

Abgabe: 21. März 2022

Serie 03

Aufgabe 1: Autofahrt über Bodenwelle [$\Sigma 10$]

Ein Fahrzeug der Masse M fährt über eine Strasse mit starken Bodenwellen. Die Bodenwellen seien durch ein sinusförmiges Profil beschrieben. Der Abstand zwischen zwei Minima sei L . Das Auto bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v in horizontaler Richtung fort. Die Räder des Autos seien durch ein einzelnes Rad modelliert, dass über eine Feder mit Federkonstante k mit dem Auto verbunden ist. Die vertikale Auslenkung des Autos aus dessen Ruhelage an einem Punkt mit maximaler Steigung sei z (siehe Abb.). Die Räder berühren stets den Boden.

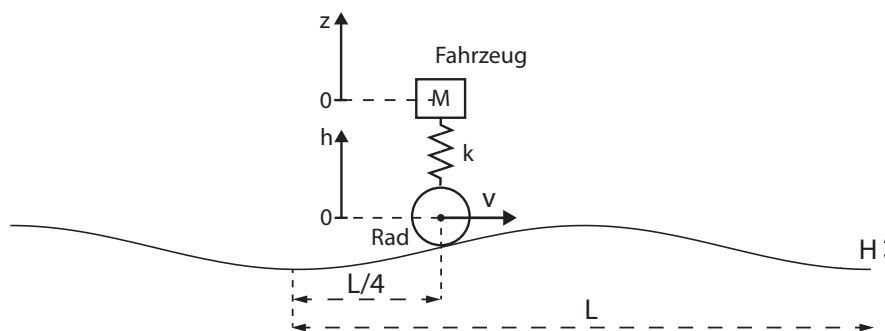


Abbildung 1: Schematische Darstellung eines Autos auf einer Strasse mit sinusförmigem Profil.

- a) Bestimmen Sie die vertikale Trajektorie $h(t)$ des Schwerpunkt des Rades als Funktion der Zeit t (siehe auch Abb.). [1]

Lösung: Da das Rad mit dem Boden verbunden ist, folgt es dem sinusförmigen Verlauf der Bodenwellen $h(x) = \frac{H}{2} \cdot \sin(2\pi x/L)$ ([0.5]), wobei die horizontale Position $x = v \cdot t$ durch die horizontale Geschwindigkeit des Autos gegeben ist:

$$h(t) = \frac{H}{2} \cdot \sin(2\pi vt/L) \quad [0.5]$$

Kommentar: Da nicht spezifiziert ist, zu welcher Zeit sich das Auto an welcher Position der Bodenwelle befindet, könnte man auch eine Phase mit in das Argument des Sinus aufnehmen. Diese ist jedoch in der Aufgabe nicht von Relevanz und wurde daher gleich Null gesetzt.

- b) Welche Kraft wird über die Feder auf das Auto übertragen? Wie lautet demnach die Bewegungsgleichung für die vertikale Auslenkung z des Autos? [2]

Lösung:

Die auf das Auto (in z-Richtung) wirkende Federkraft ist durch die Längenänderung der Feder $z - h$ relativ zur Ruhelänge bestimmt und lautet demnach

$$\begin{aligned} F_k(z) &= -k \cdot (z - h(t)), & [0.5] \\ &= -k \cdot \left(z - \frac{H}{2} \cdot \sin(2\pi vt/L)\right). & [0.5] \end{aligned}$$

Die entsprechende Bewegungsgleichung für die Masse M lautet

$$M\ddot{z} = F_k(z) = -k \cdot \left(z - \frac{H}{2} \cdot \sin(2\pi vt/L)\right). \quad [1]$$

Die konstante Gravitationskraft ist bereits in der Gleichgewichtsposition des Autos berücksichtigt.

- c) Finden Sie die stationäre Lösung¹ dieser Bewegungsgleichung und berechnen Sie die Schwingungsamplitude z_0 in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v . Unter welcher Bedingung an die Geschwindigkeit v tritt eine Resonanz auf? [3]

Lösung: Durch Umformung finden wir folgende Form

$$M\ddot{z} + k \cdot z = k \frac{H}{2} \cdot \sin(2\pi vt/L), \quad [0.5] \quad (1)$$

die einem getriebenen, ungedämpften, harmonischen Oszillator ([0.5] fürs Erkennen) mit Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{k/M},$$

Antriebskraft

$$F_a = k \frac{H}{2},$$

und Antriebsfrequenz

$$\Omega = 2\pi v/L$$

entspricht.

Nach dem Einschwingvorgang können wir für die Lösung den Ansatz

$$z(t) = z_0 \cdot \sin(\Omega t)$$

machen, der durch Einsetzen in Gleichung 1

$$(-\Omega^2 \cdot M + k) \cdot z_0 \cdot \sin(\Omega t) = F_a \cdot \sin(\Omega t)$$

zur Gleichgewichtsamplitude

$$z_0 = \frac{F_a}{M \cdot (\omega^2 - \Omega^2)} \quad [0.5]$$

¹Obwohl wir in unserer bisherigen Betrachtung Dämpfung vernachlässigt haben, nehmen an, dass jedes realistische, schwingfähige System eine endliche Dämpfung hat, und somit die stationäre Lösung unabhängig von den Anfangsbedingungen ist.

und zur Gesamtlösung

$$z(t) = \frac{F_a}{M \cdot (\omega^2 - \Omega^2)} \cdot \sin(\Omega t) \quad [0.5] \quad (2)$$

führt. Resonanz tritt auf, wenn $\Omega = \omega$ [0.5], also für die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{k/M} \cdot \frac{L}{2\pi}. \quad [0.5]$$

- d) Berechnen Sie die maximale Beschleunigung a_{\max} der Masse M im Falle der beschriebenen Radaufhängung mit Feder und für den Fall einer starren Radaufhängung. Vergleichen Sie die beiden Fälle. Welche zusätzliche Eigenschaft sollte ein realer Stossdämpfer besitzen um die vertikale Beschleunigung des Fahrzeugs zu reduzieren? [4]

Lösung: Im Fall der Federverbindung benutzen wir die gefundene Lösung für $z(t)$ (Gleichung 2) und erhalten durch zweimaliges Differenzieren nach der Zeit

$$\ddot{z}(t) = -z_0 \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega t). \quad [0.5] \quad (3)$$

Die resultierende maximale Beschleunigung ist dann

$$a_{\max,1} = z_0 \cdot \Omega^2 \quad (4)$$

$$= \frac{F_a}{M \cdot (\omega^2 - \Omega^2)} \cdot \Omega^2 \quad (5)$$

$$= \frac{H}{2} \cdot \frac{\omega^2 \Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad [0.5] \quad (6)$$

Im Fall einer starren Verbindung zwischen Rad und Fahrzeug folgt das Fahrzeug der Bewegung des Rades

$$z(t) = \frac{H}{2} \cdot \sin(\Omega t), \quad [0.5] \quad (7)$$

sodass die maximale Beschleunigung in analoger Rechnung durch

$$a_{\max,2} = \frac{H}{2} \cdot \Omega^2 \quad [0.5] \quad (8)$$

gegeben ist. Der Quotient der Beschleunigungen

$$\frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \quad [0.5] \quad (9)$$

zeigt klar, dass die Federaufhängung die Beschleunigung im Vergleich zur starren Radaufhängung niemals reduziert. [0.5] Ein realer Stossdämpfer sollte daher zusätzlich zur Federung noch eine Dämpfung besitzen. [0.5] Die Dämpfung reduziert die Amplitude z_0 im Bereich um die Resonanzfrequenz erheblich und vermindert so auch die maximale Beschleunigung. [0.5]

Aufgabe 2: Schwingungsisolierung [$\sum 11.5$]

Eine Gattersäge wird in einem Sägewerk verwendet, um Holz in industriellem Massstab zu sägen. Die periodische Bewegung des Sägeblattes erzeugt eine periodische Kraft der Form $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, mit Amplitude F_0 und Frequenz Ω , auf das Fundament dieser Sägemaschine. Damit die Kraft nicht direkt auf den Boden übertragen wird und diesen zum Schwingen bringt, wird das Fundament mitsamt der Maschine (Gesamtmasse m) elastisch auf Stahlfedern aufgestellt. Die Aufstellung kann effektiv durch eine einzige Feder mit Federkonstante k beschrieben werden. Ein Modell der Aufstellung ist in Abbildung 2 gezeigt.

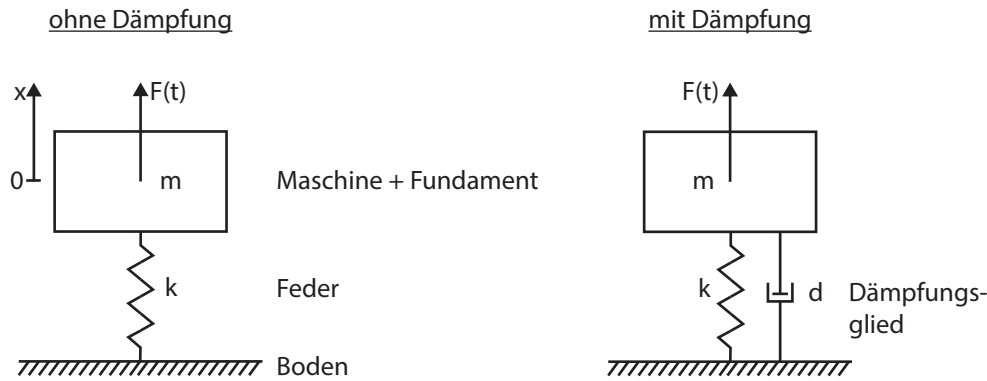


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Maschinenaufstellung. Links: Situation ohne Dämpfung (Aufgaben a-d). Rechts: Situation mit eingebautem Dämpfungsglied (Aufgabe e).

- a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für die Auslenkung x der Gesamtmasse m aus der Ruhelage. Lösen Sie diese für den stationären Fall mit dem Ansatz $x(t) = x_0 \cos(\Omega t)$. Drücken Sie die erhaltene Amplitude x_0 als Funktion von $\eta = \Omega/\omega_0$ aus, wobei $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ die Eigenfrequenz des schwingfähigen Systems bezeichnet. [2]

Lösung: Es handelt sich um eine erzwungene Schwingung ohne Dämpfung, wobei die Trägheitskraft $F_a = m\ddot{x}$ gleich der Summe aus Federkraft $F_k = -kx$ und periodischer Antriebskraft $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ ist

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos \Omega t. \quad [1]$$

Wir setzen den gegebenen Ansatz $x(t) = x_0 \cos(\Omega t)$ in die obige Gleichung ein und lösen nach x_0 auf: [0.5]

$$-m\Omega^2 x_0 \cos(\Omega t) = -kx_0 \cos(\Omega t) + F_0 \cos(\Omega t) \quad [11]$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} \quad [12]$$

Im nächsten Schritt ziehen wir $\frac{F_0}{k}$ aus dem Bruch heraus und benutzen zuerst $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ und danach $\eta = \Omega/\omega_0$, um das Endergebnis zu erhalten: [0.5]

$$x_0 = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m\Omega^2}{k}} \quad [13]$$

$$= \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}} \quad [14]$$

$$= \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \eta^2} \quad [15]$$

- b) Begründen Sie warum die von der Maschine auf den Boden übertragene periodische Kraft durch $F_B(t) = kx(t)$ gegeben ist. Berechnen Sie die Amplitude $F_{B,0}$ dieser Kraft in Abhängigkeit von η . [2]

Lösung: Nach dem 3. Newton'schen Gesetz gibt es zu der Federkraft $F_k = -kx$ auf die Gesamtmasse m eine betragsmässig gleiche Gegenkraft $F_k' = kx$ auf die Feder (mit umgekehrtem Vorzeichen).

Diese Kraft wird von der Feder auf den Boden übertragen. [0.5]

Die Schwingung der Federauslenkung $x(t)$ führt dann zu einer periodischen Kraft auf den Boden [0.5]

$$F_B(t) = F_k' = kx(t) \quad (16)$$

$$= F_0 \cdot \frac{1}{1 - \eta^2} \cdot \cos(\Omega t), \quad (17)$$

wobei die Lösung für $x(t)$ aus Aufgabenteil a) verwendet wurde. Die Amplitude der Kraft beträgt [0.5]

$$F_{B,0} = F_0 \cdot \frac{1}{1 - \eta^2}. \quad (18)$$

- c) Bestimmen Sie $|F_{B,0}|$ für die drei Fälle $\eta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 1$ und $\eta \rightarrow \infty$. Skizzieren Sie basierend auf diesen Grenzwerten den Betrag der Amplitude der Kraft $|F_{B,0}|$ als Funktion von η . [2]

Lösung:

Wir betrachten die Grenzfälle separat

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} |F_{B,0}| = F_0 \quad (19)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} |F_{B,0}| = \infty \quad (20)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} |F_{B,0}| = 0 \quad (21)$$

Anhand dieser Grenzfälle können wir die Resonanzkurve in Abbildung 3 skizzieren . [0.5]

- d) Wie sollte ω_0 gewählt werden, damit möglichst wenig Kraft auf den Boden übertragen wird? Berechnen Sie speziell die Bedingung an ω_0 , unter welcher weniger als 5% der betriebsbedingten Kraft F_0 auf den Boden übertragen werden? [2]

Lösung: Nach Aufgabenteil c) sollte ein möglichst hohes η ($\eta \gg 1$) gewählt werden, um die Kraft, die auf den Boden übertragen wird, zu minimieren. Dies entspricht einem möglichst kleinen ω_0 . [0.5]

In diesem Fall gilt $|F_{B,0}| = F_0 \cdot \left| \frac{1}{1 - \eta^2} \right| = F_0 \cdot \frac{1}{\eta^2 - 1}$ und wir erhalten als Lösung

$$|F_{B,0}| \leq 0.05 \cdot F_0 \quad [0.5] \quad (22)$$

$$\Leftrightarrow F_0 \cdot \frac{1}{\eta^2 - 1} \leq 0.05 \cdot F_0 \quad [0.5] \quad (23)$$

$$\Leftrightarrow \eta^2 - 1 \geq 20 \quad (24)$$

$$\Rightarrow \eta \geq \sqrt{21} \Rightarrow \omega_0 \leq \frac{\Omega}{\sqrt{21}} \quad [0.5] \quad (25)$$

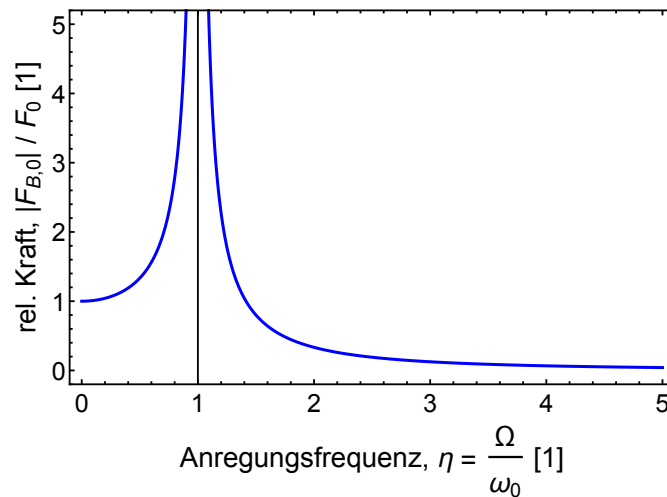


Abbildung 3: Skizze der Resonanzkurve für eine ungedämpfte, erzwungene Schwingung.

Hier ist nur die positive Lösung der quadratischen Gleichung korrekt, da die Frequenzen Ω und ω_0 , sowie deren Verhältnis η , positiv sind.

- e) Nun wird noch ein viskoses Dämpfungsglied in die Maschinenanstellung eingebaut, siehe Abb. 2 rechts. Die damit verbundene Dämpfungskraft $F_R = -d\dot{x}$, mit Dämpfungskonstante d , führt nach dem 3. Newton'schen Axiom ebenfalls zu einer Gegenkraft auf den Boden. Die Auslenkung der gedämpften, getriebenen Schwingung lautet

$$x_D(t) = x_{D,0} \cos(\Omega t + \varphi), \quad (26)$$

mit

$$x_{D,0} = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}}, \quad (27)$$

$$\xi = \frac{d}{2m\omega_0}, \quad (28)$$

und der Phase φ , deren Ausdruck hier nicht relevant ist. Geben Sie für diesen Fall die auf den Boden übertragene Gesamtkraft $F_B(t)$ an und berechnen Sie wiederum den Betrag der Amplitude dieser Kraft, d.h. $|F_{B,0}|$.

Wie beeinflusst die Dämpfung diese Kraftamplitude $|F_{B,0}|$ für die zwei Fälle $\eta \simeq 1$ (nahe Resonanz) und $\eta \gg 1$? Was leiten Sie daraus für die geeignete Wahl von ξ ab? [3.5]

Lösung:

Im gedämpften Fall beträgt die periodische Gesamtkraft auf den Boden

[1]

$$F_B = k \cdot x_D(t) + d \cdot \dot{x}_D(t) \quad (29)$$

$$= k \cdot x_{D,0} \cdot \cos(\Omega t + \phi) - d \cdot \Omega \cdot x_{D,0} \cdot \sin(\Omega t + \phi) \quad (30)$$

und hat die Amplitude

[0.5]

$$|F_{B,0}| = \sqrt{(k \cdot x_{D,0})^2 + (d \cdot \Omega \cdot x_{D,0})^2}. \quad (31)$$

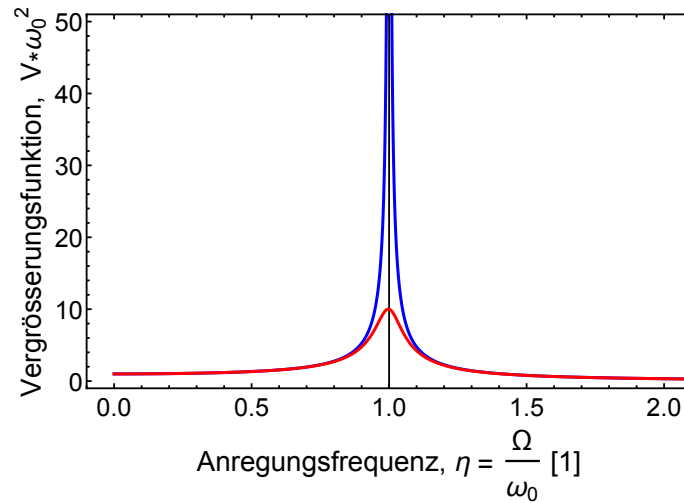


Abbildung 4: Vergrößerungsfunktion $V(\eta)$ für $\xi = 0$ (blau) und $\xi = 0.05$ (rot).

Für den Resonanzfall ($\eta = 1$) ist klar, dass die Gesamtkraft durch die Dämpfung kleiner wird, da sie im ungedämpften Fall divergiert, mit einer (noch so kleinen) Dämpfung aber endlich bleibt. Dieser Umstand wird in Abbildung 4 verdeutlicht, in der die Vergrößerungsfunktion $V(\eta)$ (siehe Skript) für den ungedämpften Fall ($\xi = 0$, blau) und den gedämpften Fall ($\xi = 0.05$, rot) abgebildet ist. [0.5]

Für den Fall ($\eta \gg 1$) haben wir $x_{D,0} \approx x_0$. Dies ist auch aus Abb. 4 ersichtlich. D.h. in diesem Regime ist die *von der Feder* auf den Boden ausgeübte Kraft mit und ohne Dämpfung ungefähr gleich. Die *Gesamtkraft* auf den Boden wird in diesem Fall durch das Dämpfungsglied noch vergrößert, da sie zu einer zusätzlichen Komponente in der Gesamtkraft führt. [0.5]

Diese Kraftkomponente gewinnt mit steigendem η mehr und mehr an Bedeutung im Vergleich zur Federkraft, $\frac{d \cdot \Omega \cdot x_{D,0}}{k \cdot x_{D,0}} = 2\xi\eta$. [0.5]

In Anbetracht dieser beiden Grenzfälle sollte die Dämpfung weder zu gross noch zu klein gewählt werden. [0.5]