

Abgabe: 30. Mai 2022

Serie 12

Aufgabe 1: Kreisprozesse

Abbildung 1 zeigt drei verschiedene Kreisprozesse A , B und C eines idealen ein-atomigen Gases. Die Gasmenge sei konstant und in allen drei Fällen identisch. Die Punkte 1 bis 4 zeigen jeweils charakteristische Zustände der Kreisprozesse an. Es sei T_X^i die Temperatur für den Kreisprozess X am Punkt i . Weiterhin seien $Q_X^{i \rightarrow j}$ die dem System zugeführte Wärme, $W_X^{i \rightarrow j}$ die am System verrichtete Arbeit und $\Delta U_X^{i \rightarrow j}$ die Änderung der inneren Energie beim Übergang von Zustand i zu Zustand j . Die Pfeile geben an, in welche Richtung die Kreisprozesse jeweils ablaufen.

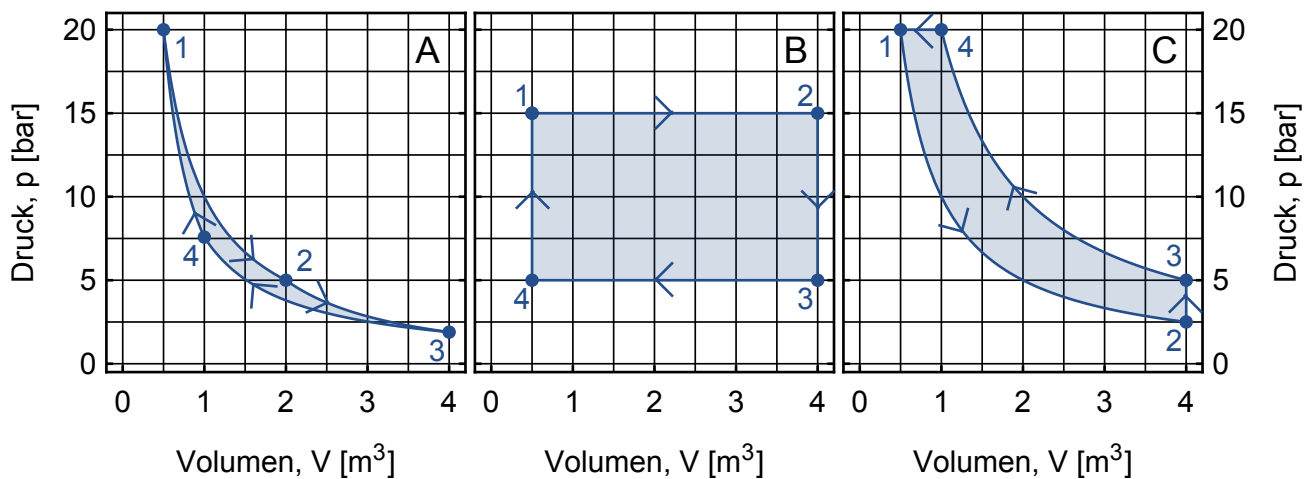


Abbildung 1: Darstellung dreier möglicher Kreisprozesse A , B , und C eines idealen Gases konstanter Teilchenzahl.

- a) Die Temperatur am Punkt (1) im Kreisprozess A sei 300 K. Berechnen Sie die Stoffmenge \tilde{n} des Gases. Benutzen Sie dazu die in den Graphen angegebenen Drücke und Volumina.

Lösung: Es gilt

$$\tilde{n} = pV/RT = \frac{0.5 \times 20 \times 10^5}{8.3 \times 300} \text{ mol} \approx 402 \text{ mol}.$$

- b) Berechnen Sie die Temperaturen T_B^i ($i = 1, 2, 3, 4$) der vier charakteristischen Zustände des Kreisprozesses B .

Lösung: An jedem Punkt des Kreisprozesses gilt die ideale Gasgleichung $pV = \tilde{n}RT$. Auflösen nach T und Einsetzen der aus dem Diagramm abgelesene Drücke und Volumina ergibt

$$\begin{aligned} T_B^1 &= \frac{p_1 V_1}{\tilde{n}R} = 225 \text{ K} \\ T_B^2 &= \frac{p_2 V_2}{\tilde{n}R} = 1796 \text{ K} \\ T_B^3 &= \frac{p_3 V_3}{\tilde{n}R} = 599 \text{ K} \\ T_B^4 &= \frac{p_4 V_4}{\tilde{n}R} = 75 \text{ K} \end{aligned} \tag{1}$$

- c) Berechnen Sie die Änderung der inneren Energie im Kreisprozess C in den Schritten $3 \rightarrow 4$ und $4 \rightarrow 1$.

Lösung: Die innere Energie eines ein-atomigen Gases ist laut Gleichverteilungssatz $U = \frac{3}{2}\tilde{n}RT$.

Durch Auflösen der idealen Gasgleichung nach der Temperatur, $T_i = p_i V_i/(\tilde{n}R)$ und Einsetzen in die Ausdrücke für die innere Energie erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta U_C^{3 \rightarrow 4} &= U_C^4 - U_C^3 = \frac{3}{2}(p_4 V_4 - p_3 V_3) = \frac{3}{2}(20 \text{ bar} \cdot 1 \text{ m}^3 - 5 \text{ bar} \cdot 4 \text{ m}^3) = 0, \\ \Delta U_C^{4 \rightarrow 1} &= U_C^1 - U_C^4 = \frac{3}{2}(p_1 V_1 - p_4 V_4) = \frac{3}{2}(20 \text{ bar} \cdot 0.5 \text{ m}^3 - 20 \text{ bar} \cdot 1 \text{ m}^3) = -1.5 \text{ MJ}. \end{aligned} \tag{2}$$

- d) Beim Kreisprozess A gilt beim Übergang von (2) nach (3)

- ☐ $W_A^{2 \rightarrow 3} > 0$.
- ☐ $W_A^{2 \rightarrow 3} = 0$.
- ☐ $W_A^{2 \rightarrow 3} < 0$.

Lösung: Das Volumen nimmt bei diesem Übergang zu. Daher ist die am System verrichtete Arbeit negativ. **Antwort 3 ist korrekt.**

- e) Für den Kreisprozess B gelten beim Übergang von (3) nach (4)

- ☐ $Q_B^{3 \rightarrow 4} < 0$ und $W_B^{3 \rightarrow 4} > 0$.
- ☐ $Q_B^{3 \rightarrow 4} < 0$ und $W_B^{3 \rightarrow 4} < 0$.
- ☐ $Q_B^{3 \rightarrow 4} > 0$ und $W_B^{3 \rightarrow 4} > 0$.
- ☐ $Q_B^{3 \rightarrow 4} > 0$ und $W_B^{3 \rightarrow 4} < 0$.

Lösung: Mit gleichem Argument wie vorher gilt $W > 0$. Weiterhin nimmt die Temperatur laut idealem Gasgesetz bei konstantem Druck und konstanter Teilchenzahl ab, und somit auch die innere Energie. Daher muss $Q = \Delta U - W < 0$ gelten. **Antwort 1 ist also korrekt.**

Aufgabe 2: Kreisprozess [$\Sigma 12$]

Der in Abbildung 2 gezeigte Kreisprozess eines idealen, ein-atomigen Gases mit Stoffmenge \tilde{n} bestehe aus je zwei adiabatischen und zwei isochoren Prozessabschnitten. Der Kreisprozess werde ermöglicht durch kontrollierte Kopplung an ein einzelnes Wärmereservoir konstanter Temperatur T_{res} . Die Temperatur des Gases bei den Punkten 1 und 3 sei identisch $T_1 = T_3 = T_{\text{res}}$.

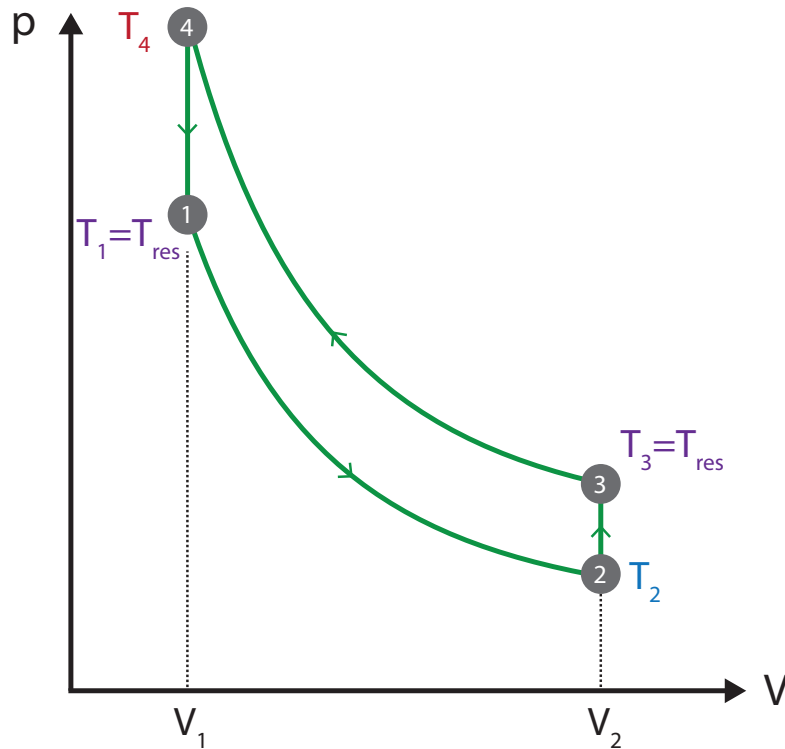


Abbildung 2: Abbildung des Kreisprozesses im Druck-Volumen-Diagramm.

- a) Geben Sie mit obigen Angaben den numerischen Wert für den Adiabatenkoeffizienten κ sowie einen Ausdruck für die innere Energie U_1 des Gases am Punkt 1 an.

Hinweis: Verwenden Sie den Gleichverteilungssatz. [2]

Lösung: Laut dem Gleichverteilungssatz können wir die innere Energie mit Hilfe der Freiheitsgrade des beobachteten Systems beschreiben:

$$U = \frac{f}{2} \tilde{n} R T [0.5] = \frac{3}{2} \tilde{n} R T_{\text{res}} [0.5] \quad (3)$$

wobei wir benutzt haben, dass ein 1-atomiges, ideales Gas $f = 3$ Freiheitsgrade hat und $T_1 = T_{\text{res}}$. Für den Adiabatenkoeffizienten wissen wir, dass er als Quotient der spezifischen Wärmen bei konstantem Volumen c_v , respektive Druck c_p beschrieben werden kann

$$\kappa = \frac{c_v}{c_p} [0.5] \quad (4)$$

Auch die spezifischen Wärmen können wir mit Hilfe der Anzahl Freiheitsgrade ausdrücken, und zwar via

$$c_v = \frac{f}{2} R, \quad c_p = \left(\frac{f}{2} + 1\right) R. \quad (5)$$

Es folgt damit

$$\kappa = \frac{c_v}{c_p} = \frac{(\frac{f}{2} + 1)R}{\frac{f}{2}R} = \frac{(\frac{3}{2} + 1)}{\frac{3}{2}} = 5/3. [0.5] \quad (6)$$

Alternativ kann auch direkt die Formel für κ aus dem Skript verwendet werden,

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f + 2}{f} = \frac{5}{3}. \quad (7)$$

- b) Bestimmen Sie die Temperaturen des Gases T_2 und T_4 an den jeweiligen Punkten 2 und 4 in Abhängigkeit von T_{res} , V_1 und V_2 . [3]

Hinweis: Bei einem adiabatischen Prozess bleibt die Grösse $TV^{\kappa-1}$ konstant.

Lösung: Wir beginnen mit der bekannten Beziehung $TV^{\kappa-1} = \text{const}$ und erhalten folgende Beziehung zwischen Temperatur und Volumen:

$$\Leftrightarrow T_1 V_1^{(\kappa-1)} = T_2 V_2^{(\kappa-1)} [1]$$

Damit folgt nach T_2 aufgelöst und mit Hilfe der bekannten Beziehung $T_1 = T_{\text{res}}$

$$\begin{aligned} T_2 &= T_{\text{res}} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} [0.5] \\ \Leftrightarrow T_2 &= T_{\text{res}} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{2/3}. [0.5] \end{aligned}$$

Analog kann bei T_4 vorgegangen werden. Es folgt dann

$$T_4 = T_{\text{res}} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{2/3}. [1]$$

- c) Wieviel Arbeit $W_{1 \rightarrow 2}$ leistet die Umgebung an dem Gas auf dem Prozessabschnitt von Punkt 1 nach 2? Welches Vorzeichen hat die am Gas geleistete Arbeit während eines gesamten Zyklus des Kreisprozesses (qualitative Begründung genügt)? [4.5]

Lösung: Für einen adiabatischen Prozess gilt $\delta Q = 0$ [1] und über den ersten Hauptsatz folglich $\Delta W = \Delta U$ [0.5]. Wir müssen also die Änderung der inneren Energie in diesem Prozessabschnitt berechnen. Die Änderung der inneren Energie (wie in Teilaufgabe a) gesehen), und damit die Arbeit, kann man schreiben als

$$\begin{aligned} \Delta W_{1 \rightarrow 2} &= \Delta U_{1 \rightarrow 2} = \frac{f}{2} \tilde{n} R (T_2 - T_1) [0.5] \\ &= \frac{3}{2} \tilde{n} R (T_2 - T_{\text{res}}) [0.5] \\ &= \frac{3}{2} \tilde{n} R T_{\text{res}} \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{2/3} - 1 \right). \end{aligned}$$

Die am Gas verrichtete Arbeit auf dem Weg von 3 nach 4 hat ein umgekehrtes Vorzeichen (Volumenreduktion statt Volumenzunahme) [0.5] und ist betragsmässig grösser als $\Delta W_{1 \rightarrow 2}$ (Fläche unter der

Kurve ist grösser) [0.5]. Auf den isochoren Prozessabschnitten wird keine Arbeit verrichtet. Daher ist $W = \Delta W_{1 \rightarrow 2} + \Delta W_{3 \rightarrow 4} > 0$ [1].

Alternativ kann man die Arbeit in Schritt $3 \rightarrow 4$ auch explizit berechnen, und erhält $\Delta W = \frac{3}{2} \tilde{n} R (T_4 - T_{\text{res}})$ [0.5] und mit der Berechnung aus b) $\Delta W_{3 \rightarrow 4} = \frac{3}{2} \tilde{n} R T_{\text{res}} \left(\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{2/3} - 1 \right)$ [0.5]. Weil $V_2 > V_1$ folgt dass $\Delta W_{3 \rightarrow 4} > 0$ und $|\Delta W_{3 \rightarrow 4}| > |\Delta W_{1 \rightarrow 2}|$ und damit $W_{\text{total}} > 0$ [1].

- d) Bestimmen Sie die vom Wärmereservoir an das Gas abgegebene Wärmemenge $Q_{2 \rightarrow 3}$ auf dem isochoren Prozessabschnitt von Punkt 2 nach 3. [2.5]

Lösung: Bei isochoren Prozessen wird keine Arbeit verrichtet, daher gilt $\delta Q = \Delta U$. [1.5] Die Änderung der inneren Energie, und damit die abgegebene Wärmemenge berechnet sich in diesem Abschnitt zu

$$\begin{aligned} \delta Q = dU &= \frac{f}{2} \tilde{n} R \Delta T [0.5] \\ &= \frac{f}{2} \tilde{n} R (T_{\text{ref}} - T_2) \cdot [0.5] \\ &= \frac{f}{2} \tilde{n} R T_{\text{ref}} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{2/3} \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Stirling-Maschine

Wir betrachten eine Wärmekraftmaschine mit einem idealen Gas als Arbeitsmedium. Der Kreisprozess nach Stirling enthält folgende vier Schritte:

- 1) Isotherme Expansion.
- 2) Isochore Abkühlung (konstantes Volumen).
- 3) Isotherme Kompression.
- 4) Isochore Erwärmung (konstantes Volumen).

Zeichnen Sie ein pV -Diagramm. Bestimmen Sie die während eines Zyklus ausgetauschte Wärme und die geleistete Arbeit. Wie groß ist der Wirkungsgrad der Stirling-Maschine?

Lösung:

Die Stufen des Stirling-Prozesses sind:

- 1) Isotherme Expansion.
- 2) Isochore Abkühlung (konstantes Volumen)
- 3) Isotherme Kompression.
- 4) Isochore Erwärmung (konstantes Volumen).

Von den Überlegungen oben sehen wir dass $T_1 = T_2$, $T_3 = T_4$, $V_2 = V_3$, und $V_4 = V_1$. Wir berechnen die Wärme und die verrichtete Arbeit in jedem Schritt.

Stirling-Prozess

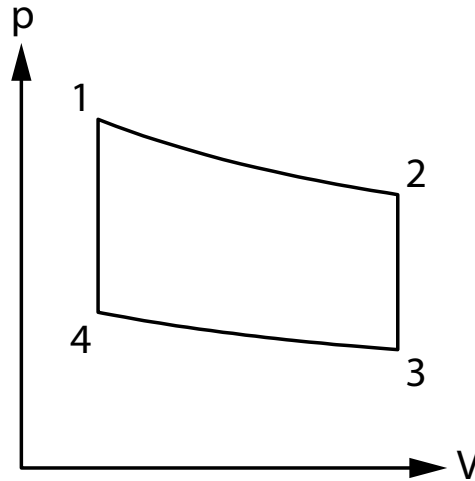


Abbildung 3

Schritt 1 \rightarrow 2: **Isotherme Expansion.**

$T_1 = T_2$, deshalb, $\Delta U = 0$ und wir erhalten $\Delta Q = -\Delta W$. Wir benutzen die Zustandsgleichung, $pV = \tilde{n}RT_1$, und berechnen die Arbeit:

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{\tilde{n}RT_1}{V} dV \\ &= -\tilde{n}RT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\tilde{n}RT_1 \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

Die Wärme ist:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = -W_{1 \rightarrow 2} = \tilde{n}RT_1 \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \quad (9)$$

Schritt 2 \rightarrow 3: **Isochore Abkühlung (konstantes Volumen).**

$V_2 = V_3$. Deshalb ist $\Delta W = 0$ und $\Delta Q = \tilde{n}C_V(T_3 - T_2) = \tilde{n}C_V(T_3 - T_1)$.

Schritt 3 \rightarrow 4: **Isotherme Kompression.**

$T_3 = T_4$. Gleich wie in 1, $\Delta U = 0$ und wir erhalten $\Delta Q = -\Delta W$. Wir benutzen die Zustandsgleichung, $pV = \tilde{n}RT_3$ und berechnen die Arbeit:

$$\begin{aligned} W_{3 \rightarrow 4} &= - \int_{V_3}^{V_4} p dV \\ &= - \int_{V_3}^{V_4} \frac{\tilde{n}RT_3}{V} dV \\ &= \tilde{n}RT_3 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \\ &= \tilde{n}RT_3 \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \\ Q_{3 \rightarrow 4} &= -W_{3 \rightarrow 4} = -\tilde{n}RT_3 \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

Schritt 4 → 1: **Isochore Erwärmung (konstantes Volumen),**

In diesem Schritt ist $V_3 = V_4$. Deshalb ist $\Delta W = 0$ und $\Delta Q = \tilde{n}C_V(T_1 - T_4) = \tilde{n}C_V(T_1 - T_3)$.

Die gesamte am Gas verrichtete Arbeit in einem Zyklus ist:

$$\begin{aligned}\sum W &= W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 1} \\ &= \tilde{n}RT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right) - \tilde{n}RT_3 \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right) \\ &= \tilde{n}R(T_1 - T_3) \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right).\end{aligned}\tag{11}$$

Da dieser Wert negativ ist (wegen $V_1 < V_3$ und $T_1 > T_3$), verrichtet das Gas eine positive Arbeit an der Umgebung.

Wir berechnen die Effizienz des Sterlingmotors zu

$$\eta = \frac{|\sum W|}{Q_h},\tag{12}$$

wobei Q_h die Wärme ist, die das warme Reservoir an die Maschine abgibt. Bei der Stirlingmaschine ist $Q_h = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{4 \rightarrow 1}$ (Summe der Schritte, in denen $Q_{i \rightarrow j} > 0$). Die Annahme dabei ist, dass die Wärme, die die Maschine ans Reservoir abgibt, verloren ist. Deshalb ist

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{-\tilde{n}R(T_1 - T_3) \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)}{-\tilde{n}RT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right) + \tilde{n}C_V(T_1 - T_3)} \\ &= \frac{-T_1 + T_3}{-T_1 + \frac{C_V(T_1 - T_3)}{R \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)}} = \frac{-1 + \frac{T_3}{T_1}}{-1 + \frac{C_V(1 - \frac{T_3}{T_1})}{R \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)}} \\ &= \frac{1 - \frac{T_3}{T_1}}{1 - \frac{C_V(1 - \frac{T_3}{T_1})}{R \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)}} = \frac{\eta_c}{1 - \frac{C_V \eta_c}{R \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)}},\end{aligned}\tag{13}$$

wobei wir die Effizienz der Carnotmaschine benutzt haben: $\eta_c = 1 - T_c/T_h$.

Die Effizienz ist kleiner als die der Carnotmaschine. Um die Effizienz eines Stirlingmotors auf Carnoteffizienz zu steigern benutzt man einen sogenannten Regenerator. Ein Regenerator ist ein Kurzzeit-Wärmespeicher im Inneren der Maschine.