TechMech

Crash Course Differenzialgleichungen

in Analysis 2 werdet ihr DGL sehr ausführlich besprechen. In diesem Dokument werde ich nur die Sachen vorstellen, die in TechMech wichtig sind.
(kommt in Dynamik-Aufgaben vor)

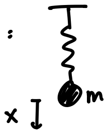
09.12.2021 Lina De Windt

Eine Differenzialgleichung ist eine Gleichung, in welcher eine unbekannte Funktion $x(t)$ einer oder mehrerer Variablen und ihre Ableitungen vorkommen.

Wofür brauchen wir jedoch DGL?

DGL sind sehr wichtig für die modellierung physikalischer Systeme. Viele grundlegende Gesetze der Physik und Chemie lassen sich als DGL formulieren. Sie beschreiben Bewegungen, Flüsse, Wärmeleitung usw.

z.B. Der harmonische Oszillator:



$m\ddot{x} + kx = mg$ ← das ist eine DGL, die die Bewegung der Masse m beschreibt!

Im Fall, dass $x(t)$ eine Funktion einer Variablen ist (d.h. $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), spricht man von einer gewöhnlichen Differenzialgleichung. (Im 1. Jahr werdet ihr euch nur mit gewöhnlichen DGL beschäftigen :))

Eine allgemeine gewöhnliche DGL hat die Form $F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots) = 0$

Bsp: $\dot{x}(t) - x(t) = t$

$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3x(t) = 0$

oft schreibt man es so:

$\dot{x} - x = t$

$\ddot{x} + \dot{x} + 3x = 0$

Bem: oft wird die Laufvariable (hier t) der Funktion weggelassen, um Schreibarbeit zu verringern oder um das ganze übersichtlich zu behalten.

Unsere Aufgabe ist es, die Funktion $x(t)$ zu bestimmen! Doch bevor wir das machen müssen wir noch paar wichtige Begriffe kennenlernen:

Klassifizierung eines DGL:

Ordnung: Die Ordnung der höchsten Ableitung, die in der DGL vorkommt.

Bsp: $\ddot{x} + x = 3$ → Ordnung: 2 $\quad \alpha x'''(t) + \beta x = 0$ → Ordnung: 3

Linearität: $x(t)$ und alle ihre Ableitungen kommen in der DGL linear vor.

Bsp: $\alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x = 0$ → linear $\quad \alpha(\ddot{x})^2 + \beta\dot{x} + \gamma x$ → nicht linear

Homogenität: Wenn keine Terme in der DGL vorkommen, die rein von der Funktionsvariablen t vorkommen.

Bsp: $\alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x = 0$ → homogen $\quad \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x = 3t$ → inhomogen

In TechMech werden wir uns nur mit linearen gewöhnlichen Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschäftigen. Deswegen werde ich hier nur zeigen, wie man diese löst.

Das ist good news, denn diese sind besonders einfach zu lösen.

Ich möchte noch ein letzter Begriff einführen, bevor wir anfangen unsere DGL zu lösen:

Anfangswertprobleme:

Ein Anfangswertproblem (AWP) n-ter Ordnung ist eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung zusammen mit n Anfangsbedingungen (AB)

$$\begin{cases} F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \\ x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = x_1, \ddot{x}(t_0) = x_3, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

d.h. also: $\quad AWP = DGL + AB$

Bsp: $\begin{cases} \ddot{x} + x = 2t^2 \\ x(0) = x_0, \; \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$ (Erinnerung: physikalisch: x = Ortsfkt.
$\dot{x}$ = Geschwindigkeit
$\ddot{x}$ = Beschleunigung

Jetzt sind wir ready um diese zu lösen, also let's go!

Lineare DGL (bzw. AWP) 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen:

Grundprinzip:

Die allgemeine Lösung hat folgende Form: $\boxed{x(t) = x_{homogen}(t) + x_{partikulär}(t)}$

$x_{homogen}(t)$: ist die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Problems. (d.h. die DGL ohne den inhomogenen Term)

$x_{partikulär}(t)$: ist eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems. Sie muss schlicht die inhomogene Gleichung erfüllen.

D.h.: Allgemeine Prozedur zum lösen von linearen DGL:

1) Lösen der homogenen Lösung (falls DGL homogen ist, sind wir hier fertig :))
2) Bestimmung einer partikulären Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Gleichung
3) Die allgemeine Lösung ist dann: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

   falls Anfangswerte vorhanden:

4) Anfangswerte in $x(t)$ einsetzen um unbekannte Koeffizienten zu bestimmen

Schauen wir uns nun an, welche Techniken wir verwenden können, um $x_h(t)$ und $x_p(t)$ zu bestimmen:

1) Homogene DGL: $a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$ ← lineare, homogene DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

wobei $a_2, a_1, a_0, c \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$

Wir machen den **Euler-Ansatz:** Wir nehmen an, dass $x(t)$ folgende Form hat:

$\boxed{x(t) = e^{\lambda t}}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ein zu bestimmender Parameter ist.

Wir setzen diesen Ansatz in die DGL ein:

$$a_2(e^{\lambda t})'' + a_1(e^{\lambda t})' + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_2 \lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} = 0$$

/ Gleichung muss $\forall t$ gelten!

$$\Rightarrow \quad Chp(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \overset{!}{=} 0$$

Wir haben nun eine Gleichung für den unbekannten Parameter λ!

Diese Gleichung heisst **Charakteristische Gleichung / Polynom ($Chp(\lambda)$)**. Wir haben nun also die DGL auf ein Nullstellenproblem überführt! :) Nun müssen wir das Charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerlegen: $Chp(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdot(\lambda - \lambda_2) = 0$

wobei λ_1, λ_2 die Nullstellen von $Chp(\lambda)$ sind.

z.B.: $\ddot{x} + 2x + 1 = 0 \Rightarrow Chp(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 5 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda+2) = 0$

Bei DGL's zweiter Ordnung können wir sogar die Mitternachtsformel verwenden, um λ_1 und λ_2 zu bestimmen:

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}}$$

Mit diesen Werten können wir das **Fundamentalsystem** der DGL aufschreiben:

$$\boxed{e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t}}$$

Bem: Falls eine Nullstelle zwei Mal vorkommt (also $(\lambda - \lambda_1)^2 = 0$), dann hat diese Nullstelle die Vielfachheit 2. Das Fundamentalsystem sieht dann so aus: $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}$

Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination aller Lösungen im Fundamentalsystem: $\boxed{x(t) = \underline{A}e^{\lambda_1 t} + \underline{B}e^{\lambda_2 t}}$. bzw. $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t}$ falls λ_1 mit Vielfachheit 2

Die Koeffizienten der Linearkombination werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Beispiel:
$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \;, \omega > 0 & \leftarrow \text{DGL} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$
$x(0)=0$, $\dot{x}(0)=v_0$: Anfangsbedingungen

Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ in DGL einsetzen:

$$(e^{\lambda t})'' + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \text{Chp}(\lambda):\ \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$\sqrt{\omega^2} = |\omega|$

$\sqrt{-1} = i$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -\omega^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$$

Fundamentalsystem: $e^{+i\omega t}, e^{-i\omega t}$

Allgemeine Lösung: $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$

$\Big/\ e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$

$\ \ e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$

$$= A\cdot(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + B\cdot(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$$

$$= \underbrace{(A+B)}_{:=\tilde{A}}\cos(\omega t) + \underbrace{i\cdot(A-B)}_{:=\tilde{B}}\sin(\omega t) \quad , \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}$$

$$= \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t)$$

Anfangsbedingungen einsetzen: $x(0) = \tilde{A}\underbrace{\cos(0)}_{1} + \tilde{B}\overset{0}{\cancel{\sin(0)}} = \tilde{A} = 0$

$$\dot{x}(0) = \omega\tilde{B}\cos(0) = v_0 \Rightarrow \tilde{B} = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \quad //$$

2) Inhomogene Gleichung:

Bei inhomogenen DGL's müssen wir neben der homogenen Lösung auch die partikuläre Lösung finden. Das ist einfach eine Lösung, die die inhomogene DGL löst. Um diese zu bestimmen wenden wir die Methode des direkten Ansatzes an.

Das wichtigste hier ist:

> Der Ansatz für $x_p(t)$ hat dieselbe Form wie der inhomogene Term $b(t)$.

Die Ansatztabelle hilft uns, einen passenden Ansatz zu finden:

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
Polynom: $\sum_{i=0}^{m} b_i x^i$	$\sum_{i=0}^{m} A_i x^i$
Exp-term-Polynom $e^{\alpha x} \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$	$e^{\alpha x} \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$
$\sin(\omega x) \sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \cos(\omega x) \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$	$\sin(\omega x) \sum_{i=0}^{m} A_i x^i + \cos(\omega x) \sum_{i=0}^{m} B_i x^i$
$\sinh(\omega x) \sum_{i=0}^{m} b_i x^i + \cosh(\omega x) \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$	$\sinh(\omega x) \sum_{i=0}^{m} A_i x^i + \cosh(\omega x) \sum_{i=0}^{m} B_i x^i$
$e^{\alpha x} \sin(\omega x) \sum_{i=0}^{m} b_i x^i + e^{\alpha x} \cos(\omega x) \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$	$e^{\alpha x} \sin(\omega x) \sum_{i=0}^{m} A_i x^i + e^{\alpha x} \cos(\omega x) \sum_{i=0}^{m} B_i x^i$

Besonderer Fall: Wenn es vorkommt, dass ein Teil der für $y_p(x)$ zu wählenden Funktion bereits in der Lösung des homogenen Problems vorhanden ist (vgl. Beispiel 24.2.3), wird der Ansatz zusätzlich mit x multipliziert.

Wiederum müssen wir einfach den Ansatz in die DGL einsetzen und die Koeffizienten bestimmen.

Bsp: $\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = \underline{g}, \quad \omega > 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ Inhomogenität (aus Serie 11, Aufgabe 1)

1) homogene Lösung: gleich wie vorheriges Bsp: $x_h(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

2) partikuläre Lösung: Inhomogenität $= g$ $\longrightarrow$ Ansatz: $x_p(t) = C \in \mathbb{R}$ in DGL einsetzen:

$$(C)'' + \omega^2 (C) \overset{!}{=} g$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega^2 C \overset{!}{=} g \quad \Rightarrow \quad C = \frac{g}{\omega^2}$$

Somit ist $x_p(t) = \frac{g}{\omega^2}$

3) allgemeine Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}$

4) Anfangsbedingungen:

$$x(0) = A\underbrace{\cos(0)}_{1} + B\,\overset{0}{\cancel{\sin(0)}} + \frac{g}{\omega^2} = A + \frac{g}{\omega^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{g}{\omega^2}$$

$$\dot{x}(0) = -A\,\overset{0}{\cancel{\sin(0)}} + B\underbrace{\cos(0)}_{1} = B \overset{!}{=} 0$$

Somit ist $x(t) = -\frac{g}{\omega^2}\cdot\cos(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} = \underline{\underline{\frac{g}{\omega^2}\cdot\left(1 - \cos(\omega t)\right)}}$

Bemerkungen:

- Wenn ein Ansatz angegeben ist, dann verwendet diesen!
  ↳ einfach noch mit den Anfangsbedingungen die Koeffizienten bestimmen.

- Bei Schwingungen ohne Dämpfung könnt ihr den Ansatz $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + C}$ verwenden,

  wobei $\boxed{\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}}$ die Kreisfrequenz ist.

  Ihr müsst dann nur noch mit den Anfangsbedingungen die Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$ bestimmen.