

Abgabe: 4. April 2022

Serie 05

Aufgabe 1: Wellenausbreitung

Ein transversaler Puls wandert mit unveränderter Form $f(x)$ entlang einer unendlich ausgedehnten Saite mit einer Geschwindigkeit von $v = -2 \text{ cm/s}$. Abbildung 1 zeigt den Puls zum Zeitpunkt $t = 0$.

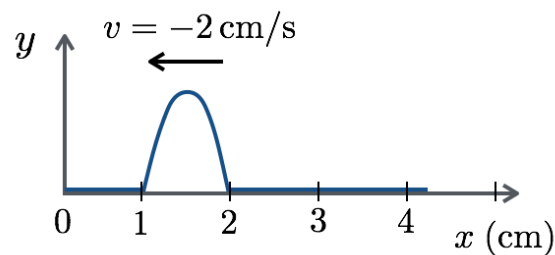


Abbildung 1: Wellenausbreitung

- Geben Sie die Wellenfunktion an, die die Ausbreitung des Pulses beschreibt.
- Skizzieren die Geschwindigkeit $\dot{y}(x)$ der Saite in transversaler Richtung als Funktion des Ortes x für den in der Abbildung skizzierten Zeitpunkt.
- Skizzieren Sie Auslenkung $y(x, t)$ und Geschwindigkeit $\dot{y}(x, t)$ als Funktion der Zeit für den Ort $x = 0$.

Lösung:

- Das Zentrum des Pulses ist zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $x_0 = 1.5 \text{ cm}$. Demnach erhalten wir die Wellenfunktion $y(x, t) = f(x - x_0 - vt)$. Wir beachten, dass v als negativ definiert ist.
- Die transversale Geschwindigkeit ist $\dot{y}(x, t) = -v f'(x - x_0 - vt)$. Das Geschwindigkeitsprofil ist also durch die räumliche Ableitung $f'(x)$ des Pulses bestimmt, wie in Abb. ?? skizziert. Das Zentrum des Pulses erreicht den Ort $x = 0$ nach einer Zeit $t = 0.75 \text{ s}$.
- Auslenkung und Geschwindigkeit am Ort $x = 0$ sind gegeben durch $y(0, t) = f(-x_0 - vt)$ bzw. $\dot{y}(0, t) = -v f'(-x_0 - vt)$. Die entsprechenden Skizzen dieser Funktionen sind in Abb. ?? gezeigt.

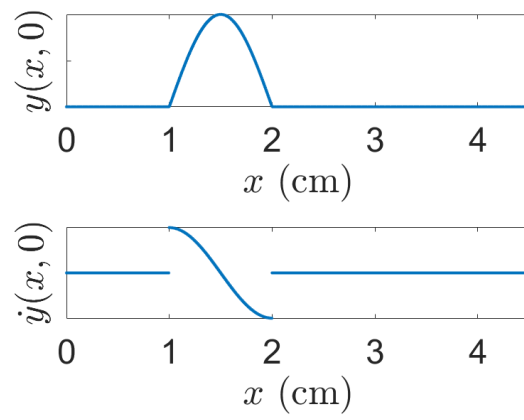


Abbildung 2: Transversale Auslenkung und Geschwindigkeit des Pulses als Funktion der Ortskoordinate x zum Zeitpunkt $t = 0$.

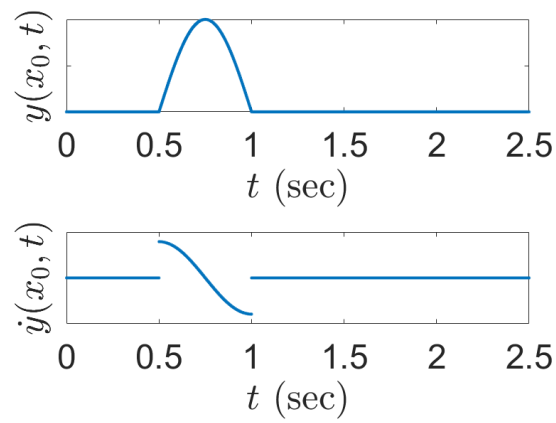


Abbildung 3: Transversale Auslenkung und Geschwindigkeit des Pulses als Funktion der Zeit am Ort $x = 0$.

Aufgabe 2: Wellengleichung

Welche der folgenden Funktionen $f(x, t)$ erfüllt nicht die Wellengleichung $\partial^2 f / \partial x^2 = v^{-2} \partial^2 f / \partial t^2$ (v : Wellengeschwindigkeit)? Im Folgenden bezeichnet k die Wellenzahl und $\omega = vk$ die Kreisfrequenz. [2]

- ☐ $\sin(kx - \omega t)$
- ☐ $\sin(kx) \cos(\omega t)$
- ☐ $\exp [-(kx - \omega t)^2]$
- ☐ $\sin(kx\omega t)$
- ☐ $\sin(kx - \omega t) \exp [-(kx - \omega t)^2]$
- ☐ $\sin(kx - \omega t) + \exp [-(kx - \omega t)^2]$

Lösung: Antwort 4 ist richtig. Vier der restlichen Funktionen sind der Form $f(x - vt)$ und Antwort 2 stellt eine stehende Welle dar und kann auch als $\sin(kx - \omega t)/2 + \sin(kx + \omega t)/2$ geschrieben werden (es gilt das Superpositionsprinzip).

Aufgabe 3: Wellengleichung für Seilwellen

Eine seitliche Auslenkung eines Seils wird als Transversalwelle übertragen. Für die Beschreibung von Seilwellen betrachten wir ein Volumenelement zwischen den Positionen x und $x + dx$, wobei x die Koordinate entlang des Seils beschreibt und die transversale Auslenkung des Volumenelements als $y(x)$ bezeichnet wird. An beiden Endflächen greifen Kräfte an, welche senkrecht auf die Endflächen wirken und die (betragsmäßig) der Seilkraft F_s entsprechen.

- a) Wie groß ist die resultierende Kraft in y -Richtung, die auf das Volumenelement wirkt?
- b) Verwenden Sie die in Aufgabenteil (a) gefundene Rückstellkraft, um die Beschleunigung des Volumenelements in y -Richtung zu erhalten. Schreiben Sie diese (differentielle) Bewegungsgleichung in Form einer Wellengleichung. Wie groß ist die Wellengeschwindigkeit?

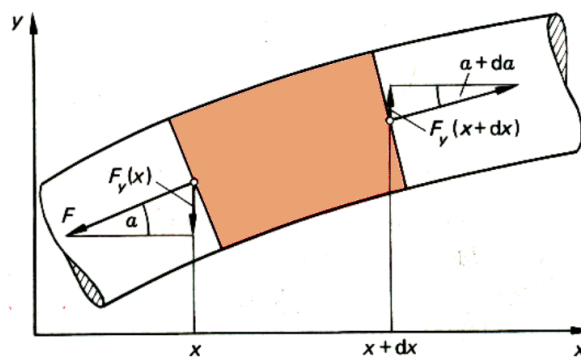


Abbildung 4: Seil

Lösung:

- a) Die Gesamtkraft in y -Richtung auf das Massenelement $dm = \rho A dx$ ist:

$$\begin{aligned}
dF_y &= F_y(x+dx) - F_y(x) \\
&= F \sin[\alpha(x+dx)] - F \sin \alpha(x) \\
&= F \left[\sin[\alpha(x+dx)] - \sin \alpha(x) \right]
\end{aligned} \tag{1}$$

Wir betrachten die Winkel $\alpha(x)$ bzw. $\alpha(x+dx)$ als klein, sodass wir $\sin(\alpha) \cong \tan \alpha$ annehmen dürfen:

$$dF_y = F \left[\tan[\alpha(x+dx)] - \tan \alpha(x) \right]. \tag{2}$$

Mit $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
dF_y &= F \left[\frac{dy}{dx}(x+dx) - \frac{dy}{dx}(x) \right], \\
&= F \frac{\frac{dy}{dx}(x+dx) - \frac{dy}{dx}(x)}{dx} dx, \\
&= F \frac{d^2y}{dx^2} dx.
\end{aligned} \tag{3}$$

b) Damit folgt für die Beschleunigung a des Massenelementes

$$\begin{aligned}
dm a_y &= dF_y \quad (\text{Newton}) \\
\iff dm \frac{d^2y}{dt^2} &= F \frac{d^2y}{dx^2} dx \\
\iff \frac{d^2y}{dt^2} &= \underbrace{\frac{F}{\rho A}}_{v_t^2} \frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{mit } dm = \rho A dx)
\end{aligned} \tag{4}$$

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit gilt dann:

$$v_t = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \tag{5}$$

Aufgabe 4: Transversale Welle auf Seil

Eine transversale, sinusförmige Welle breitet sich (in x -Richtung) entlang eines langen, horizontalen Seils aus. Die Welle wird erzeugt, indem das Seilende (bei $x = 0$) nach oben und unten mit einer Gesamtauslenkung von 50 cm in y -Richtung bewegt wird. Dabei ist die Bewegung sinusförmig mit 120 Perioden pro Sekunde.

- Berechnen Sie Geschwindigkeit, Amplitude, Frequenz und Wellenlänge für den Fall, dass das Seil eine lineare Dichte von 0.25 kg/m aufweist und unter einer Spannkraft von 90 N steht.
- Bestimmen Sie die Auslenkung $y = y(x, t)$ unter der Annahme, dass sich zur Zeit $t = 0$ das bewegte Ende (bei $x = 0$) auf Höhe der Horizontalen bei $y = 0$ befindet, und sich die Welle in positive x -Richtung fortbewegt.

Lösung:

a) Amplitude:

$$\begin{aligned} \text{Gesamtauslenkung } 50 \text{ cm} \\ \Rightarrow \text{Amplitude } A = 25 \text{ cm} \end{aligned} \quad (6)$$

Frequenz:

$$f = 120 \text{ Hz} \quad (7)$$

Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{F}{M}} = \sqrt{\frac{90 \text{ N}}{0.25 \text{ kg/m}}} \cong 19 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (8)$$

wobei F die Seilkraft und M die lineare Massendichte ist.

Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{v}{f} \cong 16 \text{ cm} \quad (9)$$

b) Die Welle bewegt sich in positive Richtung, hat also die allgemeine Form

$$y = f(x - vt), \quad (10)$$

mit einer Funktion f .

Da das Seilende sinusförmig ausgelenkt wird, gilt

$$\begin{aligned} y &= A \sin[k(x - vt)] = A \sin(kx - \omega t) \\ (\text{für } x = t = 0 \Rightarrow y = 0) \end{aligned} \quad (11)$$

Mit den aus a) bestimmten Grössen

$$\begin{aligned} A &= 25 \text{ cm}, \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} \cong 40 \text{ m}^{-1} \text{ cm}, \\ \omega &= 2\pi f \cong 750 \text{ s}^{-1}, \end{aligned}$$

erhalten wir

$$y(x, t) = \pm(0.25 \text{ m}) \sin(40 \text{ m}^{-1} \cdot x - 750 \text{ s}^{-1} \cdot t) \quad (12)$$

Es gibt zwei mögliche Lösungen \pm , weil durch die Aufgabenstellung nicht festgelegt ist, ob die Anfangsphase des Sinus 0 oder π ist.