

Abgabe: 28. März 2022

Serie 04

Aufgabe 1: Gütefaktor

Die Energie eines schwach gedämpften harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz ω_0 ist nach 50 Schwingungen auf 50 % seiner Anfangsenergie abgefallen.

Hinweis: Sie können Näherungen verwenden, die im Falle schwacher Dämpfung $\gamma \ll 1/T$ gelten

- a) Berechnen Sie die Dämpfungsrate γ des Oszillators in Abhängigkeit der Schwingungsperiode T .
- b) Berechnen Sie den Gütefaktor des Oszillators.

Der Oszillator werde nun periodisch getrieben und weist nahe ω_0 eine Resonanz auf.

- c) Berechnen Sie die Resonanzbreite $\Delta\omega$ in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω_0 .

Lösung:

- a) Bei einer schwach gedämpften Schwingung nimmt die Energie des Oszillators exponentiell ab, $E(t) = E_0 \exp(-\gamma t)$. Wir bestimmen die Dämpfungsrate γ über

$$E(t = 50T) = E_0 \exp(-\gamma 50T) = 0.5E_0, \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{\ln(2)}{50T}. \quad (2)$$

- b) Der Gütefaktor ist definiert als

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{-\Delta E(t)} = 2\pi \frac{E(t)}{-(E(t+T) - E(t))}. \quad (3)$$

Wir berechnen zuerst

$$\Delta E = E(t = T) - E(t = 0) = E_0 \exp\left(-\frac{\ln(2)}{50T}T\right) - E_0 = E_0 \left(\exp\left(-\frac{\ln(2)}{50}\right) - 1\right), \quad (4)$$

und erhalten für den Gütefaktor

$$Q = 2\pi \frac{E_0}{-\Delta E} = -\frac{2\pi}{\left(\exp\left(-\frac{\ln(2)}{50}\right) - 1\right)} \approx 456. \quad (5)$$

Alternativ kann man auch direkt die Näherung für schwache Dämpfung benutzen, $Q = \omega/\gamma = \frac{\omega 50T}{\ln(2)} = \frac{2\pi 50}{\ln(2)} \approx 453$.

- c) Bei schwacher Dämpfung ist die Resonanzbreite gegeben durch

$$\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\omega_0}{456} = 2.2 \cdot 10^{-3} \omega_0. \quad (6)$$

Aufgabe 2: Geigenstimmen

Beim Stimmen eines Geigenduos gibt der erste Geiger sein A (440 Hz) an. Nun spielt der zweite Geiger sein A dazu. Das Resultat ist ein Ton, der mit einer Frequenz von 3 Hz seine Lautstärke ändert. Wie kommt diese Lautstärkeänderung zustande und wie kann der zweite Geiger vorgehen, um sie zu beheben?

Lösung: Beim auftretenden Phänomen handelt es sich um eine Schwebung. Aus der Überlagerung der beiden Schwingungen von $\nu_1 = 440$ Hz bzw. ν_2 folgt für die Gesamtamplitude:

$$\sin(2\pi\nu_1 t) + \sin(2\pi\nu_2 t) = 2 \sin\left(\frac{2\pi(\nu_1 + \nu_2)t}{2}\right) \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi(\nu_1 - \nu_2)t}{2}\right)}_{\text{Schwebung}}.$$

Wie im Skript erläutert, nimmt der Zuhörer Änderungen der Intensität wahr. Die Intensität ist proportional zum Quadrat der Amplitude. Die Schwebungsfrequenz entspricht daher genau der Differenzfrequenz $\nu_1 - \nu_2$. Also ist das A des zweiten Geigers entweder 443 Hz oder 437 Hz. Um zu wissen, in welche Richtung der Ton zu verändern ist, kann der Geiger anfangen zu stimmen. Wird die Schwebung langsamer, stimmt die Richtung, wird sie schneller, verschlechtert sich die Stimmung.

Aufgabe 3: Gekoppelte Schwingung

Eine Masse M sei über zwei identische Federn mit Federkonstanten k an zwei weitere Massen m gekoppelt, siehe Abb. 1(a). Die x -Koordinaten der Massen werden mit x_1 , x_2 , und x_3 bezeichnet. Die Länge der Federn in der Ruhelage sei l_0 .

Hinweis: x_1 , x_2 , und x_3 stellen Ortskoordinaten dar. Alternativ kann die Aufgabe auch durch alleinige Betrachtung der Auslenkungen Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 der Massen aus ihren Ruhelagen gelöst werden.

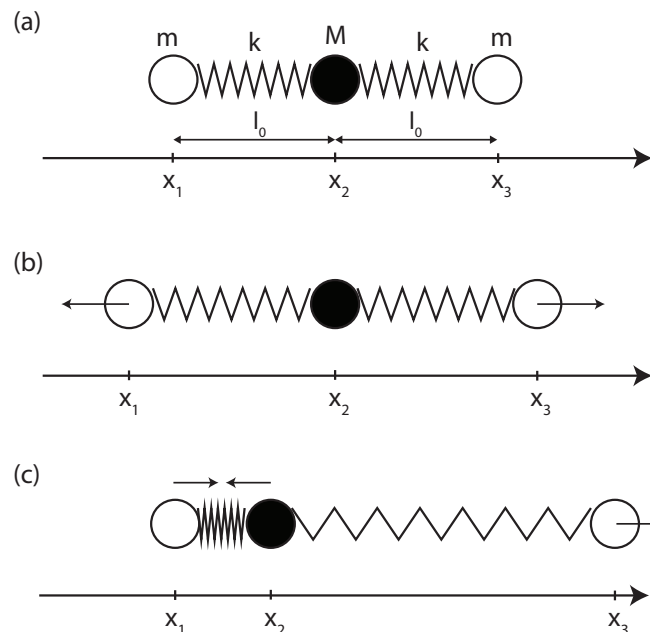


Abbildung 1: (a) Ruhelage. (b) Symmetrische Schwingungsmode. (c) Asymmetrische Schwingungsmode

- a) In der symmetrischen Schwingungsmode bleibt die Masse M in Ruhe und die beiden Massen m schwingen entgegengesetzt mit gleicher Amplitude, siehe Pfeile in Abb. 1(b). Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz der symmetrischen Schwingungsmode.
- b) In der asymmetrischen Schwingungsmode schwingen die beiden Massen m gleichphasig mit gleicher Amplitude, aber entgegengesetzt zu Masse M , siehe Pfeile in Abb. 1(c). Berechnen Sie die Resonanzfrequenz der asymmetrischen Schwingungsmode.
Hinweis: Stellen Sie die Bewegungsgleichung für alle drei Massen auf und verwenden Sie dann, dass die auf die erste und dritte Masse wirkenden Kräfte gleich gross sind.
- c) Vergleichen Sie die beiden Resonanzfrequenzen allgemein und für die beiden Fälle $M = m$ und $M \gg m$.

Lösung:

- a) Da die Masse M in Ruhe bleibt, schwingen die beiden Massen m , wie wenn sie über die Feder mit einer starren Wand verbunden wären. Mit dieser Argumentation lässt sich direkt die Resonanzfrequenz der symmetrischen Schwingungsmode zu $\sqrt{k/m}$ bestimmen.
 Eine etwas formale Lösung ist folgende: Da M in Ruhe bleibt können die Massen m separat betrachtet werden. Die Bewegungsgleichung für die erste Masse lautet

$$m\ddot{x}_1 = k(l - l_0) = k(x_2 - x_1 - l_0), \quad (7)$$

wobei die Länge der (gestreckten oder gestauchten) linken Feder durch $l = x_2 - x_1$ gegeben ist. Falls man den Ursprung des Koordinatensystems in die Ruhelage der ersten Masse legt, erhält man $x_2 = l_0$ und die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1. \quad (8)$$

Die Resonanzkreisfrequenz ist also durch $\omega_{0S} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ gegeben.

Bemerkung 1: Alternativ, und noch formaler, kann man auch zuerst die allgemeine Bewegungsgleichung für alle drei Massen aufstellen (siehe b)) und dann verwenden, dass die Gesamtkraft auf M verschwindet.

Bemerkung 2: Die Gleichung (??) entsprechende Bewegungsgleichung mit Koordinaten $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ lautet $m\ddot{\Delta x}_1 = k(\Delta x_2 - \Delta x_1)$.

- b) Wir stellen zuerst die Bewegungsgleichung für alle drei Massen auf,

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0), \quad (9)$$

$$M\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0) + k(x_3 - x_2 - l_0), \quad (10)$$

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2 - l_0). \quad (11)$$

Da in der asymmetrischen Mode die beiden Massen m mit gleicher Amplitude schwingen, müssen die auf sie wirkenden Kräfte gleich gross sein. Wir erhalten

$$k(x_2 - x_1 - l_0) = -k(x_3 - x_2 - l_0), \quad (12)$$

$$\Rightarrow x_3 = 2l_0 + x_1. \quad (13)$$

Durch Einsetzen von x_3 in Gl. (??) erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0), \quad (14)$$

$$M\ddot{x}_2 = -2k(x_2 - x_1 - l_0). \quad (15)$$

Mit der Substitution $u = x_2 - x_1 - l_0$ erhalten wir

$$\ddot{u} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \quad (16)$$

$$= -\left(\frac{2k}{M} + \frac{k}{m}\right)u \quad (17)$$

$$= -\omega_{0A}^2 u. \quad (18)$$

Dies entspricht der Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Resonanzfrequenz

$$\omega_{0A} = \sqrt{\frac{2k}{M} + \frac{k}{m}}. \quad (19)$$

c) Das Verhältnis der beiden Resonanzfrequenzen berechnet sich zu

$$\frac{\omega_{0A}}{\omega_{0S}} = \sqrt{1 + 2\frac{m}{M}}. \quad (20)$$

Für den Fall $M = m$ erhalten wir $\omega_{0A}/\omega_{0S} = \sqrt{3}$ und für den Fall $M \gg m$ erhalten wir $\omega_{0A}/\omega_{0S} \approx 1$.