

---

Abgabe: 2. Mai 2022

## Serie 08

### Aufgabe 1: Stimmen einer Geige

Um seine Geige zu stimmen, stimmt ein Geiger zunächst die a-Saite auf 440 Hz und streicht danach jeweils zwei nebeneinander liegende Saiten gleichzeitig, um eine Schwebung zu erzeugen. Wenn er die a- und die e-Saite gleichzeitig streicht, entsteht durch eine Schwebung ein Ton, der mit einer Frequenz von 3 Hz seine Lautstärke ändert. Die Schwebungsfrequenz nimmt zu, wenn die Zugkraft der e-Saite erhöht wird. Die e-Saite soll auf eine Frequenz von 660 Hz gestimmt werden.

- Wie entsteht die Schwebung bei 3 Hz? *Hinweis: Beim Streichen einer Geigensaite werden neben der Fundamentalschwingung auch höhere Harmonische angeregt.*
- Bei welcher Frequenz schwingt die e-Saite, wenn durch die Schwebung ein Ton entsteht, der mit einer Frequenz von 3 Hz seine Lautstärke ändert.
- Mit welcher Zugkraft sollte man die e-Saite idealerweise spannen, wenn die Beobachtung aus b) bei einer Zugkraft von 80 N auftritt?

### Lösung:

- Wird die a-Saite gestrichen, so klingen neben der Fundamentalmode bei 440 Hz auch höhere Harmonische an, z.B.

$$\begin{cases} f_1 = 440 \text{ Hz} \\ f_2 = 880 \text{ Hz} \\ f_3 = 1320 \text{ Hz} \\ f_4 = 1760 \text{ Hz} \\ \dots \end{cases} \quad (1)$$

Das Gleiche passiert mit der e-Saite:

$$\begin{cases} f_1 = 660 \text{ Hz} \\ f_2 = 1320 \text{ Hz} \\ f_3 = 1980 \text{ Hz} \\ \dots \end{cases} \quad (2)$$

Die dritte Harmonische der a-saite hat die gleiche Frequenz wie die zweite Harmonische der e-saite, nämlich 1320 Hz. Die Schwebung kommt also dadurch zustande, dass die Fundamentalfrequenz der e-saite leicht von 660 Hz abweicht.

- b) Da die Schwebungsfrequenz mit steigender Spannkraft ansteigt, muss die Frequenz der e-saite höher als 660 Hz sein, und wir erhalten

$$f_e = 660 \text{ Hz} + \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ Hz} = 661.5 \text{ Hz}. \quad (3)$$

Der Faktor 1/2 kommt daher, dass die zweite Harmonische um 3 Hz abweicht und die Grundfrequenz somit um die Hälfte davon.

- c) Die Frequenz der Saite ist gegeben durch

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F_s}{\mu}},$$

mit  $\begin{cases} v & - \text{ Geschwindigkeit} \\ \lambda & - \text{ Wellenlänge} \\ F_s & - \text{ Zugkraft} \\ \mu & - \text{ lineare Dichte} \end{cases} \quad (4)$

Um die Zugkraft zu bestimmen, benutzen wir die folgenden zwei Gleichungen:

$$661.5 \text{ Hz} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F_{661.5 \text{ Hz}}}{\mu}} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{80 \text{ N}}{\mu}} \quad (5)$$

$$660 \text{ Hz} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F_{660 \text{ Hz}}}{\mu}} \quad (6)$$

Dividieren von (6) durch (5) und Auflösen nach  $F_{660 \text{ Hz}}$  liefert

$$F_{660 \text{ Hz}} = 80 \text{ N} \cdot \left( \frac{660 \text{ Hz}}{661.5 \text{ Hz}} \right)^2 \cong 79.6 \text{ N}. \quad (7)$$

## Aufgabe 2: Orgelpfeife

Eine Orgelpfeife hat eine Länge von 1.23 m.

- Die Orgelpfeife sei an beiden Enden offen und mit Luft gefüllt. Berechnen Sie die Frequenzen der ersten drei Harmonischen durch Berücksichtigung der Randbedingungen an die longitudinale Auslenkung der Luftmoleküle.
- Ein Ende der Orgelpfeife sei nun geschlossen. Wie verändert sich die Frequenz der Fundamentalschwingung?
- An welchem Ende der Orgelpfeife wuerde ein kleines, in die Pfeife eingebrachtes Mikrophon die höchste Lautstärke messen? Nehmen Sie hierzu an, dass die gemessene Lautstärke in guter Näherung nur vom Schalldruck abhängt.

- d) Die Pfeife sei nun wieder an beiden Enden offen und mit Helium durchflutet. Die dritte Harmonische hat dabei eine Frequenz von 1196 Hz. Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit in Helium.

**Lösung:**

- a) Die Schwingung muss an beiden Enden einen Auslenkungsbauch haben, siehe Abb. 1. Für die ersten drei Harmonischen gilt:

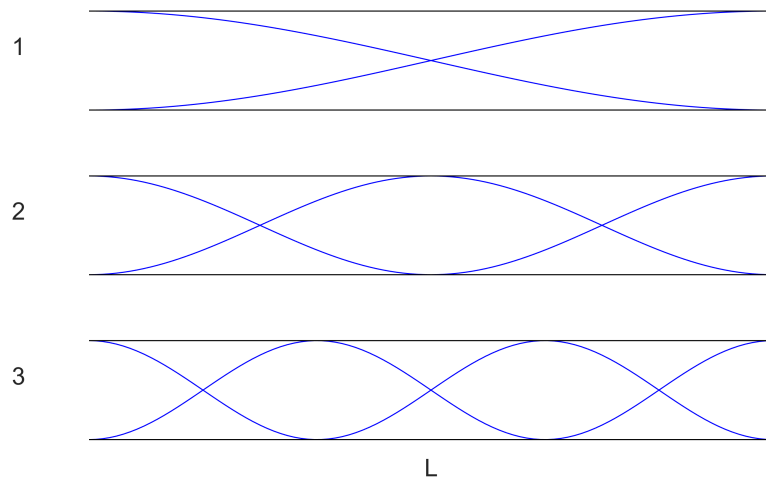


Abbildung 1: Harmonische einer offenen Pfeife. Die zwei blauen Linien stellen jeweils die maximale und minimale horizontale Auslenkung der Luftmoleküle aus ihrer Gleichgewichtslage dar.

1. Harmonische (Fundamentalmode)

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2L \\ f_1 &= \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}\end{aligned}\tag{8}$$

2. Harmonische (1. Oberschwingung)

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= L \\ f_2 &= \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L}\end{aligned}\tag{9}$$

3. Harmonische (2. Oberschwingung)

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \frac{2L}{3} \\ f_3 &= \frac{v}{\lambda_3} = \frac{3v}{2L}\end{aligned}\tag{10}$$

Für  $v = 343 \text{ m/s}$  und  $L = 1.23 \text{ m}$  erhalten wir

$$\begin{aligned}f_1 &\cong 139 \text{ Hz} \\ f_2 &\cong 279 \text{ Hz} \\ f_3 &\cong 418 \text{ Hz}\end{aligned}\tag{11}$$

- b) Die Schwingung muss einen Auslenkungsknoten am geschlossenen Ende und einen Auslenkungsbauch an ihrem offenen Ende aufweisen, siehe Abb. 2.

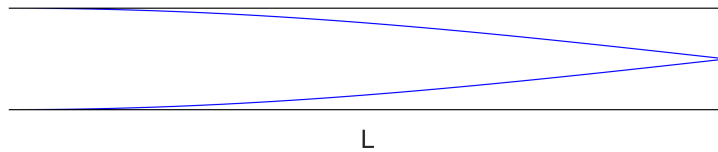


Abbildung 2: Fundamentalschwingung einer einseitig geschlossenen Orgelpfeife

Die Frequenz der Fundamentalmode berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 4L \\ f_1 &= \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L} \cong 70 \text{ Hz}\end{aligned}\tag{12}$$

- c) Bis jetzt haben wir für unsere Betrachtung der stehenden Wellen in den Orgelpfeifen lediglich die (longitudinale) Auslenkung der Luftmoleküle aus ihrer Gleichgewichtslage betrachtet. Das menschliche Gehör und ein Mikrophon reagieren jedoch auf Druckänderungen. Druckbäuche sind mit Auslenkungsknoten assoziiert (und umgekehrt Druckknoten mit Auslenkungsbauchen), siehe Skript. Deswegen würde ein in die Pfeife eingebrachtes Mikrophon am geschlossenen Ende die höchste Lautstärke messen.
- d) Da die Pfeife wie in a) an beiden Enden offen ist, muss für die  $n$ -te Harmonische ( $(n - 1)$ -te Oberschwingung) gelten:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{2L}{n} \\ f_n &= \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}\end{aligned}\tag{13}$$

Die 3. Harmonische schwingt bei 1196 Hz und demnach ist die Schallgeschwindigkeit in Helium

$$v = \frac{2Lf_3}{3} \cong 981 \frac{\text{m}}{\text{s}}.\tag{14}$$

### Aufgabe 3: Sprechrohr

Schallwellen können an einer Grenzschicht Totalreflexion erfahren, d.h. beim Übergang von einem Medium in das andere Medium werden die Wellen gänzlich reflektiert und es findet keine Brechung statt. Diesen Effekt nutzte man früher aus, um gesprochene Nachrichten mit Hilfe eines Sprechrohrs zu übermitteln, z.B. auf einem Schiff. Welches Sprechrohr eignet sich am besten: ein Gummischlauch, ein Holzrohr oder ein Stahlrohr? Begründen Sie Ihre Wahl. Welche Form sollte das Sprechrohr haben? Die Schallgeschwindigkeit in Gummi ist  $v_s = 150 \text{ m/s}$ , in Holz  $v_s = 3300 \text{ m/s}$  und in Stahl  $v_s = 5850 \text{ m/s}$ .

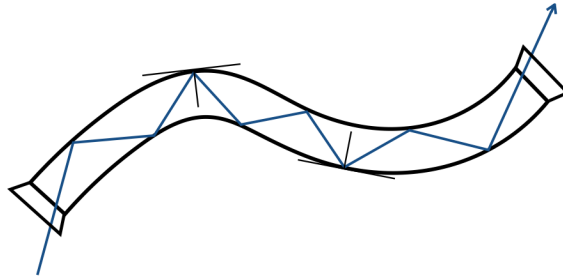


Abbildung 3: Sprechrohr

### Lösung:

Damit die Schallwellen das Sprechrohr nicht seitlich verlassen, sollte das gewählte Material zu Totalreflexionen führen.

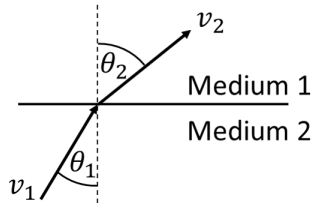


Abbildung 4: Grenzfläche zwischen zwei Medien.

Das Brechungsgesetz lautet

$$(\sin \theta_1) v_2 = (\sin \theta_2) v_1. \quad (15)$$

Da  $\sin \theta_2$  maximal 1 sein kann, definiert  $\sin \theta_c = v_1/v_2$  den Grenzwinkel zur Totalreflektion, d.h.  $\theta_1 > \theta_c$  führt zur Totalreflektion.

Wir betrachten nacheinander den Übergang von Luft zu den drei vorgeschlagenen Materialien für das Sprechrohr:

Gummi:

$$\theta_c = \arcsin \frac{v_{\text{Luft}}}{v_{\text{Gummi}}} = \arcsin \frac{343}{150} \quad (16)$$

nicht definiert!  $\Rightarrow$  keine Totalreflektion möglich

Holz:

$$\theta_c = \arcsin \frac{343}{3300} = 0.104 = 5.97^\circ \quad (17)$$

Totalreflektion für  $\theta_1 > 5.97^\circ$

Stahl:

$$\theta_c = \arcsin \frac{343}{5850} = 0.059 = 3.36^\circ \quad (18)$$

Totalreflektion für  $\theta_1 > 3.36^\circ$

Sowohl Holz auch als Stahl sind nahezu gleich gut geeignet, um Schallwellen zu leiten. Ein Gummischlauch leitet den Schall nicht. Bei der Konstruktion des Sprechrohrs sollten zudem enge Biegungen vermieden werden. Grosse Krümmungsradien führen zu flachen Einfallswinkeln, was für eine Totalreflexion vorteilhaft ist.

Weiterhin sollte man bei der Wahl des Materials die unterschiedlichen Dämpfungseigenschaften in Betracht ziehen.

#### Aufgabe 4: Lautsprecher [ $\sum 11$ ]

Eine sich im Ursprung befindende punktförmige Schallquelle sendet einen Ton der Frequenz  $f = 343 \text{ Hz}$  in Richtung der positiven  $x$ -Achse aus. Eine zweite, identische punktförmige Schallquelle befindet sich im Abstand  $d = 10 \text{ m}$  entfernt auf der  $x$ -Achse (Koordinate  $x = 10 \text{ m}$ ,  $y = 0$ ) und sendet einen Ton der gleichen Amplitude  $A$ , gleicher Frequenz  $f$  und gleicher Phase  $\phi$  in Richtung der negativen  $x$ -Achse, siehe Abbildung 5 i).

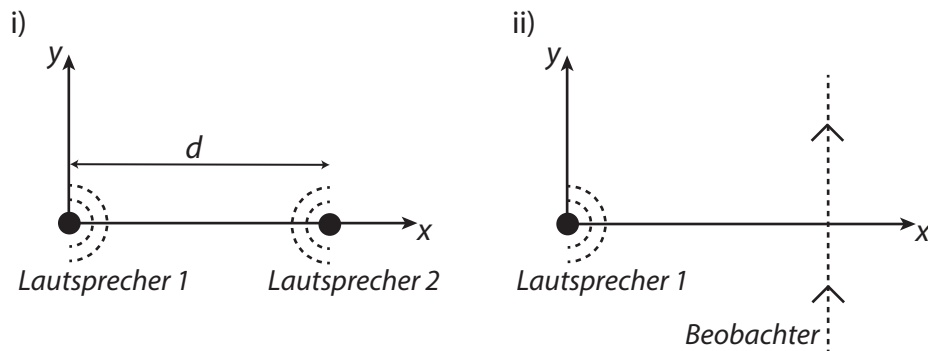


Abbildung 5: **Lautsprecher**

- a) Wie viele Intensitätsminima entstehen auf der Verbindungslinie zwischen beiden Lautsprechern? Die Schallgeschwindigkeit beträgt  $v_s = 343 \text{ m/s}$ . [2]

**Lösung:** Kurze Variante: Die Wellenlänge beträgt  $\lambda = v_s/f = 1 \text{ m}$ . Da sich in der Mitte der Verbindungslinie zwischen den beiden Lautsprechern ein Maximum befindet und der Abstand zwischen zwei Intensitätsminima  $\lambda/2$  ist, berechnet sich die Anzahl der Minima zu  $d/(\lambda/2) = 20$ .

Alternativ können die beiden Punkte auch mit der folgenden langen Variante erreicht werden: Wenn die beiden Wellen aufeinander treffen, kommt es zu einer Superposition, und da die beiden Wellen entgegengerichtet sind zu einer stehenden Welle. Für die Berechnung der Position der Minima approximieren wir die interferierenden Kugelwellen als zwei ebene Wellen. Die allgemeine Beschreibung einer stehenden ebenen Welle ist

$$y(x, t) = A^* \cos(kx - \delta/2) \cos(\omega t - \delta/2)$$

wobei  $A^*$  eine effektive Amplitude der stehenden Welle ist,  $k$  der Wellenvektor,  $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz und  $\delta$  die zusätzliche Phasenverschiebung zwischen den beiden Wellen, welche in diesem Fall gemäss Aufgabenstellung Null ist.

Die Intensitätsminima der Welle ereignen sich nun also dort, wo der ortsabhängige Term  $\cos(kx)$  gerade Null ist. Die notwendige Bedingung dafür ist, dass

$$kx = n\pi/2$$

mit  $n$  ungerade und ganzzahlig. Nutzen wir, dass

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v_s} = 2\pi \frac{1}{\text{m}},$$

sehen wir dass diese Bedingung auf der Strecke von 10 m gerade erfüllt ist für 20 verschiedene erlaubte Werte von  $n$ . Damit gibt es 20 Nullstellen.

- b) Welche Intensitätsminima sind am ausgeprägtesten, d.h. bei welchen  $x$ -Koordinaten haben die Minima auf der Verbindungslinie zwischen beiden Lautsprechern die geringste Intensität? Argumentieren Sie qualitativ, indem Sie berücksichtigen, dass die Amplitude einer Schallwelle im 3-dimensionalen Raum mit zunehmendem Abstand zu ihrer Quelle abnimmt. [2]

**Lösung:** In einer realistischeren Betrachtung haben wir es nicht wie in Aufgabe a) approximiert mit zwei ebenen Wellen zu tun, sondern mit zwei Kugelwellen, deren Amplitude jeweils mit grösserem Abstand  $|r|$  abnimmt (proportional zu  $\frac{1}{r^2}$ ). Damit ist die effektive Amplitude der stehenden Welle  $A^*$  (siehe Teilaufgabe a)) dort am kleinsten, wo die Differenz der beiden Amplituden am kleinsten ist. Dies ist in der Mitte der Strecke der Fall. Da die Intensitätsminima aus a) symmetrisch um den Streckenmittelpunkt der beiden Quellen verteilt sind, haben die beiden Minima bei  $x = 4.75 \text{ m}$  und  $x = 5.25 \text{ m}$  die kleinste Amplitude.

- c) Welche Phase  $\phi \in [0, 2\pi)$  müsste der zweite Ton haben, damit er an der Position  $x = 5.1 \text{ m}$  destruktiv mit dem ersten Ton interferiert? Die Phase des Tons des ersten Lautsprechers sei Null. Verwenden Sie, dass die Auslenkung der von Lautsprecher 1 und 2 ausgesandten Schallwellen proportional zu  $\sin(kx - \omega t)$  bzw. zu  $\sin(k(d - x) - \omega t + \phi)$  ist. [4]

**Lösung:** Die notwendige Bedingung für destruktive Interferenz an der Stelle  $x_{\min}$  ist, dass die ortsabhängige Amplitude an dieser Stelle minimal wird. Dies ist der Fall, wenn der Phasenunterschied zwischen den beiden Wellen gerade  $n\pi$  ist mit  $n$  ungerade und ganzzahlig. Mathematisch muss also folgendes erfüllt sein:

$$\begin{aligned} n\pi &= kx - \omega t - [k(d - x) - \omega t + \phi] \\ &= k(2x - d) - \phi. \end{aligned}$$

Nun nutzen wir nun, dass  $x = 5.1 \text{ m}$ ,  $d = 10 \text{ m}$ ,  $k = 2\pi \frac{1}{\text{m}}$ , folgt für die Phase  $\phi$

$$\phi = \pi(0.4 - n).$$

Da die Phase gemäss Aufgabenstellung im Intervall  $\in [0, 2\pi)$  sein muss, ist diese Gleichung nur für  $n = -1$  erfüllt, wo gilt

$$\phi = 1.4\pi.$$

- d) Lautsprecher 2 sei nun entfernt und eine Person bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s entlang einer Geraden parallel zur y-Achse in positive Richtung, siehe Abbildung 5 ii). Geben Sie die von der Person wahrgenommene Frequenz für folgende Grenzwerte der Position der Person an:  $y \rightarrow -\infty$ ,  $y = 0$ ,  $y \rightarrow +\infty$ . [3]

**Lösung:** Da sich der Beobachter in Bezug auf die Quelle bewegt, gibt es einen Dopplereffekt. Für  $y = -\infty$  bewegt sich der Beobachter auf die Quelle zu, es gilt also für die von der Person wahrgenommenen Frequenz  $f'$

$$\begin{aligned} f' &= f_Q \frac{v_s + v}{v_s} \\ &= 348 \text{ Hz.} \end{aligned}$$

wobei  $f_Q = 343 \text{ Hz}$  die Quellenfrequenz ist,  $v = 5 \text{ m/s}$  Beobachtergeschwindigkeit und die Schallgeschwindigkeit  $v_s = 343 \text{ m/s}$ . Analog gilt für  $y = +\infty$ , dass sich der Beobachter von der Quelle wegbewegt, und damit

$$\begin{aligned} f' &= f_Q \frac{v_s - v}{v_s} \\ &= 338 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Bei  $y = 0$  gilt  $f' = f_Q = 343 \text{ Hz}$  weil sich der Beobachter weder zu der Quelle hinbewegt noch von der Quelle wegbewegt - sprich der Beobachter bewegt sich in diesem Moment senkrecht zur Verbindungslinie Quelle-Beobachter.