Übung 1

28.09.2021
Lina De Windt

Themen von Heute:

- Kleine Vorstellungsrunde
- Organisatorisches: Informationen zur Übungsstunde
- Teil 1: Recap der Theorie
- Teil 2: Übungsaufgaben lösen

Kleine Vorstellungsrunde:

Über mich:

Name: Lina De Windt

Erreichbar unter: ldewindt@ethz.ch

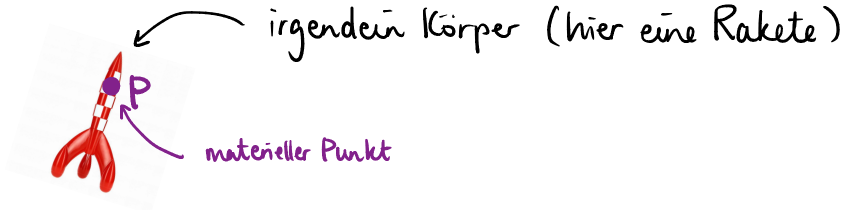
Studium: 3. Semester ITET

Theorie von Heute:

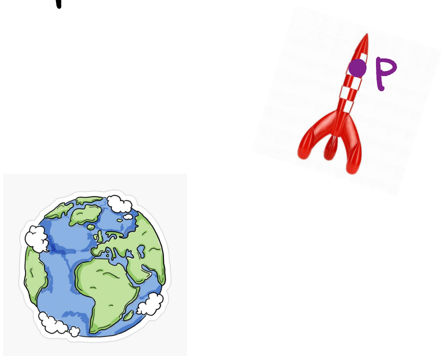
1. materieller Punkt
2. Geschwindigkeit & Schnelligkeit
3. Starre Körper
4. Satz der projizierten Geschwindigkeit (SdpG)
5. ebene Bewegungen

1 materieller Punkt:

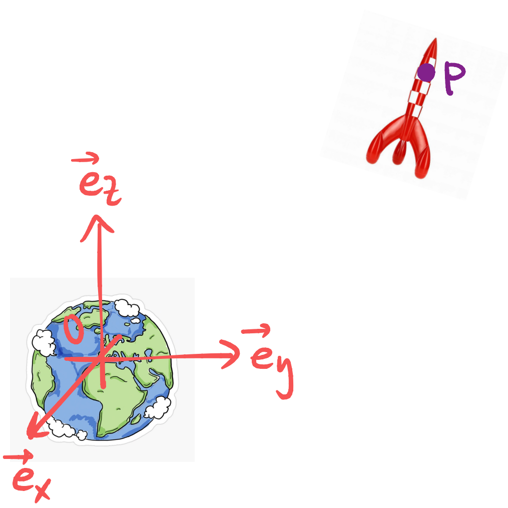
Ein materieller Punkt ist nichts anderes als ein Punkt eines Körpers.



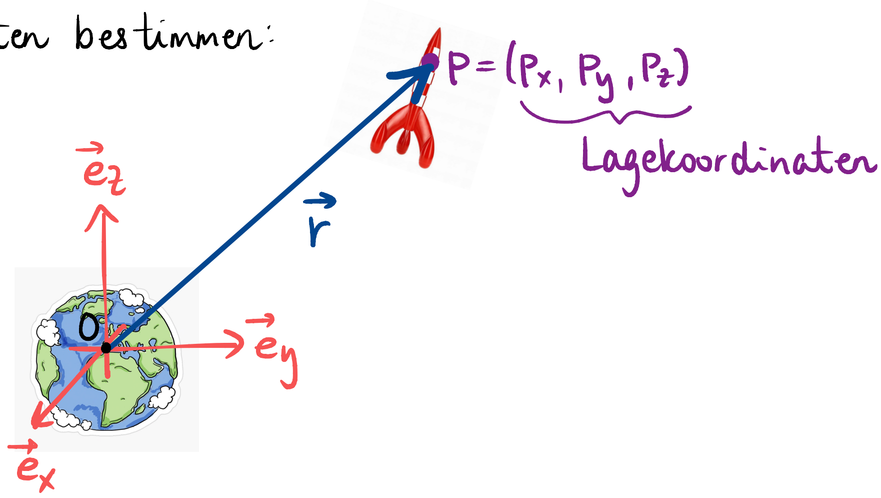
Doch mit nur einem Punkt im Raum können wir nichts anfangen. Deswegen führen wir Bezugskörper ein. z.B. wäre die Erde ein guter Bezugskörper für die Rakete:



Bezugskörper haben Bezugssysteme: das ist ein fancy-Wort für Koordinatensystem:



Wo wir jetzt ein Bezugssystem haben, können wir die Lage des Punktes durch die Lagekoordinaten bestimmen:



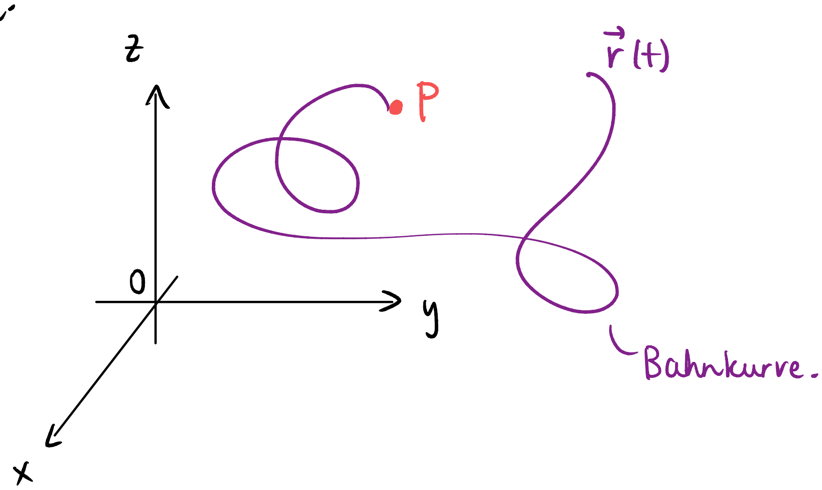
Ortsvektor: $\vec{r} = \vec{OP} = P_x\vec{e}_x + P_y\vec{e}_y + P_z\vec{e}_z$ oder $\vec{r} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$

verbindet den Ursprung (0) mit dem Punkt.

Ein System: ist eine Menge von Materiellen Punkten.

② Geschwindigkeit & Schnelligkeit:

Ein Punkt im Raum, der sich bewegt, kann man durch eine Funktion beschreiben:



Eine solche Funktion könnte z.B. so aussehen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$

Quiz: Welche Bahnkurve beschreibt diese Funktion?

Geschwindigkeit:

Good to know:

Schnelligkeit:

Geometrisch gesehen:

Das Ableiten ist in kartesischen Koordinaten recht straightforward, aber sobald wir andere Koordinaten nehmen, wird es ein bisschen komplizierter. Deswegen hier eine kleine Übersicht:

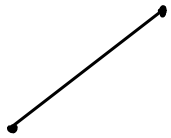
Tabelle Geschwindigkeit & Schnelligkeit in verschiedenen Koordinaten:

Koordinaten	Bewegungsgleichung	Geschwindigkeitsgleichung	Schnelligkeit
Kartesische	$\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$	$\underline{v} = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y + \dot{z}\underline{e}_z$	$s = \lvert\underline{v}\rvert = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$
Zylindrische	$\underline{r} = \rho\underline{e}_\rho + z\underline{e}_z$	$= \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\underline{e}}_\rho + \dot{z}\underline{e}_z$ $\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z$	$s = \lvert\underline{v}\rvert = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$
Polar:	$\underline{r} = \rho\underline{e}_\rho$	$\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\underline{e}}_\rho$	$s = \lvert\underline{v}\rvert = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2}$

Beachte: Der Einheitsvektor $\underline{e}_\rho = \underline{e}_\rho(\varphi(t))$ ist abhängig von $\varphi(t)$, resp. $\psi(t)$ und $\theta(t)$. Dies muss beim Ableiten berücksichtigt werden.
Die zeitlichen Abhängigkeiten habe ich in der Tabelle weggelassen $x = x(t), y = y(t)$...

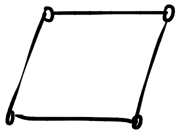
③ Starre Körper

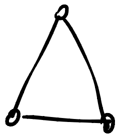
Starre Körper (SK) sind Körper, die sich nicht deformieren. z.B. ist ein Stab ein Starrkörper.

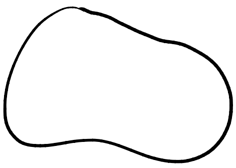


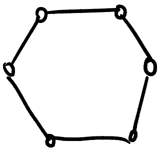
SK.

Quiz: Welche der folgenden Körper sind Starrkörper?

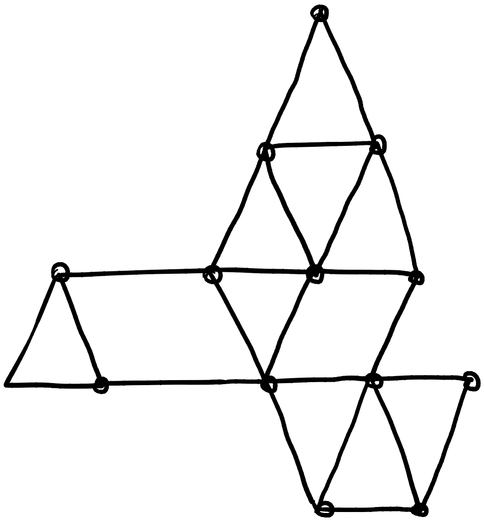
① 

② 

③ 

④ 

Bonus: Wie viele SK hat dieses System?:

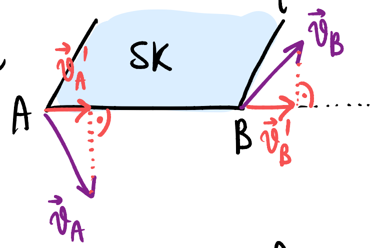


Lösung:

Warum?

④ Der Satz der projizierten Geschwindigkeiten: (Gilt für alle Starrkörper.)

Dieser Satz besagt, dass die Projektionen (mit einem Strich "'" gekennzeichnet)



der Geschwindigkeiten von 2 Punkten auf einem SK auf ihre Verbindungslinie (hier AB) gleich sind.

allgemeine Formel:

Diese Gleichung kann auch so geschrieben werden:

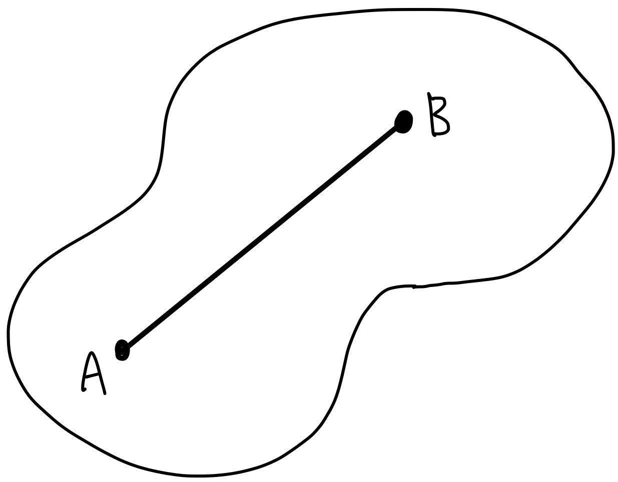
das kann wiederum umgeformt werden zu

Je nach Aufgabe kann die eine oder die andere Gleichung nützlicher sein.

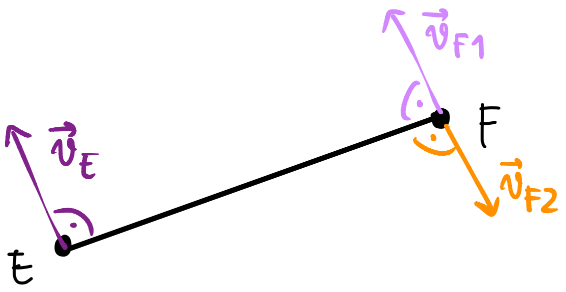
(diese Gleichungen sind aber äquivalent :))

Beispiele:

1



② aufpassen:



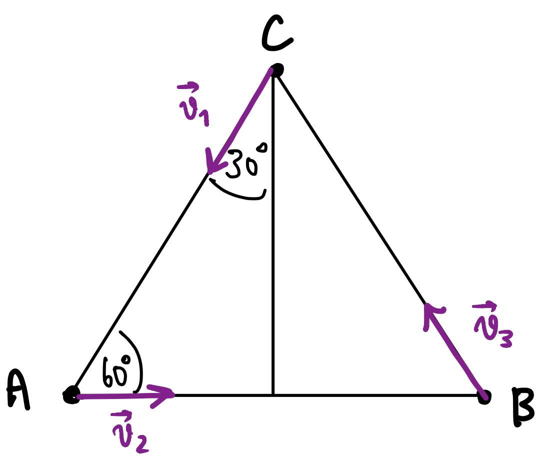
Quiz: In welche Richtung zeigt $\vec{v}_F$?

① $\vec{v}_{F1}$

② $\vec{v}_{F2}$

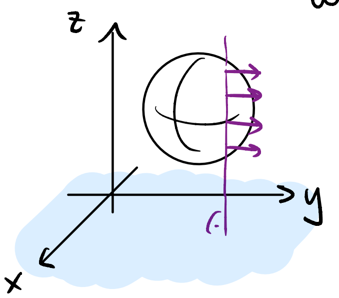
③ wir können es nicht wissen ohne weitere Informationen.

③ Bestimme das Verhältnis zw. $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ mittels SdpG:



⑤ Ebene Bewegungen: sind einfach gesagt Bewegungen, die in Ebenen (2D) stattfinden

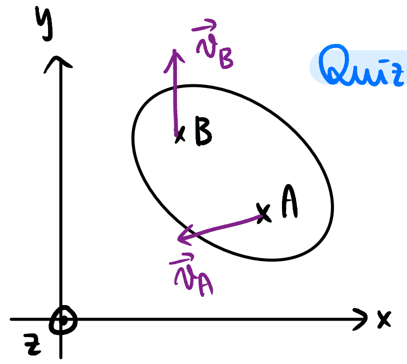
z.B.



diese Kugel führt eine ebene Bewegung bezüglich der xy-Ebene aus.
Sie hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{cases} v_z = 0 & \text{(keine } v \text{ in z-Richtung)} \\ v_x = v_x(x,y) \text{ und } v_y = v_y(x,y) \end{cases}$$

Die Geschwindigkeiten hängen nur von x und y ab (und nicht von z).

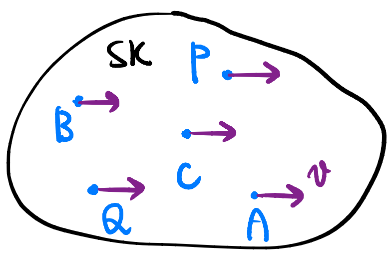


Quiz: Nehmen wir an, dieser Körper bewege sich auf die xy-Ebene. Welche Bewegung(en) dieses Körpers wären keine ebenen Bewegungen?

Warum?

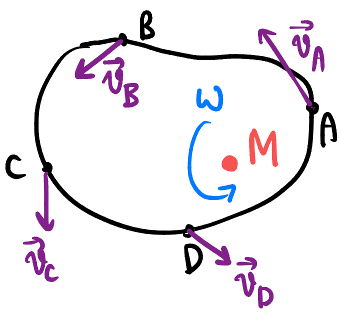
Eine starre ebene Bewegung ist momentan eines dieser 2 Bewegungen:

Translation: $\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_Q}$ $\forall P, Q \in SK$



alle Punkte auf dem SK haben denselben Geschwindigkeitsvektor.

Rotation: $\boxed{\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A}$ ← Satz vom Momentanzentrum



M: Momentanzentrum

ω: Rotationsschnelligkeit

→ Thema von nächster Woche :)

Teil 2: Übungsaufgaben:

1. [1] Ein materieller Punkt P hat die Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{r}_P(t) = \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4}\cos\pi t\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4}\sin\pi t\right)\mathbf{e}_y.$$

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_P$ des Punktes P als Funktion der Zeit.
2. Bestimmen Sie die Schnelligkeit v_P des Punktes P als Funktion der Zeit.
3. Welche Bahn beschreibt der Punkt P ?

1 Geschwindigkeit:

2 Schnelligkeit:

3 Bahn?

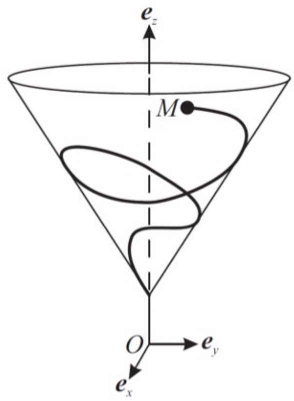
2. [2] Ein materieller Punkt M bewegt sich auf einer Kreiskegelfläche. Die Bewegung des Punktes wird in Zylinderkoordinaten durch die Gleichungen

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \cos \mu t)$$

$$\varphi = \sqrt{3}\mu t$$

$$z = 3 - \cos \mu t$$

gegeben (t wird in Zeiteinheiten gemessen und μ ist eine dimensionslose Konstante).



1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von M in Zylinderkoordinaten.
2. Berechnen Sie die Schnelligkeit von M.
3. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von M in den kartesischen Koordinaten .

recap Zylinderkoordinaten:

① Bewegungsfunktion bestimmen: $\vec{r}_M(t) =$

Geschwindigkeit: $\vec{v}_M =$

Achtung: Ableiten bei Zylinderkoordinaten:

Warum?

② Schnelligkeit: $v_M =$

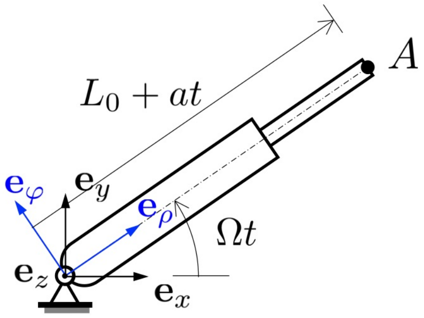
③ $\vec{v}_M$ in kartesische Koordinaten:

Einheitsvektoren: $\begin{cases} \vec{e}_\rho = \\ \vec{e}_\varphi = \\ \vec{e}_z \end{cases}$

einsetzen in $\vec{v}_M(t)$ (Zylinder) $=$

$\Rightarrow \vec{v}_M(t)$ (kartesisch) $=$

3. Ein Antrieb, der im Gelenk O drehbar gelagert wird, rotiert um die $\mathbf{e}_z$ Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω und verlängert sich gleichzeitig gemäss dem Ausdruck $L(t) = L_0 + at$, wie in der folgenden Skizze dargestellt.



1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ des Punktes A in Polar- und kartesischen Koordinaten.
2. Bestimmen Sie die Schnelligkeit v_A des Punktes A.

Wie bewegt sich das System?

2 Punkte zu merken: 1)

2)

① Polar: $\vec{r}_A(t) =$

mit $\vec{e}_\rho =$

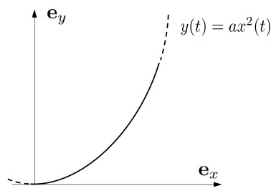
$\vec{v}_A(t) =$

kartesisch: $\vec{v}_A(t) =$

② Schnelligkeit: $v_A =$

4. Gegeben sei die Bahnkurve $y(t) = ax^2(t)$. Zur Zeit $t_1 = 1$ $[s]$ sind $x(t_1)$ und $\dot{x}(t_1)$ gegeben als

$$x(t_1) = 1; \qquad \dot{x}(t_1) = 1.$$



Was ist die Schnelligkeit $v(t_1)$?

(a) $v(t_1) = \sqrt{1 + 4a^2}$

(b) $v(t_1) = \sqrt{2 - \frac{1}{2}a^2}$

(c) $v(t_1) = \sqrt{2 + \frac{1}{2}a^2}$

(d) $v(t_1) = -\sqrt{1 + 4a^2}$

(e) $v(t_1) = \sqrt{2 + 4a^2}$

1 Ortsvektor bestimmen: $\vec{r}(t) =$