\underline{A}}}}$

$\underline{\underline{A}}$-Norm aus $\underline{\underline{A}}$-Skalarprodukt.

Bem: Falls $\Lambda = \{0, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ mit $\lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$

dann alles gleich ausser:

$\langle \underline{u}, \underline{u}\rangle_{\underline{\underline{A}}} = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j |v_j|^2 = 0 \Leftrightarrow v_2 = \dots = v_n = 0$ $\quad v_1$ frei!!

$\Rightarrow$ Somit nicht nur $u = 0$!

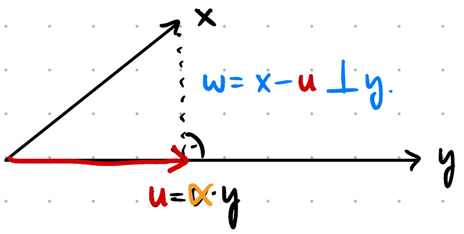
alle $\underline{u} = \underline{\underline{Q}}^T \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ haben $\langle \underline{u}, \underline{u}\rangle_{\underline{\underline{A}}} = 0$

$\Rightarrow$ kein Skalarprodukt!

da $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\underline{\underline{A}}}$ symmetrisch. positiv semi-definiert.

V9

Bem: Wie rechnet man eine Projektion?



$x, y \in V$ lin. Raum

Projektion von x auf y : was ist $u = \alpha y$? $\alpha = ?$

$x - u \perp y \Leftrightarrow \langle x-u, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = \langle u, y\rangle$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = \langle \alpha y, y\rangle$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ für $y \neq 0$

Somit ist die Projektion von x auf y : $\boxed{\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle x, y\rangle} y \in V}$

$P_y x = \boxed{\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y}$

$P_y : V \longrightarrow V$

Projektionsmatrix!

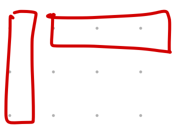
Bem: für $V = \mathbb{R}^n$ mit Euklid. Skalarprodukt:

$$P_y \underline{x} = \underbrace{\frac{\underline{x}^H \underline{y}}{\underline{y}^H \underline{y}}}_{\alpha} \underline{y} = \underline{y} \frac{\underline{y}^H \underline{x}}{\|\underline{y}\|_2 \|\underline{y}\|_2} = \boxed{\frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|_2} \left(\frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|}\right)^H} \cdot \underline{x} = \underline{\underline{P}}_y \underline{x}$$

$(y^H y = \|y\|^2)$

Matrix! $\underline{\underline{P}}_y$

H steht für T (in diesem Fall).



(H: Hermitetransponiert (in $\mathbb{C}$)
$\Leftrightarrow$ Tranponiert (in $\mathbb{R}$))

$$\underline{\underline{P}}_y = \frac{y}{\|y\|_2} \cdot \left(\frac{y}{\|y\|}\right)^H$$

Standardskalarprodukt, $\langle x, y\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

||

bzgl. Euklidisches Skalarprodukt ($\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow$ x orth. auf y.)

In $\mathbb{R}^n$ ist eine orthogonale Projektion auf y die Matrix $\boxed{\underline{\underline{P}}_y}$ = Projektionsmatrix auf y.

Bem: Das haben wir bereits gesehen! (Householdermatrix) → Spiegelungen

Bem: $\boxed{\text{Bild } P_y = \text{span}\{y\}}$

Theorem: [Schwarz'sche Ungleichung]

V lin. Raum mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt: Dann:

$$\boxed{|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}} \quad \text{für alle } x,y \in V$$

(oder $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
↑ ↗
aus $\langle \cdot,\cdot \rangle$)

Beweis:

- Für $x=0 \Rightarrow$ klar
- Annahme $x \neq 0$, $y \neq 0$. Sei $z = \langle x,y\rangle x - \langle x,x\rangle y \in V$

$$0 \leq \langle z,z\rangle \leq \langle \langle x,y\rangle x - \langle x,x\rangle y, \langle x,y\rangle x - \langle x,x\rangle y\rangle =$$

$$= \langle x,y\rangle \langle \langle x,y\rangle x - \langle x,x\rangle y, x\rangle - \langle x,x\rangle \langle \langle x,y\rangle x - \langle x,x\rangle y$$

$$= \boxed{\langle x,y\rangle \overline{\langle x,y\rangle} \langle x,x\rangle} - \langle x,y\rangle\langle x,x\rangle\langle y,x\rangle \boxed{- \langle x,x\rangle \overline{\langle x,y\rangle} \langle x,y\rangle} -$$

$$- \langle x,x\rangle\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^4 \|y\|^2 - \|x\|^2 \langle x,y\rangle\langle y,x\rangle \Rightarrow \left.\begin{matrix} \|x\|^2 \langle x,y\rangle \langle y,x\rangle \leq \|x\|^4 \|y\|^2 \\ x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

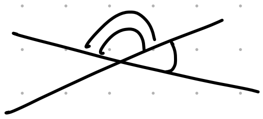
$$\Rightarrow |\langle x,y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \blacksquare$$

Somit sind wir berechtigt, Winkel (auch andere als den 90°-Winkel) zu definieren.

$x, y \in V$ lin. Raum.

$$\boxed{\widehat{x,y} = \arccos \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|}}$$



Theorem: [Pythagoras]

V lin. Raum mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\|\cdot\|$ aus $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Def.: $v \in V$ lin. Raum mit $\|\cdot\|$

v heisst **Einheitsvektor**, falls $\boxed{\|v\| = 1}$

Theorem: Seien $e_1, e_2, \dots, e_n$ Einheitsvektoren im lin. Raum V mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\|\cdot\|$ aus $\langle\cdot,\cdot\rangle$, paarweise orthogonal.
Dann sind $e_1, e_2, \dots, e_n$ lin. unabhängig.

Beweis: $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \quad | \cdot e_j \rangle$

$\langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n , e_j \rangle = 0$

$\underbrace{\bar\lambda_1 \langle e_1, e_j\rangle}_{=0} + \underbrace{\bar\lambda_2 \langle e_2, e_j\rangle}_{=0} + \underbrace{\dots}_{\neq 0} + \underbrace{\bar\lambda_n \langle e_n, e_j\rangle}_{=0} = 0$

$\left.\begin{array}{l} \bar\lambda_j \langle e_j, e_j\rangle = 0 \\ e_j \neq 0 \text{ (aus def.)} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_j = 0$

für alle j machen:

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$

Somit sind $e_1, \dots, e_n$ lin. unabhängig

Konsequenz

n paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem lin. Raum der Dimension n bilden eine orthonormale Basis im Raum (ONB)

Bem: in $\mathbb{R}^n$ $\{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n\}$ ONB

$\underline{\underline{V}} = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n] \Rightarrow \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{V}} = I$

($\underline{\underline{V}}$ orthogonale Matrix.) Vektoren orthogonal aufeinander & Länge 1.

Bem: Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ ONB in V.

Sei $v \in V$ beliebig $\overset{\text{Basis}}{\Longrightarrow}$ es gibt eindeutige $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sodass

$$\left.\begin{array}{l} v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \\ \qquad\qquad \langle e_j | \end{array}\right\} \Rightarrow$$

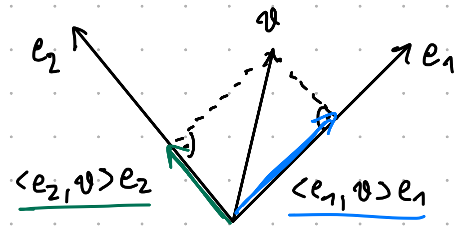
$$\Rightarrow \langle e_j, v\rangle = \lambda_1 \underset{0}{\underset{\|}{\langle e_j, e_1\rangle}} + \lambda_2 \underset{0}{\underset{\|}{\langle e_j, e_2\rangle}} + \underset{\boxed{\lambda_j \langle e_j, e_j\rangle = 1}}{\underset{\downarrow}{\dots}} + \lambda_n \underset{0}{\underset{\|}{\langle e_j, e_n\rangle}} \Rightarrow$$

$\langle e_j, v\rangle = \lambda_j$ für $j = 1, \dots, n$, d.h. die Koordinate $\underline{\lambda_j}$ von $\underline{v}$ ist $\underline{\langle e_j, v\rangle}$.

Damit $v = \langle e_1, v\rangle e_1 + \langle e_2, v\rangle e_2 + \dots + \langle e_n, v\rangle e_n$

Projektion von v auf e_j ist: $\langle e_j, v\rangle e_j$

Somit können wir v sehen als die Summe der Projektionen von v auf die Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$.



Für $V = \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ können wir das auch mit Projektionsmatrizen schreiben:

$\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ ONB in $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$:

$$\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} \langle \underline{b}_j, \underline{v}\rangle \underline{b}_j = \sum_{j=1}^{n} (\underline{b}_j^H \underline{v})\, \underline{b}_j = \sum_{j=1}^{n} \underline{b}_j (\underline{b}_j^H \underline{v}) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\underline{b}_j \underline{b}_j^H)}_{\underline{\underline{P}}_{\underline{b}_j}} \underline{v} \Rightarrow$$

$$\boxed{\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} \underline{\underline{P}}_{\underline{b}_j} \underline{v}} \iff \boxed{\underline{\underline{I}} = \sum_{j=1}^{n} \underline{\underline{P}}_{\underline{b}_j}}$$

$\Rightarrow$ geht nur für ONB!

Theorem: [Parseval]

unendlichdimensional

V lin. Raum mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\dim V = n$, $\{b_1, \dots, b_n\}$ ONB.

$x \in V \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, x\rangle b_i = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ mit $x_i = \langle b_i, x\rangle$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ Koordinatenvektor

$y \in V \Rightarrow y = \sum_{j=1}^{n} \langle b_j, y\rangle b_j = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j$ $\quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

Dann $\langle x, y\rangle = \underline{x}^H \underline{y} = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle$

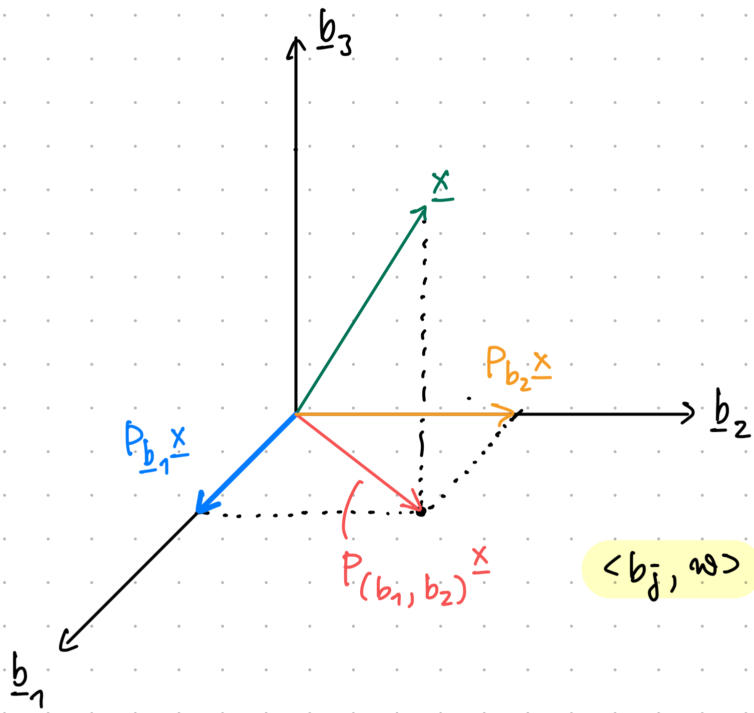
eukl. Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$

Beweis: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_i \underbrace{\langle b_i, b_j\rangle}_{\substack{0 \text{ für } i \neq j \\ 1 \text{ für } i = j}} y_j = \underline{x}^T \underline{\underline{I}}\, \underline{y} = \underline{x}^H \underline{y}$

Bem: Projektion auf Unterraum:

$b_1, b_2, \dots, b_k \in V$ paarweise orthogonal, $\|b_j\| = 1$

$\langle b_i, b_k\rangle = 0$ für $i \neq k$ $\quad$ Für $x \in V$



$w = x - \underbrace{(x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_k b_k)}$

Projektion von x auf $\operatorname{span}\{b_1, \dots, b_k\}$

= Summe der Projektionen auf $b_1, \dots, b_k$ mit $x_1 = \langle b_1, x\rangle, \dots, x_k = \langle b_k, x\rangle$

weil $w \perp b_1, b_2, \dots, b_k$

$\langle b_j, w\rangle = \underbrace{\langle b_j, x\rangle}_{x_j} - \underbrace{\langle b_j, x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_k b_k\rangle}_{x_j \langle b_j, b_j\rangle = x_j} =$

$= x_j - x_j = 0 \Rightarrow b_j \perp w$

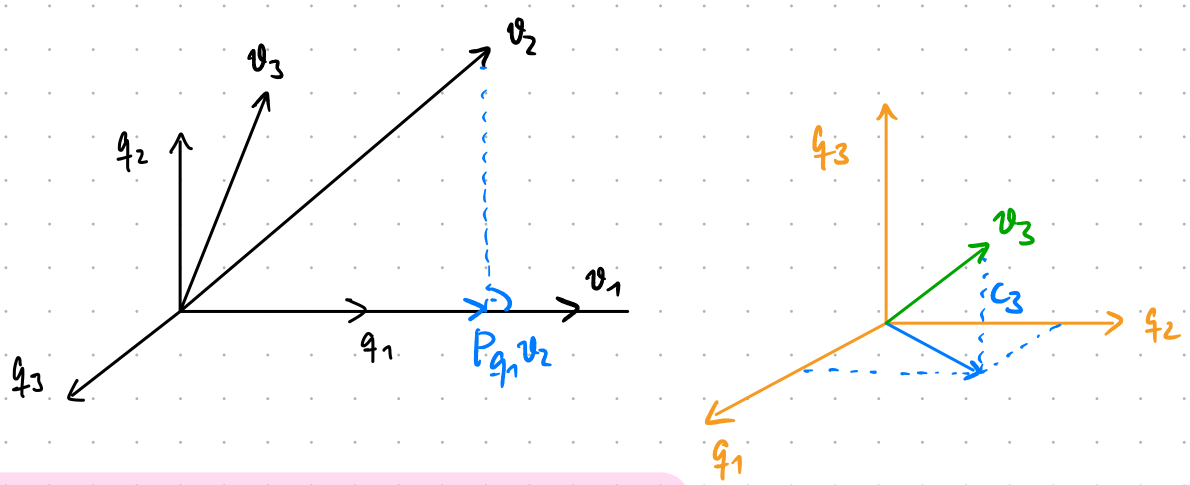
$v_k = x_1 b_1 + \dots + x_k b_k = P_{\perp \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_k\}} x$

§ 4.3. Gram - Schmidt - Algorithmus (NS Seite 96)

Theorem: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ Basis in V lin. Raum mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Es gibt dann eine ONB $\{q_1, \dots q_n\}$ von V sodass

span $\{q_1, q_2, \dots, q_j\}$ = span $\{v_1, v_2, \dots, v_j\}$ für $j = 1, 2, \dots, n$



Beweis und Konstruktion Gram-Schmidt:

Gegeben: $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis in V. Ziel: $\{q_1, \dots, q_n\}$ ONB in V

$$q_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 \Rightarrow v_1 = \|v_1\| q_1 = \langle q_1, v_1 \rangle q_1$$

$$\boxed{v_1 = \langle q_1, v_1 \rangle q_1 + 0 q_2 + 0 q_3 + \dots + 0 q_n}$$

$$c_2 = v_2 - P^{\perp}_{\text{span}\{q_1\}} v_2 = v_2 - \langle q_1, v_2 \rangle q_1$$

$$\boxed{v_2 = \langle q_1, v_2 \rangle q_1 + \langle q_2, v_2 \rangle q_2 + 0 q_3 + \dots + 0 q_n}$$

$$q_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} \Rightarrow c_2 = \|c_2\| q_2 = \langle q_2, s_2 \rangle q_2$$

$$c_3 = v_3 - P^{\perp}_{\text{span}\{q_1, q_2\}} v_3 = v_3 - \langle q_1, v_3 \rangle q_1 - \langle q_2, v_3 \rangle q_2$$

$$q_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|}$$

$$\boxed{v_3 = \langle q_1, v_3 \rangle q_1 + \langle q_2, v_3 \rangle q_2 + \langle q_3, v_3 \rangle q_3 + \dots + 0 q_n}$$

weiter so...

$$c_k = v_k - P^{\perp}_{\text{span}\{q_1, \dots, q_{k-1}\}} v_k = v_k - \langle q_1, v_k \rangle q_1 - \dots - \langle q_{k-1}, v_k \rangle q_{k-1}$$

$$\boxed{v_k = \langle q_k, v_k \rangle q_1 + \langle q_2, v_k \rangle q_2 + \dots + \langle q_k, v_k \rangle q_k + 0 q_{k+1} + \dots + 0 q_n}$$

$$q_k = \frac{1}{\|c_k\|} c_k \in \text{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_k\}, \quad q_k \perp \text{span}\{q_1, \dots, q_{k-1}\}$$

und so weiter

$$\boxed{v_n = \langle q_1, v_n \rangle q_1 + \langle q_2, v_n \rangle q_2 + \dots + \langle q_n + v_n \rangle q_n}$$

Bsp: $V = \mathbb{P}_4[-1,1] = \operatorname{span}\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ $\quad p_j(t) = t^j$

$$\boxed{\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt}$$

Standarddefinition Skalarprodukt von Funktionen mit dem Integral $[-1,1]$

Ist $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ ONB in $\mathbb{P}_4[-1,1]$?

$$\langle p_0, p_1\rangle = \int_{-1}^{1} 1t\, dt = 0 \Rightarrow p_0 \perp p_1$$

$$\langle p_0, p_2\rangle = \int_{-1}^{1} 1t^2 dt \neq 0 \Rightarrow p_0 \not\perp p_2$$

Gram-Schmidt baut eine entsprechende ONB

$q_1 = \frac{1}{\|p_0\|} p_0$ also brauche $\|p_0\|$

$$\langle p_0, p_1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2 \Rightarrow \|p_0\| = \sqrt{2} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} p_0$$

$$c_2 = p_1 - \langle q_1, p_1\rangle q_1 = p_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\langle p_0, p_1\rangle}_{=0} q_1 = p_1$$

$$\langle c_1, c_2\rangle = \int_{-1}^{1} p_1(t)\, p_1(t)\, dt = \frac{2}{3} \Rightarrow q_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, p_1$$

$$c_3 = p_2 - \langle p_1, p_2\rangle q_1 - \langle q_2, p_2\rangle q_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \langle q_1, p_2\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{3} \ ; \ \langle q_2, p_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{\frac{3}{2}}\, t\, dt = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_3 = p_2 - \frac{\sqrt{2}}{3} q_1 \ ; \ \langle c_3, c_3\rangle = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} 1\right)^2 dt = \ldots$$

$$q_3 = \frac{1}{\|c_3\|} c_3$$

Gram-Schmidt $\Rightarrow$ orthogonale Polynome bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$\Rightarrow$ Legendre Polynome

Bem: Gram-Schmidt in $\mathbb{C}^n / \mathbb{R}^n$ mit euklidischem Skalarprodukt gibt in k^{ten} Schritt … :

$$\underline{v}_k = (\underline{q}_1^H, \underline{v}_k)\,\underline{q}_1 + (\underline{q}_2^H \underline{v}_k)\,\underline{q}_2 + \dots + (\underline{q}_k^H \underline{v}_k)\,\underline{q}_k + 0\,\underline{q}_{k+1} + \dots + 0\,\underline{q}_n$$

↳ lin. Komb. von $\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_k$ $(\underline{q}_{k+1}, \dots, \underline{q}_n)$

Matrix mal Vektor

$$\underline{v}_k = \begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \underline{q}_2 & \cdots & \underline{q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_1^H \underline{v}_k \\ \vdots \\ (\underline{q}_k^H \underline{v}_k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

q's

0en

$n \times k$

↳ zu $n \times n$

$$\begin{bmatrix} q_1, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots, q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^H v_k \\ \vdots \\ q_k^H v_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

← mit 0en erweitern.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \cdots & \underline{v}_k \end{bmatrix}}_{n \times k} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \cdots & \underline{q}_k \end{bmatrix}}_{n \times n} \underbrace{\left.\begin{bmatrix} q_1^H v_1 & q_1^H v_2 & \cdots & q_1^H \underline{v}_k \\ 0 & q_2^H v_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & q_k^H v_k \end{bmatrix}\right\} k}_{k}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}_k \end{bmatrix} \begin{array}{c} k \\ \begin{bmatrix} \diagdown & * \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix} \end{array} k$$

↳ Spalten = orthonormale Vektoren.

Nach n-Schritte:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \cdots & \underline{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \diagdown & * \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix}$$

i ↓, ← j: $q_i^H v_j$

also $\boxed{\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}}$ ⇒ $\boxed{\text{QR-Zerlegung von } A\,!}$

Bem: Givens-Rotationen
Householder-Spiegelungen $\Big\} \Rightarrow$ QR-Zerlegung.

↳ In jedem Schritt: Vorteil: sehr genau

Verwende orthogonale Matrizen um ein Teil der oberen Dreiecksmatrix zu bauen.

(stabil, aber teuer.)

Diese 2 Methoden liefern auch eine ONB in $\mathbb{R}^n$, aber erst am Ende des Algorithmus.

d.h. wenn wir unterbrechen bevor wir ganz fertig sind mit den n Schritten dann haben wir nichts

$\Rightarrow$ Wichtiger Unterschied zu Gram-Schmidt!

Gram-Schmidt: in k-ten Schritt:

baue $(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}), q_k$ orthonormal

via einer oberen Dreiecksmatrix

Vorteil: kann früher aufhören, günstiger.

Nachteil: instabiler. (Rundungsfehler addieren sich)

Frage, die wir uns stellen müssen wenn wir entscheiden welches Verfahren wir benutzen wollen:

wollen wir eine Lösung, oder eine perfekte Lösung?

Lösung: Gram-Schmidt

perfekte Lösung: Housholder-Spiegelung, Givensrotation

Bem: Wann kann das Algorithmus zusammenbrechen?

- $\|c_k\| = 0 \Rightarrow$ Division durch 0 $\longrightarrow$

$$\Rightarrow c_k = 0 \Rightarrow v_k = \langle q_1, v_k \rangle q_1 + \dots + \langle q_{k-1}, v_k \rangle q_{k-1}$$

$$= \text{lin. Komb. von } q_1, \dots, q_{k-1}$$
$$v_1, \dots, v_{k-1}$$

$\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_k$ lin. unabhängig!

Algorithmus modifizierte Gram-Schmidt

für $j = 1, 2, \dots, n$:

$v = v_j$

für $i = 1, 2, \dots, j-1$:

$r_{ij} = \langle q_i, v \rangle$

$v = v - r_{ij} q_i$ ← Substraktion findet sofort statt.

$r_{jj} = \|v\|$

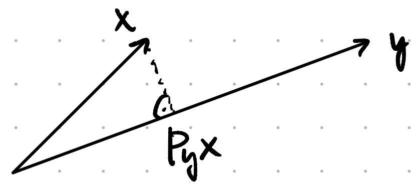
$q_j = \frac{v}{r_{jj}}$

euklidische Norm: $\|\cdot\|_2$ = "Länge des Vektors"

$$\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

20.11.20

Projektoren



$u, v \in V$

$P_y : V \to V$ $\boxed{P_y x = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} y}$ orthogonale Projektion

$\underline{\underline{P}}_y$ = orthogonaler Projektor auf Vektor y

Falls $V = \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$: $P_y{}^{\perp} = \frac{y}{\|y\|} \cdot \frac{y^H}{\|y\|}$

Verallgemeinern:

Def: Sei V ein linearer Raum

$P: V \to V$ lineare Abbildung heisst Projektor falls $P^2 = P$

$V = \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ dann identifizieren wir P mit $\underline{\underline{P}}$

$\underline{\underline{P}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{P}}$

Ker $\underline{\underline{P}}$ $\perp$ Bild $\underline{\underline{P}}^H$ ||

Bild $\underline{\underline{P}}$ $\perp$ Ker $\underline{\underline{P}}^H$ ||

Die Projektion ist orthogonal falls

$x - P_y x \perp$ Bild P für alle $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$

d.h. nur wenn $\underline{x} - P_y \underline{x} \in \text{Kern} \underline{\underline{P}}^H$

$$P^H (\underline{x} - P_y x) = 0$$

$$\underline{\underline{P}}^H \underline{x} = \underline{\underline{P}}^H \underline{\underline{P}} \underline{x}$$

Darum gilt: Falls $\underline{\underline{P}}^H = \underline{\underline{P}} \Rightarrow \text{Ker} \underline{\underline{P}} \perp \text{Bild} \underline{\underline{P}}$

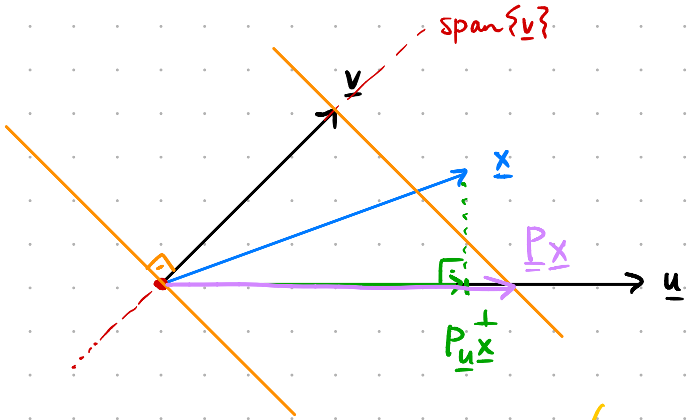
$\underline{\underline{P}}$ orthogonaler Projektor

Def: $\underline{\underline{P}}$ heisst orthogonaler Projektor falls $\underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{P}}$ und $\underline{\underline{P}}^H = \underline{\underline{P}}$

Falls nur $P^2 = P$ gilt, dann heisst $\underline{\underline{P}}$ schiefer Projektor.

Bsp: Schiefer Projektor.

$u, v \in \mathbb{C}^n$ mit $v^H u \neq 0$



Kernel

schiefer Projektor

$\underline{x} - Px \in \operatorname{Ker} \underline{\underline{P}}$

schiefe Projektion von $\underline{x}$ auf $\underline{u}$

$$\boxed{\underline{\underline{P}} = \frac{\underline{u}\,\underline{v}^H}{\underline{v}^H \underline{u}}}$$ schiefer Projektor

($\underline{u} \perp \underline{v}$ ↯ geht nicht)

= genau das Vektor, das orthogonal auf $\underline{v}$ ist.

Deswegen ist das der Kernel von $\underline{\underline{P}}$

$\operatorname{Bild} \underline{\underline{P}} = \operatorname{span}\{\underline{u}\}$

$\operatorname{Ker} \underline{\underline{P}} = \operatorname{span}\{\underline{v}\}^\perp$

Warum? $\underline{\underline{P}}\,\underline{x} = \frac{1}{\underline{v}^H \underline{u}} \underline{u}(\underline{v}^H \underline{x})$

$x \in \operatorname{Ker} \underline{\underline{P}} \Leftrightarrow \underline{\underline{P}}\,\underline{x} = 0 \Leftrightarrow \underline{u}(\underline{v}^H \underline{x}) = \underline{0} \overset{H}{\Leftrightarrow}$

$\underbrace{\underline{x}^H \underline{v}}_{\alpha \in \mathbb{C}} \underline{u}^H = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha u_1 = 0 \\ \alpha u_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha u_n = 0 \end{cases}$ $\quad \underline{u} \neq \underline{0} \quad \Leftrightarrow \alpha = 0$

$\Leftrightarrow \underline{x}^H \underline{v} = 0 \Leftrightarrow \underline{x} \perp \underline{v}$

Ist $\operatorname{span}\{\underline{u}\} = \operatorname{span}\{\underline{u}^H\}$?

$\underline{u} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \end{bmatrix} \quad \underline{u}^H = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \end{bmatrix} \Rightarrow (\underline{u}^H)^T = \bar{\underline{u}} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix}$

spannen nicht denselben Raum auf.

$\alpha \underline{u} + \beta \bar{\underline{u}} = 0$

$\begin{cases} \alpha - \alpha i + \beta + \beta i = 0 \\ \alpha + \alpha i + \beta - \beta i = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha + \beta + i(\beta - \alpha) = 0 \\ \alpha + \beta + i(\alpha - \beta) = 0 \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=0 \Rightarrow \underline{u}, \bar{u} \text{ linear unabhängig!}$$

$$\Rightarrow \text{span}\{\underline{u}\} \neq \text{span}\{\underline{u}^H\} \quad !$$

2. Bsp. schiefer Projektor:

$\underline{\underline{U}} \in \mathbb{C}^{n \times k}$ sodass $\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{I}}$

↳ Spalten von U sind paarweise orthogonal und haben die euklidische Norm 1.

$\underline{\underline{P}} = UU^H$ orthogonaler Projektor (nach Def.)

$\text{Bild}(\underline{\underline{P}}) = \text{Bild}(\underline{\underline{U}})$

$$\underline{\underline{U}} = [\underline{q}_1, \underline{q}_2] \Rightarrow \underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{U}}\underline{\underline{U}}^H = \begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \underline{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_1^H \\ \underline{q}_2^H \end{bmatrix} = \underline{q}_1 \underline{q}_1^H + \underline{q}_2 \underline{q}_2^H$$

3. Bsp.

Seien die Matrizen U, V sodass $V^H U = I$

(wir sagen: die Spalten von U, V sind biorthogonal)

$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{U}}\underline{\underline{V}}^H$ schiefer Projektor

$\text{Bild } \underline{\underline{P}} = \text{Bild } \underline{\underline{U}}$

$\text{Ker } \underline{\underline{P}} = \text{Ker } \underline{\underline{V}}^H = (\text{Bild } \underline{\underline{V}})^\perp$

Def: Norm einer Matrix $\underline{\underline{A}}$, die aus einer Vektornorm kommt:

$$\|\underline{\underline{A}}\| = \max_{\|\underline{x}\|_2 = 1} \|\underline{\underline{A}}\underline{x}\|$$

Vektornorm

Bsp: $\|\underline{\underline{A}}\|_2 = \max_{\|\underline{x}\|_2=1} \|\underline{\underline{A}}\underline{x}\|_2$; $\|\underline{\underline{A}}\|_1 = \max_{\|\underline{x}\|_1=1} \|\underline{\underline{A}}\underline{x}\|_1$

Bem: nicht alle Normen von Matrizen kommen aus einer Vektornorm.

Bsp: Frobenius-Norm

$$\|\underline{\underline{A}}\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Bedeutung einer Norm einer Matrix:

"grösse" der Matrix $\Rightarrow$ wie viel könnte die Matrix einen Vektor vergrössern?

Projektion erhält Länge nicht

$\text{norm}(\underline{\underline{A}}) \cdot \text{norm}(\underline{\underline{B}}) \neq \text{norm}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})$