

Themen von Heute:

- > Update Organisatorisches
- > Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?
- > Teil 2: Theorie dieser Woche:
 1. Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)
 2. ebene Bewegungen: Translation & Rotation
 - 2.1 Satz vom Momentanzentrum (SvM)
 3. Räumliche Bewegungen
- > Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Seite 2)

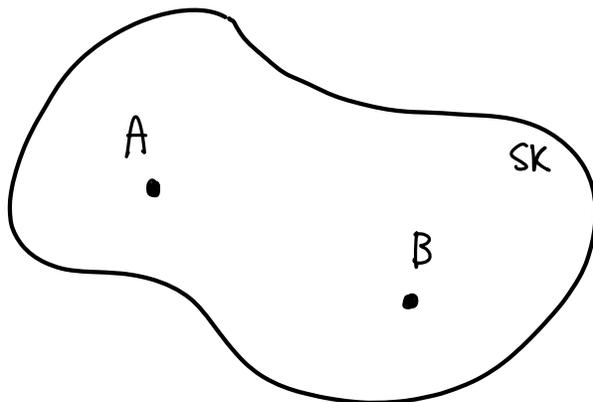
Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

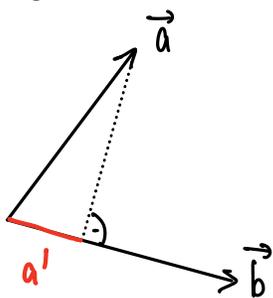
1. Der Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG):

↑ gilt für alle Starrkörper.

Dieser Satz besagt, dass die **Projektionen** (mit einem Strich ' gekennzeichnet) der **Geschwindigkeiten** von 2 Punkten auf einem SK auf ihre Verbindungslinie **gleich** sind:



So weit so gut, aber wie beschreibt man Projektionen mathematisch?



Die Projektion von \vec{a} auf \vec{b} ist: $a' = \vec{a} \cdot \vec{e}_b$

↑
Achtung das ist ein Skalar.
("Anteil von \vec{a} auf \vec{b} ") → genauer: LinAlg

Falls ihr den Vektor braucht: $\vec{a}' = a' \cdot \vec{e}_b = (\vec{a} \cdot \vec{e}_b) \cdot \vec{e}_b$

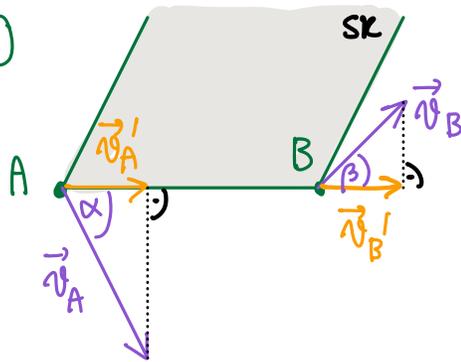
Mit diesem Kenntnissen können wir den SdpG umformen zu:



Je nach Aufgabe kann die eine oder die andere Gleichung nützlich sein.
Im Kern sind diese Gleichungen alle äquivalent!

Beispiele:

①



Quiz: Welche Aussagen sind korrekt?

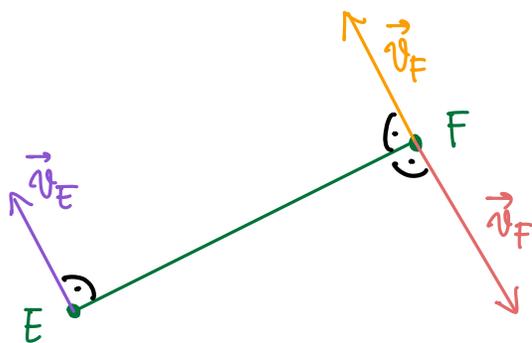
1) $\vec{v}_A \cdot \vec{e}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \vec{e}_{AB}$

2) $\vec{v}'_A = \vec{v}'_B$

3) $\vec{v}_A = \vec{v}_B$

4) $v_A \cos(\alpha) = v_B \cos(\beta)$

②



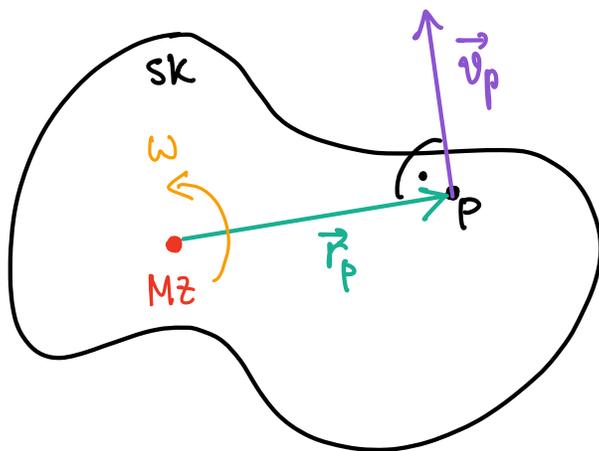
Quiz: Welches ist der korrekte Geschwindigkeitsvektor von F?

1) \vec{v}_F (orange)

2) \vec{v}_F (red)

3) Ohne weitere Informationen können wir das nicht wissen.

2.1 Der Satz vom Momentanzentrum (SvM):



Setup: **M/MZ**: Momentanzentrum

$\vec{\omega}$: Rotationsgeschwindigkeit (ist ein Vektor)

ω : Rotationsgeschwindigkeit (ist ein Skalar) $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ (wichtig für Serie)

\vec{r}_P : Vektor vom MZ zum Punkt

Wichtig: \vec{v}_P ist immer senkrecht zu \vec{r}_P (Verbindungsgerade vom MZ zum Pkt.)

Warum? \rightarrow 3 Argumente:

1) Intuition: Bsp. Bostitch

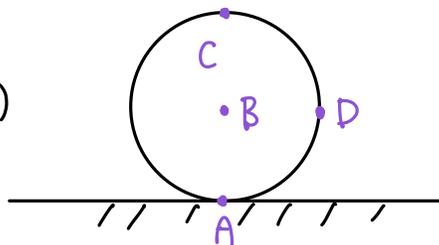
2) SdpG:

3) Kreuzprodukt:

Aber... Was ist ein **Momentanzentrum**?

\hookrightarrow Ein Momentanzentrum ist ein Punkt, der momentan **in Ruhe** (d.h. $\vec{v}=0$) ist.

Beispiel Rad:
(gleitet nicht)

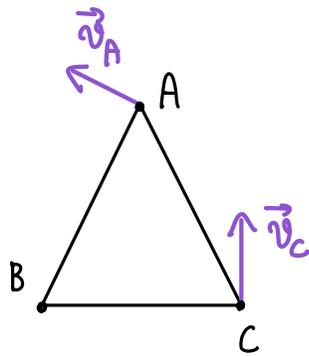


Quiz: Wo ist der MZ?

- 1) D
- 2) C
- 3) B
- 4) A

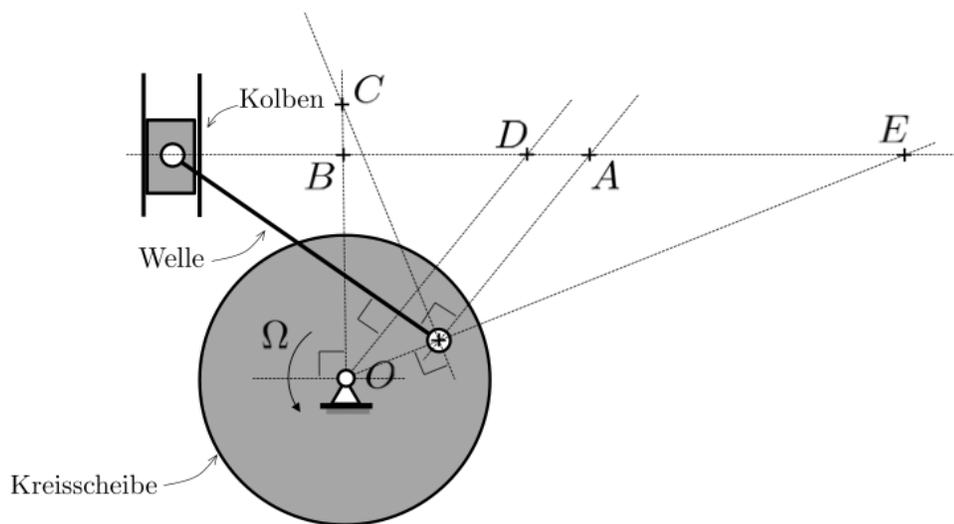
So weit so gut, aber wie bestimmt man Momentanzentren?

↳ Wir nutzen den Fakt aus, dass $\vec{v}_p \perp \vec{r}_{MP}$! → Konstruktion:)



Bsp: Serie 2 Aufgabe 7:

7. Betrachten Sie den in der Abbildung dargestellten Kurbelwellenmechanismus. Die Kreisscheibe dreht sich um den Fixpunkt O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω . Die Welle verbindet den Kolben mit der Scheibe über zwei Drehgelenke an ihren Spitzen. Der Kolben kann sich nur in vertikaler Richtung bewegen, wie in der Abbildung gezeigt. Alle Teile des Systems können als starr angenommen werden. Welcher Punkt ist das Momentanzentrum der Welle?



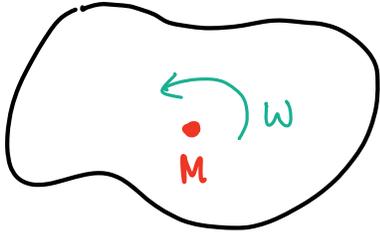
- (a) A
- (b) B
- (c) C
- (d) D
- (e) E

Good to know: $\vec{\omega}$ und ω :

$\vec{\omega}$ ist der Rotationsvektor. Aber warte mal... Was heisst überhaupt Rotationsvektor?

\Rightarrow Dieser ist folgendermassen definiert:

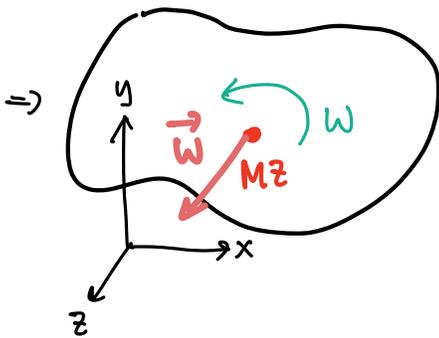
Sagen wir wir haben einen SK, der um M dreht:



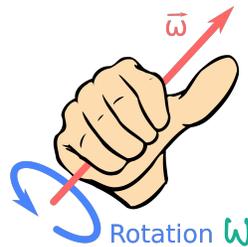
Dann zeichnen wir auch immer direkt ω ein. ω ist der Betrag von $\vec{\omega}$, sprich

$$\omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$$

Doch wo ist $\vec{\omega}$?

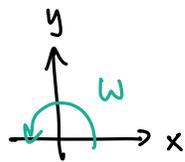


$\vec{\omega}$ ist nach der rechten-Hand-Regel mit ω verknüpft. In diesem Bsp. ist $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

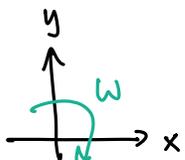


$\vec{\omega}$ zeichnen wir in 2D-Aufgaben schlicht nicht ein, weil dieser irrelevant ist (wenn $\vec{\omega}$ nur 1 Komponente hat brauchen wir nur ω für unsere Berechnungen) & weil es nicht einfach ist ihn einzuzichnen (kommt aus dem Blatt raus / geht in das Blatt hinein)

Merkt euch einfach:

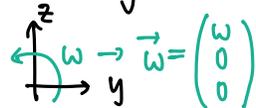


$$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

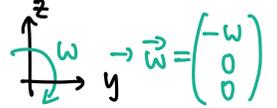


$$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}$$

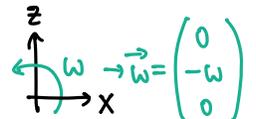
Falls sie gemein sind:



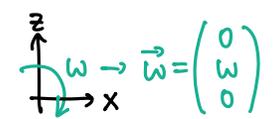
$$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

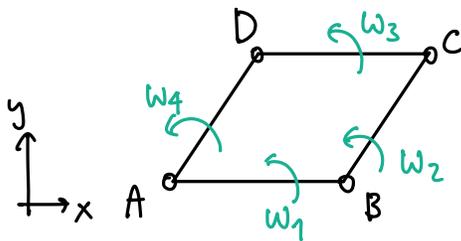


$$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

usw.

Good to know:

Die Parallelsgrammregel:



und

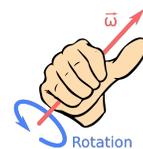


Good to know:

SvM in 2D:

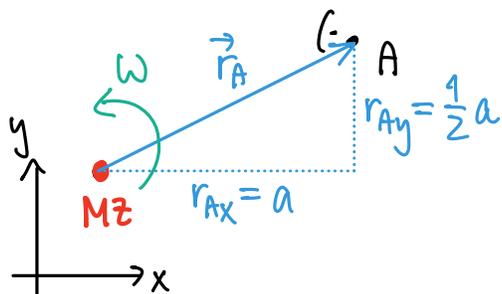
$$\vec{v}_P = \begin{pmatrix} \pm r_{Bx} \omega \\ \pm r_{By} \omega \end{pmatrix}$$

↑ Vorzeichen bestimmen mittels rechte-Hand-Regel.



Beispiel:

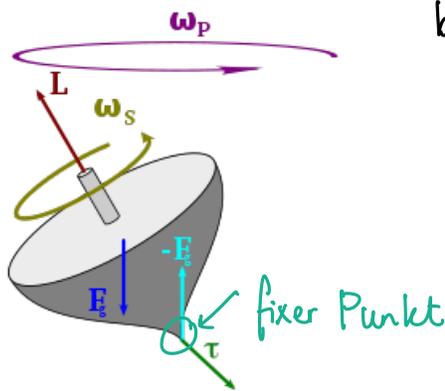
Vorgehen: 1.



2.

3. Räumliche Bewegungen:

Kreiselung: Ist nichts anderes als eine Rotation, aber $\vec{\omega}$ "rotiert" auch. Dabei bleibt nur ein Punkt des SK fixiert.



Eine Kreiselung ist momentan eine Rotation! dh. (sVM) gilt immernoch.

3.1 Die Starrkörperformel (ABBA-Formel):

ist die allgemeine Formel für eine SK-Bewegung:

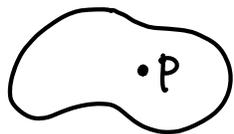
$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{Translationskomponente}} \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{Rotationskomponente}}$$

Translation:

Rotation:

Die Kinematik: beschreibt die Bewegung eines SK komplett!

Sie ist immer bezogen auf einem ausgewählten Punkt eines SK.



Kinematik von Punkt P =

Invarianten der Kinematik:

"ändern sich nicht" → dh. für alle Punkte des SK gleich.

1) (Rotationsgeschwindigkeit)

2)

Übersicht der Invarianten der Kinematik & entsprechender Bewegungszustand:

	$I_2 = 0$	$I_2 \neq 0$
$I_1 = 0$		—
$I_1 \neq 0$		

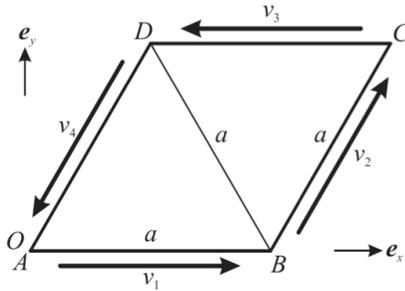
Fragen zur Theorie?

(ahoot:)

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 2

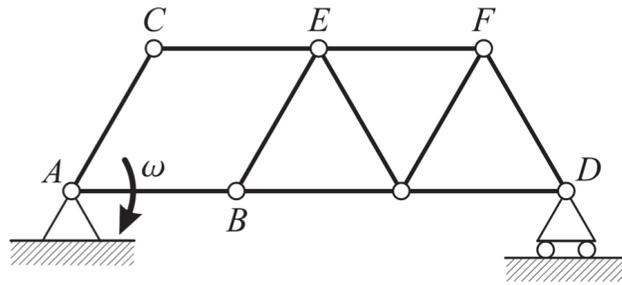
1. ¹ Der momentane Bewegungszustand einer Rhombusplatte (Geometrie siehe Skizze) ist durch die vier skizzierten Komponenten v_1 , v_2 , v_3 , v_4 der Geschwindigkeiten in Richtung der Seiten gegeben.

Beispiel: Die Geschwindigkeit v_1 ist also die Projektion der Geschwindigkeit des Punktes A entlang der Seite AB .



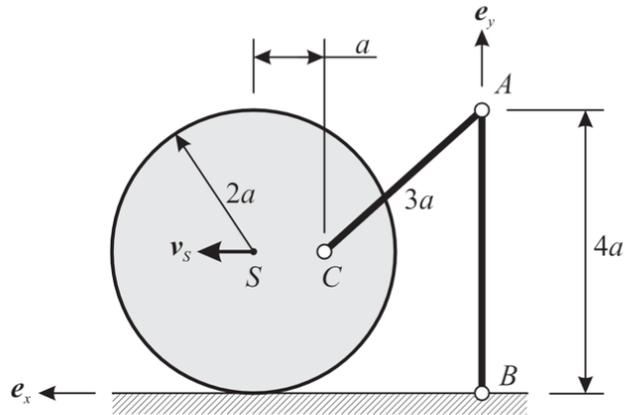
1. Finden Sie die Geschwindigkeiten der Eckpunkte.
2. Welche Beziehung muss zwischen v_1 , v_2 , v_3 und v_4 bestehen, damit der Satz der projizierten Geschwindigkeiten erfüllt ist?
3. Unter welchen Bedingungen ist die Bewegung eine Translation?

2. ² Das in der Skizze dargestellte ebene System besteht aus zehn starren Stäben gleicher Länge, die gelenkig miteinander verbunden sind. Der Stab AB rotiert momentan mit der Rotationsschnelligkeit ω .



1. Welche Teile des Systems bilden starre Körper?
2. In welche Richtung rotiert der Stab AC ? Wie gross ist seine Rotationsschnelligkeit?

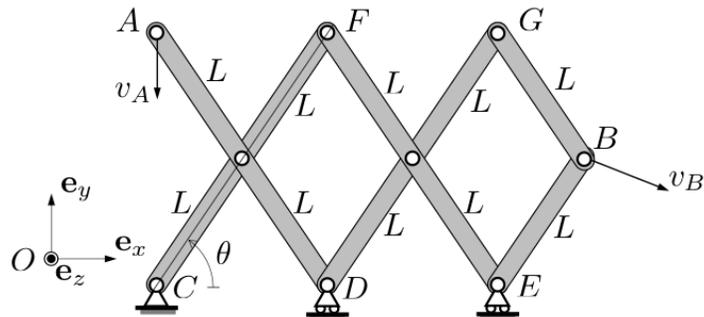
3. ³ Das eben modellierte System besteht aus einer Walze und zwei Stangen. Die Walze rollt mit der konstanten (Mittelpunkts-) Geschwindigkeit $\mathbf{v}_S = v_S \mathbf{e}_x$ nach links, ohne zu gleiten.



Bestimmen Sie in der dargestellten Lage:

1. Das Momentanzentrum und die Rotationsschnelligkeit der Walze.
2. Die Geschwindigkeit und die Schnelligkeit des Punktes C .
3. Die Rotationsschnelligkeit ω_{AB} und das Momentanzentrum des Stabes AB .
4. Die Rotationsschnelligkeit ω_{AC} und das Momentanzentrum des Stabes AC .

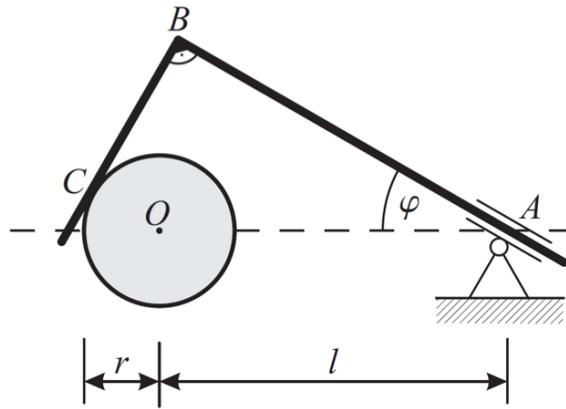
4. Das gezeigte System besteht aus starren Stäben der Längen $2L$ und L , die an ihren Mittel- und Endpunkten gelenkig miteinander verbunden sind, wie auf der Skizze dargestellt. Der Punkt C ist am Boden angelenkt, während die Punkte D und E dürfen sich nur in der dargestellten horizontalen \mathbf{e}_x -Richtung bewegen. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A = -v_A \mathbf{e}_y$ des Punktes A ist bekannt. Bezeichnen Sie mit θ den Winkel, den der Stab CF mit der \mathbf{e}_1 -Richtung einschliesst.



- (a) $\mathbf{v}_B = \frac{5}{2}v_A \tan \theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{2}v_A \mathbf{e}_y$
 (b) $\mathbf{v}_B = \frac{1}{2}v_A \tan \theta \mathbf{e}_x$
 (c) $\mathbf{v}_B = \frac{3}{2}v_A \sin \theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{5}v_A \cos \theta \mathbf{e}_y$
 (d) $\mathbf{v}_B = \frac{3}{2}v_A \cos \theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{2}v_A \sin \theta \mathbf{e}_y$
 (e) $\mathbf{v}_B = \frac{5}{2}v_A \cos \theta \mathbf{e}_x$

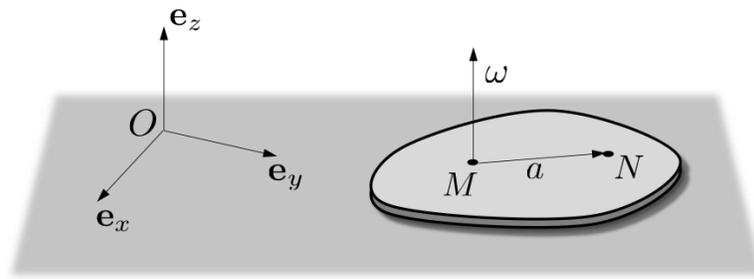
Was ist die Geschwindigkeit \mathbf{v}_B des Punktes B?

5. ⁴ Zwei starr im rechten Winkel verbundene Stäbe bewegen sich so, dass der eine Stab an einem Kreis vom Radius r gleitet und der andere durch den festen Punkt A (Abstand l vom Zentrum des Kreises) geht.



1. Zeichnen Sie in der gegebenen Lage die Richtungen der Geschwindigkeiten \mathbf{v}_A und \mathbf{v}_C der Stabpunkte A und C ein.
2. Bestimmen Sie geometrisch das Momentanzentrum.
3. Es sei die Schnelligkeit v_C gegeben. Bestimmen Sie die Rotationsschnelligkeit ω sowie die Schnelligkeiten der Stabpunkte A und B .

6. Betrachten Sie den Starrkörper auf der Skizze. Sei \mathbf{a} der Abstandsvektor zwischen 2 beliebigen Punkten des Körpers M und N , und sei $|\mathbf{a}| = 2$. Der Körper rotiert um M in der Ebene $z = 0$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind zutreffend?



- (a) $\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = 0$
- (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 2$
- (c) $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2$
- (d) $\dot{\mathbf{a}} = \omega \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$
- (e) $\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$