

Themen von Heute: Heute ist wenig Theorie, wir werden viele Aufgaben lösen 😊

> **Teil 1:** Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> **Teil 2:** Recap der Theorie von dieser Woche:

> letztes Thema in Kinematik:

- 1. Räumliche Bewegungen:
 - 1.1 Kreiselung
 - 1.2 Starrkörperformel
 - 1.3 Die Kinematik (& deren Invarianten)

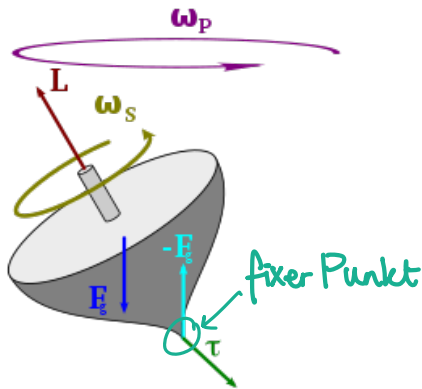
> **Teil 3:** Übungsaufgaben lösen (Serie 3)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

1. Räumliche Bewegungen:

Kreiselung: Ist nichts anderes als eine Rotation, aber $\vec{\omega}$ "rotiert" auch. Dabei



bleibt nur ein Punkt des SK fixiert.

Eine Kreiselung ist momentan eine Rotation! dh. (svM) gilt immernoch.

1.1 Die Starrkörperformel (SK-Formel, a.k.a. ABBA-Formel):

ist die allgemeine Formel für eine SK-Bewegung:



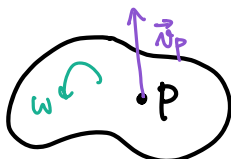
Translationskomponente Rotationskomponente

Translation:

reine Rotation (um den Pkt. B):

1.2 Die Kinematik: beschreibt die Bewegung eines SK komplett! *

Sie ist immer bezogen auf einem ausgewählten Punkt eines SK.



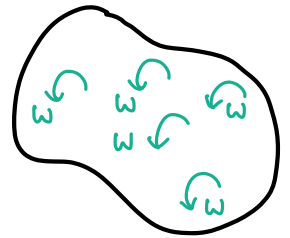
Kinematik von Punkt P =

1.3 Invarianten der Kinematik:

"ändern sich nicht" → d.h. für alle Punkte auf einem SK gleich.

1)

2)



egal wo ihr euch auf dem SK befindet, ω ist gleich!

Übersicht der Invarianten der Kinematik & entsprechender Bewegungszustand:

	$I_2 = 0$	$I_2 \neq 0$
$I_1 = 0$		—
$I_1 \neq 0$		

Zusatz: nützliche Rechenregeln für die Serie:

Good to know: die Grassmann-Identität für das Kreuzprodukt:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

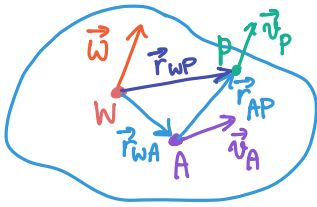
evtl. werdet ihr das in der Serie benutzen

Good to know: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ Why? → $\vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$

Erinnerung: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Für Interessierte:

* Warum beschreibt die Kinematik die Bewegung eines SKs komplett?



Wenn wir $\vec{\omega}$ und die Geschwindigkeit eines Punktes auf dem SK kennen, können wir daraus die Geschwindigkeiten aller Pkte auf dem SK bestimmen!

Bsp: Seien $\vec{\omega}$ und $\vec{v}_A$ bekannt. Dann: $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{WA}$

Was ist $\vec{v}_P$ für P beliebig, $P \in SK$? $\rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{WP}$

$$\text{nun ist } \vec{r}_{WP} = \vec{r}_{WA} + \vec{r}_{AP} \rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{WA} + \vec{r}_{AP}) = \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{WA}}_{\vec{v}_A} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

und das ist nichts anderes als die SK-Formel! 😊

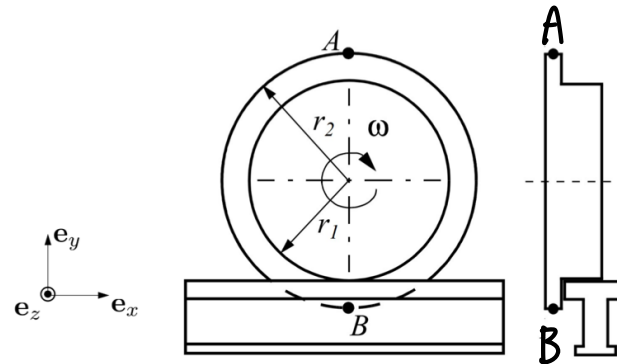
Fragen zur Theorie?

$\rightarrow$ nächste Woche: neues Kapitel **Dynamik** 😊

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 3

5. Ein Eisenbahnrad rollt mit der Rotationsschnelligkeit ω . Die Radien r_1 und r_2 sind gemäss Abbildung gegeben. Was ist die Geschwindigkeit des obersten Punktes A bzw. des untersten Punktes B des Radkranzes?

Aufwärm-Aufgabe :)



- (a) $\mathbf{v}_A = (r_2 + r_1)\omega \mathbf{e}_x$; $\mathbf{v}_B = -(r_2 - r_1)\omega \mathbf{e}_x$
(b) $\mathbf{v}_A = (r_2 + r_1)\omega \mathbf{e}_x$; $\mathbf{v}_B = (r_2 + r_1)\omega \mathbf{e}_x$
(c) $\mathbf{v}_A = r_2\omega \mathbf{e}_x + r_2\omega \mathbf{e}_y$; $\mathbf{v}_B = -r_1\omega \mathbf{e}_x + r_1\omega \mathbf{e}_y$
(d) $\mathbf{v}_A = 2r_2\omega \mathbf{e}_x$; $\mathbf{v}_B = -2r_2\omega \mathbf{e}_x$
(e) $\mathbf{v}_A = 2r_2\omega \mathbf{e}_x$; $\mathbf{v}_B = -r_1\omega \mathbf{e}_x$

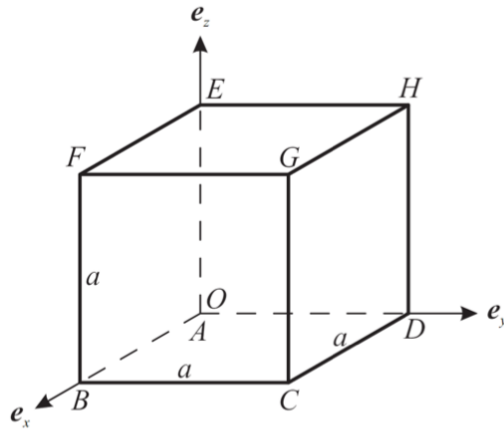
Schritt 1: Wo ist das Mz?

Schritt 2: Geschwindigkeiten bestimmen: Abstände !

1. ¹ Ein Würfel führt eine reine Rotation bezüglich des gegebenen Bezugssystems $\{O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ aus. In der gezeichneten speziellen Lage des Würfels fallen die Kanten AB , AD und AE mit den Achsen $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, bzw. $\mathbf{e}_z$ des Bezugssystems zusammen. In dieser speziellen Lage sind die Geschwindigkeiten der Punkte G bzw. H in kartesischen Komponenten gegeben:

$$\mathbf{v}_G = \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_H = \begin{pmatrix} v_{Hx} \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}$$

wobei die x-Komponente von $\mathbf{v}_H$ unbekannt ist.

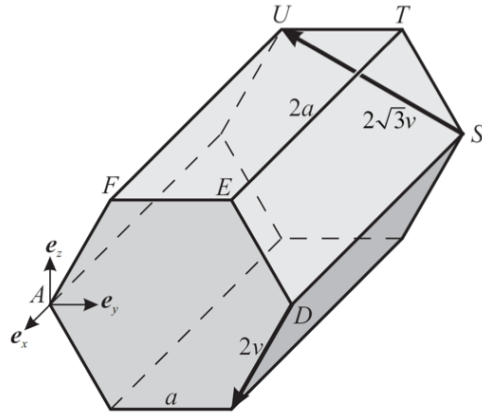


- Bestimmen Sie die x-Komponente von $\mathbf{v}_H$.
- Bestimmen Sie die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ des Punktes A .

1)

2) $\vec{\omega}$ und $\vec{v}_A$ bestimmen:

2. ² Es sei ein gerades, hexagonales Prisma gegeben. Die Länge des Prismas beträgt $2a$ und die Seitenlängen der hexagonalen Grundfläche betragen a . Zu einem gewissen Zeitpunkt hat die Geschwindigkeit des Punktes S den Betrag $2\sqrt{3}v$ und zeigt in Richtung $\mathbf{r}_{SU}$, und die Geschwindigkeit im Punkt D hat den Betrag $2v$ und zeigt in Richtung $\mathbf{r}_{DC}$. Zusätzlich ist zu diesem Zeitpunkt bekannt, dass in E die Geschwindigkeitskomponente in z -Richtung verschwindet und die Ebene $FETU$ parallel zur $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ -Ebene liegt.

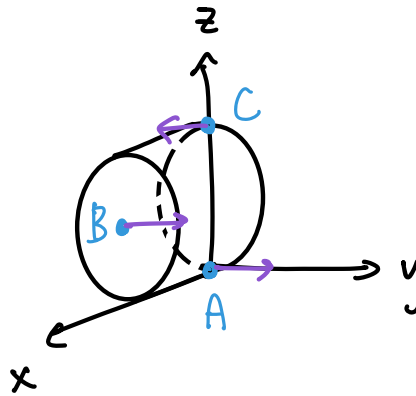
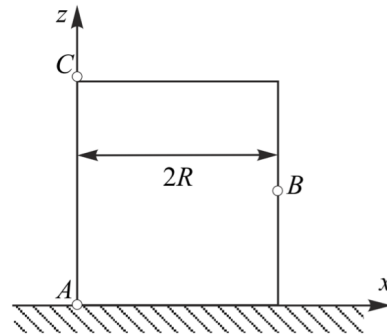
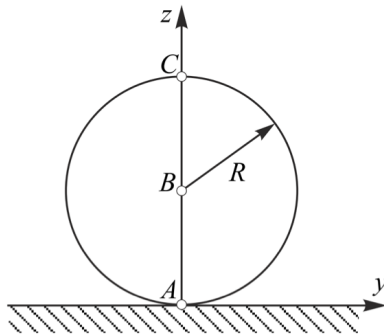


1. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes der projizierten Geschwindigkeiten für diesen momentanen Bewegungszustand die Geschwindigkeit im Punkt E .
2. Bestimmen Sie die Kinematik im Punkt E .
3. Von welchem Typ ist dieser momentane Bewegungszustand? Geben Sie eine mathematische Begründung an.

1) $\vec{v}_E$?

2) Kinematik: $\{\vec{v}_E, \vec{\omega}\} \rightarrow \vec{\omega}$ bestimmen:

3. Auf der Ebene $z = 0$ (kartesisches Koordinatensystem) gleitet ein starrer Drehzylinder (Radius R , Länge $2R$) so, dass der Zylinder stets auf seiner Mantelfläche aufliegt. Der Bewegungszustand wird durch die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_A = v\mathbf{e}_y$, $\mathbf{v}_B = 2v\mathbf{e}_y$, $\mathbf{v}_C = -v\mathbf{e}_y$ der Punkte A , B und C beschrieben. Begründen Sie, dass die Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ keine y -Komponente haben kann und dass daher die Bewegung eine momentane Rotation ist. Welches $\vec{\omega}$ und welche momentane Rotationsachse hat der Zylinder? ② ③ ④



① zeigen, dass $\vec{\omega}$ keine y -Komponente hat:

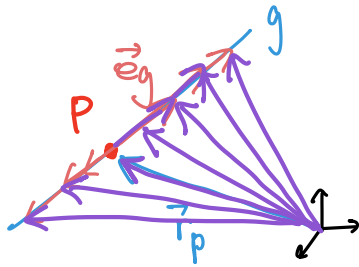
② zeigen, dass die Bewegung eine momentane Rotation ist

③ $\vec{\omega}$ bestimmen

④ momentane Rotationsachse bestimmen:

Crashcourse Geradenbestimmung:

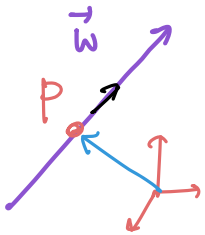
Eine Gerade wird mathematisch so beschrieben:



$$g: \vec{r}(\alpha) = \vec{r}_p + \alpha \cdot \vec{e}_g \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

In unserem Fall ... Wir suchen die Rotationsachse:

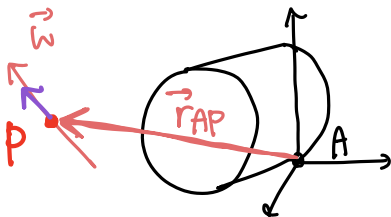
$$\vec{r}(\alpha) = \vec{r}_p + \alpha \cdot \vec{e}_w$$



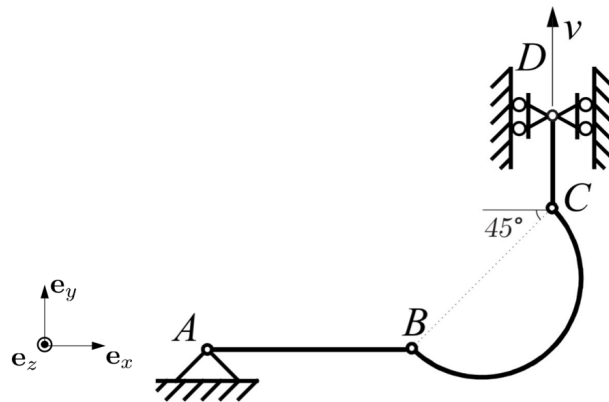
Was ist $\vec{e}_w$?

Was ist $\vec{r}_p$?

Wir definieren einen neuen Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$ und nehmen an, dass dieser Punkt sich auf die Rotationsachse befindet.



4. Die drei starren Stäbe AB , BC und CD sind reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden und entsprechend der Skizze gelagert. Stab BC ist ein Halbkreis mit Radius R . Die Schnelligkeit vom Punkt B beträgt $|\mathbf{v}_B| = v$. Vom Punkt D weiss man, dass er sich mit der Geschwindigkeit v nach oben bewegt. Alle Stäbe bleiben in der gezeichneten Ebene. Was für eine Bewegung beschreibt der Stab BC momentan?



Schritt 1 :

Schritt 2: