

Abgabe: 11. April 2022

Serie 06

Aufgabe 1: Energie einer Schallwelle

Eine Gitarrensaite werde in ihrer Mitte angezupft. Dabei nimmt die Saite die Form eines Dreiecks der Höhe h mit Basislänge L an (siehe Abbildung 1). Die Saitenspannkraft F_s während des Auslenkens kann als konstant angenommen werden. Wird die Saite abrupt losgelassen, kommt es zur Anregung von Schallwellen. Zur Vereinfachung nehmen wir dabei an, dass die gesamte Energie der Saite in Form von Schallwellen abgegeben werde.

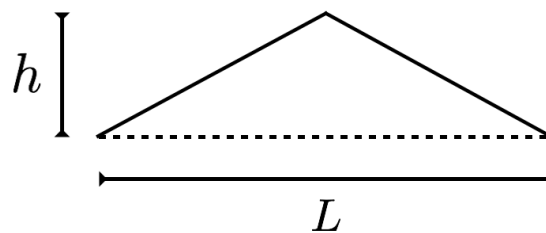


Abbildung 1: Saite

- Welche Gesamtenergie enthält die Schallwelle? Wenden Sie Ihr Ergebnis auf eine Gitarrensaite mit $h = 0.5 \text{ cm}$, $L = 50 \text{ cm}$ und $F_s = 10 \text{ N}$ an. *Hinweis: Berechnen Sie die in der ausgelenkten Saite gespeicherte Energie, indem Sie die zur Auslenkung benötigte Kraft über die Auslenkstrecke integrieren.*
- Schätzen Sie die mittlere Intensität der Schallwelle im Abstand von $d = 10 \text{ m}$ ab, unter der Annahme, dass der Klang für eine Dauer von $t = 5 \text{ s}$ zu hören ist. Wie hoch ist der entsprechende Schallpegel in Dezibel (dB) in Bezug auf den genormten Bezugswert $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$? *Hinweis: Betrachten Sie die Gitarrensaite als punktförmige Schallquelle, d.h. die emittierte Welle ist eine Kugelwelle.*

Lösung:

- Die Kraft F_r , die benötigt wird, um die Saite auszulenken, ist bestimmt durch die Spannkraft F_s und hängt vom momentanen Auslenkwinkel α ab: $F_r = 2F_s \sin \alpha$, siehe Abb. ??.

Für kleine y , α gilt: $\tan \alpha = \frac{y}{L/2} \Rightarrow \alpha = 2\frac{y}{L}$

Die abgegebene Schallenergie entspricht der Energie, die notwendig war um die Saite in die Dreiecksform zu bringen.

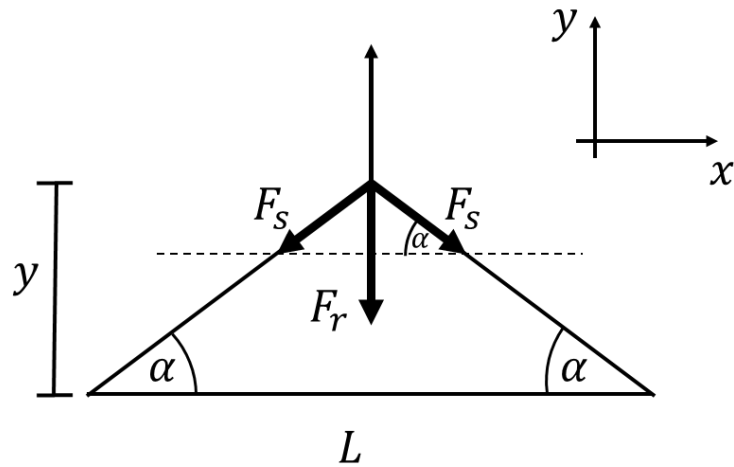


Abbildung 2: Saite

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow E &= \int_0^h F_r dy \\
 &= \int_0^h 2F_s \sin \alpha dy \\
 &\cong \int_0^h 2F_s \alpha dy \quad \text{für kleine } \alpha \\
 &\cong \int_0^h 4F_s \frac{y}{L} dy \quad \text{für kleine } \alpha, y \\
 &= 2 \frac{F_s}{L} \left[y^2 \right]_0^h = 2 \frac{F_s h^2}{L}
 \end{aligned} \tag{1}$$

für $F_s = 10 \text{ N}$, $h = 0.5 \text{ cm}$, $L = 50 \text{ cm} \Rightarrow \epsilon \cong 1.0 \text{ mJ}$

b) Wir schätzen die mittlere Leistung ab durch

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta E}{\Delta t} \cong \frac{1 \text{ mJ}}{5 \text{ s}} = 0.2 \text{ mW} \tag{2}$$

(In der Realität erfolgt die Leistungsabgabe exponentiell gedämpft, was zu numerischen Korrekturfaktoren führt.)

Wir betrachten die Schallquelle als punktförmig. Damit sind die Flächen gleicher Leistung kugelförmig und wir erhalten die mittlere Intensität

$$\langle I \rangle = \frac{\langle P \rangle}{4\pi d^2} \cong 16 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \tag{3}$$

Der Schallpegel in Dezibel berechnet sich in Bezug auf den genormten Bezugswert $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{Schallpegel} &= 10 \text{ dB} \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \\ &= 10 \text{ dB} \cdot \log_{10} \left(\frac{16 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 10^{-12}} \right) \\ &\approx 52 \text{ dB} \quad (\text{Schallpegel einer normalen Unterhaltung})\end{aligned}\tag{4}$$

Aufgabe 2: Longitudinalwelle in Metallstab

Wir betrachten eine harmonische Longitudinalwelle, die sich in einem Metallstab entlang der positiven x -Achse fortbewegt. Die Welle habe eine Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot 5 \text{ kHz}$ und eine Amplitude $A = 2 \mu\text{m}$. Der Metallstab habe eine Querschnittsfläche $A_{\square} = 1.0 \text{ cm}^2$, eine Dichte $\rho_1 = 10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und ein Elastizitätsmodul $E = 160 \text{ GPa}$.

- Berechnen Sie die Wellengeschwindigkeit in dem Metallstab.
- Geben Sie einen Ausdruck für die longitudinale Auslenkung als Funktion von Ort x und Zeit t an.
- Berechnen Sie die Wellenzahl k und die Wellenlänge λ der Welle.
- Berechnen Sie die mittlere Intensität und Leistung der Welle.

Lösung:

- a) Die Wellengeschwindigkeit v in einem Medium mit Elastizitätsmodul E und Massendichte ρ ist gegeben durch

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Somit finden wir

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{160 \cdot 10^9 \text{ Pa}}{10000 \text{ kg/m}^3}} = \sqrt{16 \cdot 10^6} \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2/\text{m}^2}{\text{kg/m}^3}} = 4000 \text{ m/s}\tag{5}$$

- b) Da es sich um eine harmonische Welle handelt, ist die Auslenkung durch

$$\zeta(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)\tag{6}$$

gegeben, wobei ϕ die Phase der Welle bestimmt.

- c) Die Wellengleichung legt den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Kreisfrequenz und Wellenzahl zu $v = \omega/k$ fest. Somit erhalten wir $k = \omega/v = 2\pi \cdot 1.25 \text{ m}^{-1}$. Die Wellenlänge ist demnach $\lambda = 2\pi/k = 0.8 \text{ m}$.

d) Die mittlere Intensität einer propagierenden Schallwelle ist bestimmt durch

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v = 7.9 \cdot 10^4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Um die mittlere transportierte Leistung zu erhalten, muss über die durchströmte Fläche integriert werden

$$\langle P \rangle = \iint \langle I \rangle da = \langle I \rangle A_{\square} = 7.9 \text{ W}$$

Aufgabe 3: Bewegte Schallquelle

Ein Fahrzeug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $v = 20 \text{ m/s}$ in positive x -Richtung auf einen ruhenden Beobachter zu, siehe Abb. 2 a. Auf dem Dach des Fahrzeugs ist eine Schallquelle installiert, die einen Ton bei einer Frequenz $f_S = 500 \text{ Hz}$ aussendet.

- Welche Frequenz nimmt der Beobachter wahr?
- Nun werde die Schallquelle um 180 Grad gedreht, sodass sie entgegen der Fahrtrichtung Schallwellen emittiert, siehe Abb. 2b. Die Schallwellen werden an einer Wand reflektiert und gelangen dann zum Beobachter. Nehmen Sie an, dass der Ton nur über die Reflektion an der Wand zu dem Beobachter gelangt. Welche Aussage ist korrekt?

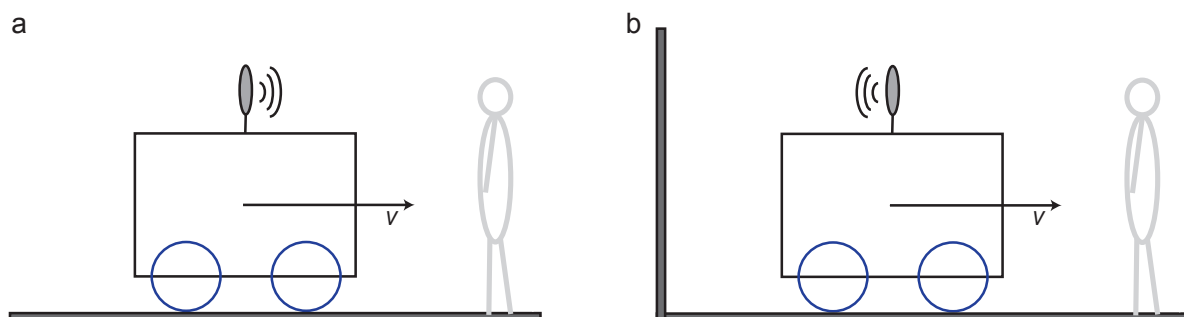


Abbildung 3

Während sich das Fahrzeug auf den Beobachter zubewegt, ist die vom Beobachter wahrgenommene Frequenz

- ☐ höher als f , und die von ihm wahrgenommene Lautstärke des Tons nimmt zu.
- ☐ gleich f , und die von ihm wahrgenommene Lautstärke des Tons nimmt ab.
- ☐ niedriger als f , und die von ihm wahrgenommene Lautstärke des Tons nimmt zu.
- ☐ niedriger als f , und die von ihm wahrgenommene Lautstärke des Tons nimmt ab.
- ☐ höher als f , und die von ihm wahrgenommene Lautstärke des Tons nimmt ab.

Lösung:

- a) Wir haben die Situation einer bewegten Schallquelle und eines ruhenden Beobachters. Die vom Beobachter wahrgenommene Frequenz ist demnach

$$f_B = f_S \frac{1}{1 - v/c_s} = 531 \text{ Hz.} \quad (7)$$

Hier ist $c_s = 343 \text{ m/s}$ die Schallgeschwindigkeit in Luft.

- b) Antwort 4 ist richtig. Die wahrgenommene Frequenz ist niedriger, da die Schallwellen ursprünglich entgegen der Bewegungsrichtung des Fahrzeugs ausgesendet wurden und an der Wand lediglich reflektiert werden. Die vom Beobachter wahrgenommene Amplitude wird geringer während sich das Fahrzeug auf ihn zubewegt, da die Weglänge, die die Schallwellen von Sender zu Beobachter brauchen, zunimmt. Da Schallwellen typischerweise in einen endlichen Raumwinkel abgestrahlt werden, bedeutet eine grössere Weglänge, ähnlich wie bei Kugelwellen, eine geringere Amplitude. Weiterhin nimmt die Amplitude durch Absorption in der Luft ab.