

Abgabe: –

Serie 13

Aufgabe 1: Entropie im Carnot-Kreisprozess

Eine Carnot-Maschine mit einem idealen Gas als Arbeitsmedium arbeite zwischen zwei thermischen Reservoiren mit einer Temperaturdifferenz von $\Delta T = 200 \text{ K}$. Die Entropieänderung des Mediums während der isothermen Expansion betrage $\Delta S_A = S_2 - S_1 = 83.7 \text{ J/K}$. Wie gross ist die während eines Arbeitszyklus von der Maschine geleistete Arbeit?

Lösung:

Wir betrachten den Carnot-Prozess im ST -Diagramm, siehe Abb. ??.

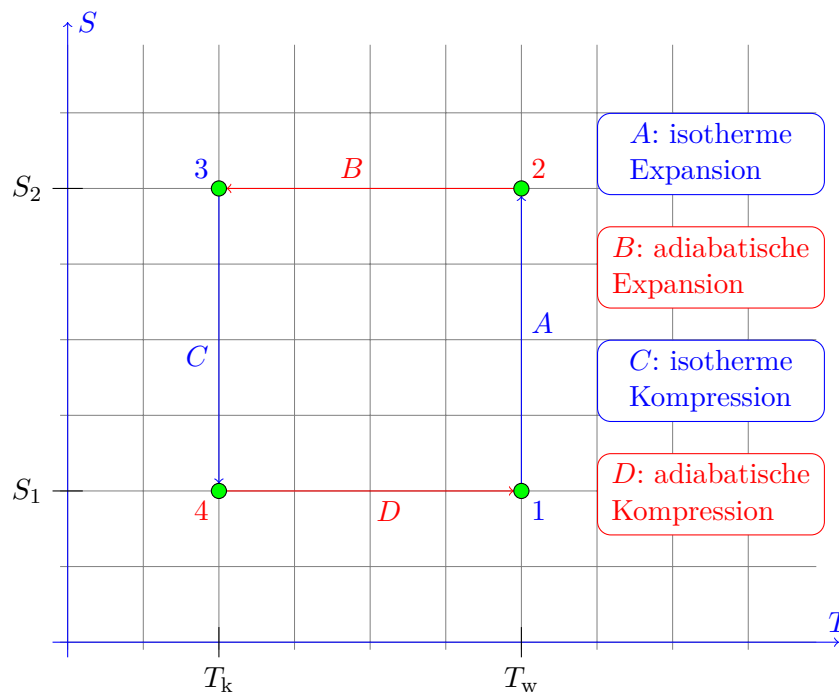


Abbildung 1: ST -Diagramm des Carnot-Kreisprozesses. Die vier Prozessschritte A, B, C, D sind angegeben.

Die eingeschlossene Fläche beschreibt die netto aufgenommene Wärme während eines Zyklus. Für diese gilt:

$$Q_{\text{tot}} = T_w \Delta S_A - T_k \Delta S_A = (T_w - T_k) \Delta S_A = \Delta T \Delta S_A = 200 \text{ K} \cdot 83.7 \frac{\text{J}}{\text{K}} = 16.7 \text{ kJ} \quad (1)$$

Da über einen Zyklus $\Delta U = 0$ gilt (innere Energie ist Zustandsvariable), muss laut 1. Hauptsatz Q_{tot} in Arbeit umgesetzt worden sein:

$$W_{\nearrow} = Q_{\text{tot}} = 16.7 \text{ kJ} \quad (2)$$

Aufgabe 2: Entropie im Stirling-Kreisprozess

Wir betrachten wiederum den Kreisprozess nach Stirling aus Serie 12. Die vier Prozessschritte sind

- 1) Isotherme Expansion.
 - 2) Isochore Abkühlung (konstantes Volumen).
 - 3) Isotherme Kompression.
 - 4) Isochore Erwärmung (konstantes Volumen).
- a) Zeigen Sie durch Betrachtung der Entropieänderungen in den einzelnen Prozessschritten, dass $\Delta S_{\text{System}} = 0$ nach einem Zyklus.
- b) Zeigen Sie explizit, dass $\Delta S_{\text{Umgebung}} > 0$ nach einem Zyklus, indem Sie $\Delta S_{\text{Umgebung}}$ in Abhängigkeit von \tilde{n} , C_V , und der minimalen und maximalen Temperatur des Gases, T_{\min} und T_{\max} , während des Kreisprozesses. Nehmen Sie dabei an, die Umgebung bestehe aus zwei sehr grossen Wärmereservoirs, deren konstante Temperaturen jeweils der minimalen Temperatur T_{\min} und maximalen Temperatur T_{\max} des Gases beim Kreisprozess entsprechen.

Lösung:

- a) Die Entropieänderung des Systems berechnet sich zu

$$\Delta S_{\text{Sys}} = \sum_{i=1}^4 \Delta S_{\text{Sys},i} = \sum_{i=1}^4 \int \frac{dQ_i(T_{\text{Sys}})}{T_{\text{Sys}}}. \quad (3)$$

Um die einzelnen Ausdrücke explizit zu berechnen, bedienen wir uns der Ausdrücke $Q_i \equiv Q_{i \rightarrow i+1}$ aus a).

$$\Delta S_{\text{Sys},1} = \frac{1}{T_1} \int dQ_1 = \frac{\Delta Q_1}{T_1} = \tilde{n}R \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \quad (4)$$

$$\Delta S_{\text{Sys},2} = \int_{T_2=T_1}^{T_3} \frac{\tilde{n}C_V}{T_{\text{Sys}}} dT_{\text{Sys}} = \tilde{n}C_V \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right) \quad (5)$$

$$\Delta S_{\text{Sys},3} = \frac{1}{T_3} \int dQ_3 = \frac{\Delta Q_3}{T_3} = -\tilde{n}R \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \quad (6)$$

$$\Delta S_{\text{Sys},4} = \int_{T_4=T_3}^{T_1} \frac{\tilde{n}C_V}{T_{\text{Sys}}} dT_{\text{Sys}} = \tilde{n}C_V \ln\left(\frac{T_1}{T_3}\right) \quad (7)$$

$$(8)$$

Durch Summation der vier Ausdrücke finden wir $\Delta S_{\text{Sys}} = 0$.

b) Die Entropieänderung der Umgebung berechnet sich zu

$$\Delta S_{\text{Sys}} = \sum_{i=1}^4 \Delta S_{\text{Umg},i} = \sum_{i=1}^4 \int \frac{dQ_i(T_{\text{Umg}})}{T_{\text{Umg}}}. \quad (9)$$

Wir erhalten

$$\Delta S_{\text{Umg},1} = -\frac{1}{T_1} \int dQ_1 = -\frac{\Delta Q_1}{T_1} = -\tilde{n}R \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \quad (10)$$

$$\Delta S_{\text{Umg},2} = -\frac{1}{T_3} \int dQ_2 = -\frac{\Delta Q_2}{T_3} = \frac{\tilde{n}C_V(T_1 - T_3)}{T_3} \quad (11)$$

$$\Delta S_{\text{Umg},3} = -\frac{1}{T_3} \int dQ_3 = -\frac{\Delta Q_3}{T_3} = \tilde{n}R \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \quad (12)$$

$$\Delta S_{\text{Umg},4} = -\frac{1}{T_1} \int dQ_4 = -\frac{\Delta Q_4}{T_1} = \frac{\tilde{n}C_V(T_3 - T_1)}{T_1} \quad (13)$$

$$(14)$$

Durch Summation der vier Ausdrücke finden wir

$$\Delta S_{\text{Umg}} = \tilde{n}C_V \left(\frac{T_1 - T_3}{T_3} + \frac{T_3 - T_1}{T_1} \right) \quad (15)$$

$$= \tilde{n}C_V \frac{T_1^2 - T_3T_1 + T_3^2 - T_1T_3}{T_1T_3} = \tilde{n}C_V \frac{(T_1 - T_3)^2}{T_1T_3} = \tilde{n}C_V \frac{(T_{\text{max}} - T_{\text{min}})^2}{T_{\text{max}}T_{\text{min}}} > 0. \quad (16)$$

Wir weisen darauf hin, dass $\Delta S_{\text{Umg}} > 0$ im Allgemeinen für einen Kreisprozess, der zwischen zwei Wärmereservoirs konstanter Temperatur abläuft, gilt. Die einzige Ausnahme stellt der Carnot-Prozess dar, für welchen $\Delta S_{\text{Umg}} = 0$ gilt. Falls man Wärmetauscher (Regeneratoren) zulässt, die näherungsweise reversibel arbeiten, indem ihre Temperatur der Temperatur des Gases folgt, können auch andere Kreisprozesse wie z. Bsp. der Stirlingprozess näherungsweise reversibel ablaufen und erzeugen somit näherungsweise keine Entropie in der Umgebung.