
Abgabe: 16. Mai 2022

Serie 10

Aufgabe 1: Mikrowelle

Ein üblicher Mikrowellenherd nimmt eine elektrische Leistung von rund 1100 W auf. Schätzen Sie ab, wie lange es dauert, um eine Tasse mit 200 ml Wasser zum Sieden zu bringen, wenn 50% dieser Leistung zum Erwärmen des Wassers genutzt werden.

- ☐ 0.5 min.
- ☐ 1 min.
- ☐ 2 min.
- ☐ 3 min.
- ☐ 4 min.
- ☐ 5 min.

Lösung: Wir haben eine Wassermenge von 200 ml ≈ 200 g bei $T_i = 20^\circ\text{C} = 293\text{ K}$ an. Die Siedetemperatur ist $T_f = 100^\circ\text{C} = 373\text{ K}$. Wir berechnen daraus die Wärmemenge, die benötigt wird um das Wasser zum Sieden zu bringen:

$$\begin{aligned} Q &= m \cdot c_W (T_f - T_i) \\ &= 0.2\text{ kg} \cdot 4.186 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} (373\text{ K} - 293\text{ K}) \approx 67\text{ kJ} \end{aligned} \quad (1)$$

Die Heizdauer ist folglich

$$t = \frac{Q}{0.5 \cdot 1100\text{ W}} = \frac{67000\text{ J}}{0.5 \cdot 1100 \frac{\text{J}}{\text{s}}} \approx 122\text{ s}. \quad (2)$$

Antwort 3 ist richtig.

Aufgabe 2: Ein kühler Drink

Ein 2 l Krug mit Limonade stand bei einer Temperatur von 33°C den ganzen Tag auf einem Gartentisch in der Sonne. Sie giessen nun 0.24 kg der Limonade in einen Styroporbecher und geben zwei Eiswürfel hinein, die jeweils 0.025 kg schwer sind und eine Temperatur von 0°C haben. Die spezifische Schmelzwärme von Wasser ist $\lambda_S = 333\text{ kJ/kg}$.

- a) Welche Temperatur hat die Limonade im Becher, nachdem sich thermisches Gleichgewicht eingestellt hat? Nehmen Sie an, dass keine Wärme an die Umgebung abgeführt wird. Ausserdem können Sie annehmen, dass die Limonade dieselbe spezifische Wärmekapazität c_W hat wie Wasser.
- b) Wie hoch wird die Endtemperatur sein, wenn Sie sechs Eiswürfel in den Becher geben?

Lösung: Die von der Limonade abgegebene Wärmemenge und die von den beiden Eiswürfeln aufgenommene Wärmemenge addieren sich zu null. Die Endtemperatur von Limonade und Wasser im Becher ist T_E .

- a) Die von der Limonade (Li) bis zum Erreichen der Endtemperatur T_E abgegebene Wärmemenge ist

$$Q_{ab} = m_{Li}c_W\Delta T_{Li} = m_{Li}c_W(T_E - T_{A,Li}). \quad (3)$$

Die den Eiswürfeln und dem daraus beim Schmelzen entstandenen Wasser (W) zugeführte Wärmemenge ist

$$Q_{zu} = m_{Eis}\lambda_S + m_{Eis}c_W\Delta T_W = m_{Eis}L_{S,Eis} + m_{Eis}c_W(T_E - T_{A,Eis}), \quad (4)$$

wobei λ_S die spezifische Schmelzwärme des schmelzenden Eis ist. Die abgegebene Wärmemenge und die zugeführte Wärmemenge addieren sich zu null. Daher ist

$$Q_{ab} = -Q_{zu} \quad (5)$$

und somit

$$m_{Li}c_W(T_E - T_{A,Li}) = -m_{Eis}\lambda_S - m_{Eis}c_W(T_E - T_{A,Eis}). \quad (6)$$

Die Endtemperatur ergibt sich durch Umformung der Gleichung, sodass

$$T_E = \frac{m_{Li}c_W T_{A,Li} + m_{Eis}c_W T_{A,Eis} - m_{Eis}\lambda_S}{(m_{Li} + m_{Eis})c_W} = 13.6^\circ\text{C}. \quad (7)$$

- b) Wenn sechs Eiswürfel zugegeben werden, können Sie mit $m_{Eis} = 0.15\text{ kg}$ die Endtemperatur auf dieselbe Weise wie in Schritt 3 der Teilaufgabe a errechnen, sodass

$$T_E = \frac{m_{Li}c_W T_{A,Li} + m_{Eis}c_W T_{A,Eis} - m_{Eis}\lambda_S}{(m_{Li} + m_{Eis})c_W} = -10.3^\circ\text{C}. \quad (8)$$

Das kann nicht stimmen! Keine noch so grosse Eismenge mit einer Temperatur von 0°C kann die warme Limonade unter 0°C herabkühlen. Wo liegt der Fehler?

Sie haben im Schritt 2 der Teilaufgabe a angenommen, dass die ganze Eismenge schmilzt. Aber das ist nicht der Fall. Vielmehr reicht die Wärmemenge, die von der Limonade beim Abkühlen von 33°C auf 0°C abgegeben wird, nicht dazu aus, das ganze Eis zu schmelzen. Also ist die Endtemperatur

$$T_E = 0^\circ\text{C}. \quad (9)$$

Aufgabe 3: Zeppelin

Ein mit Helium gefüllter Zeppelin nimmt Touristen für einen Flug über die Schweizer Bergwelt auf. Der Zeppelin schwebt, wenn die Auftriebskraft, die gleich der Gewichtskraft der verdrängten Luft ist, das Gesamtgewicht des gefüllten Zeppelins kompensiert. Die Masse m_Z von Zeppelinhülle, Fahrerkabine und Touristen beträgt zusammen 1000 kg . Verwenden Sie für die molaren Massen von Luft und Helium $M_L = 0.029\text{ kg mol}^{-1}$ und $M_{He} = 0.004\text{ kg mol}^{-1}$.

- a) Das Gesamtvolumen der verdrängten Luft entspricht für einen Zeppelin in guter Näherung dem Volumen des Heliumgases. Weiterhin entspricht der Druck des Heliums dem Umgebungsdruck der Luft. Wie gross ist unter diesen Annahmen die Gesamtmasse des Heliums, wenn der Zeppelin gerade schwebt?

- b) Welches Volumen hat das Helium für die in a) berechnete Masse bei einem Druck von $p = 105 \text{ kPa}$ und einer Temperatur von $T = 20^\circ\text{C}$?
- c) Nehmen Sie an, Sie wollten nun bei gleichbleibendem Volumen das Heliumgas durch Stickstoff geringeren Drucks ersetzen. Auf welchen Druck müsste man das Stickstoffgas bringen um ein Schweben des Zeppelins zu ermöglichen? Welche Herausforderungen würde ein solcher Druckunterschied beim Bau eines Zeppelins mit sich bringen? Die molare Masse von Stickstoff beträgt $M_{\text{N}_2} = 0.028 \text{ kg mol}^{-1}$.

Lösung:

- a) Beim Schweben herrscht Kräftegleichgewicht, das heisst die Auftriebskraft muss gleich der Summe der Gewichtskräfte sein:

$$F_A = m_L g = \rho_L V_L g = m_Z g + m_{\text{He}} g \implies m_{\text{He}} = \rho_L V_L - m_Z \quad (10)$$

Da natürlich gilt $V_L = V_{\text{He}}$, können wir auch schreiben:

$$m_{\text{He}} = \rho_L V_{\text{He}} - m_Z = \rho_L \frac{m_{\text{He}}}{\rho_{\text{He}}} - m_Z \quad (11)$$

und damit folgt

$$m_{\text{He}} = \frac{m_Z}{\rho_L / \rho_{\text{He}} - 1} \quad (12)$$

Wir müssen also noch das Dichteverhältnis berechnen. Aufgrund der idealen Gasgleichung für ein Mol eines Gases mit molarer Masse M ,

$$pV = RT \implies p \frac{M}{\rho} = RT \quad (13)$$

folgt dass sich bei gleichem Druck und gleicher Temperatur die Dichten von zwei Gasen wie ihre molaren Massen verhalten, das heisst

$$\frac{\rho_L}{\rho_{\text{He}}} = \frac{M_L}{M_{\text{He}}} \quad (14)$$

Damit folgt für die Masse von Helium:

$$m_{\text{He}} = \frac{m_Z}{M_L / M_{\text{He}} - 1}. \quad (15)$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt $m_{\text{He}} = 160 \text{ kg}$.

- b) Wir verwenden die ideale Gasgleichung:

$$pV = \tilde{n}RT \implies V = R \frac{m_{\text{He}}}{M_{\text{He}}} \cdot \frac{T}{p}. \quad (16)$$

Einsetzen liefert $V = 929 \text{ m}^3$, wobei die Stoffmenge $\tilde{n} = 40\,000 \text{ mol}$ beträgt.

- c) Die gesamte Gasmasse muss gleich bleiben, damit der Zeppelin gerade schwebt. Der Zeppelin müsste somit

$$\tilde{n}_{\text{N}_2} = \frac{m_{\text{N}_2}}{M_{\text{N}_2}} = \frac{m_{\text{He}}}{M_{\text{He}}} \frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{N}_2}} = \tilde{n}_{\text{He}} \frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{N}_2}} \quad (17)$$

mol Stickstoff enthalten.

Mit der ideale Gasgleichung finden wir den Druck

$$p_{\text{N}_2} = \frac{\tilde{n}_{\text{N}_2} RT}{V} = \frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{N}_2}} p = 15 \text{ kPa.} \quad (18)$$

Dieser Druck ist sehr gering (etwa ein Siebtel des Luftdrucks). Da die Oberfläche des Zeppelings gross ist, resultiert daraus eine entsprechend grosse Kraft auf seine Hülle, die wahrscheinlich nicht stark genug ist.

Aufgabe 4: Arbeit im pV -Diagramm

Ein Mol eines zweiatomigen idealen Gases werde entlang einer Gerade im pV -Diagramm von Zustand 1 auf Zustand 2 expandiert (siehe Abb. 1). Anschliessend werde es isotherm von Zustand 2 auf Zustand 1 komprimiert. Berechnen Sie die gesamte Arbeit, die in diesem Zyklus am Gas verrichtet wird.

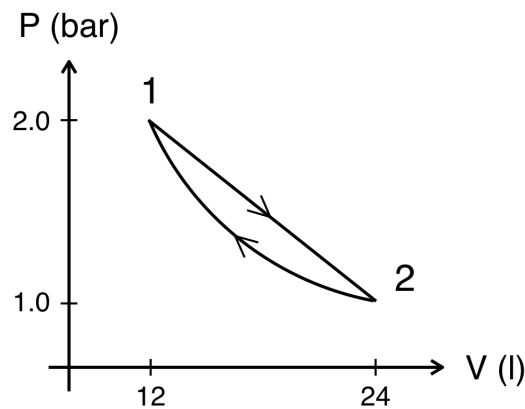


Abbildung 1: pV -Diagramm

Lösung:

Wir berechnen zunächst den Teilprozess $1 \rightarrow 2$. Hier ist p eine lineare Funktion des Volumens.

$$p = p(V) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} (V - V_1) \quad (19)$$

Die Arbeit, die am Gas verrichtet wird, ist

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (20)$$

$$= - \int_{V_1}^{V_2} \left[p_1 + \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} \right] dV \quad (21)$$

$$= - \left[p_1 (V_2 - V_1) + \frac{1}{2} \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} (V_2 - V_1)^2 \right] \quad (22)$$

Mit

$$p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad (23)$$

$$p_2 = 10^5 \text{ Pa} \quad (24)$$

$$V_1 = 12l = \frac{12}{1000} \text{ m}^3 \quad (25)$$

$$V_2 = 24l = \frac{24}{1000} \text{ m}^3 \quad (26)$$

folgt

$$W_{1 \rightarrow 2} = -1800J. \quad (27)$$

Teilprozess $2 \rightarrow 1$: isotherme Kompression

$$W_{2 \rightarrow 1} = - \int_{V_2}^{V_1} p dV = - \int_{V_2}^{V_1} \frac{nRT}{V} dV \quad (28)$$

$$= -nRT \ln \frac{V_1}{V_2} \quad (29)$$

$$= -p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \quad (30)$$

$$= 1663.6 \text{ J} \quad (31)$$

$$\Rightarrow W_{\text{tot}} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 1} \quad (32)$$

$$= -136.4J \quad (33)$$

Das Gas leistet also insgesamt mehr Arbeit als es aufnimmt. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Gases spielt für die Berechnung der geleisteten Arbeit keine Rolle.