Technische Mechanik

Übung 5

26.10.2021
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

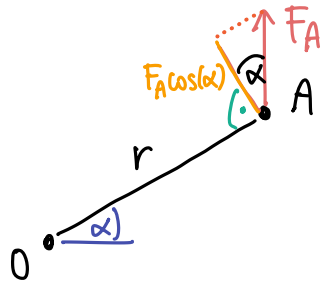
1. Äquivalenz & Reduktion von Kräftegruppen
   - 1.1 Charakterisierung von Kräftegruppen
   - 1.2 Die Dyname & ihre Invarianten
   - 1.3 statische Äquivalenz
   - 1.4 Charakterisierung einer Kräftegruppe mittels der Invarianten der Dyname
2. Der Freiheitsgrad

> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 5)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

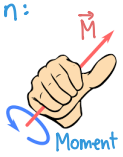
Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

Good to know: Momente berechnen in 2D:



$$M_O^A = r \underbrace{F_A \cos(\alpha)}_{\text{die Komponente der Kraft, die senkrecht auf } \vec{r} \text{ steht}}$$

→ dann Richtung mit der rechten-Hand-Regel bestimmen:



$$\rightarrow \vec{M}_O^A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r F_A \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Check: $\vec{M}_O^A = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_A \cdot r\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

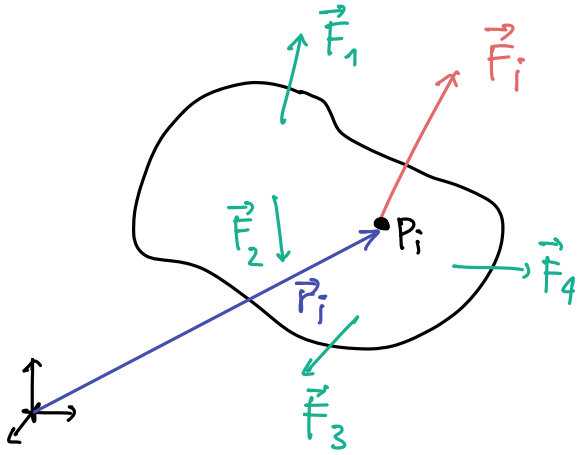
$\vec{M}$ hat in 2D immer nur eine Komponente!

1. Äquivalenz & Reduktion von Kräftegruppen

Als erstes müssen wir einige Begriffe kennenlernen:

1.1 Charakterisierung von Kräftegruppen:

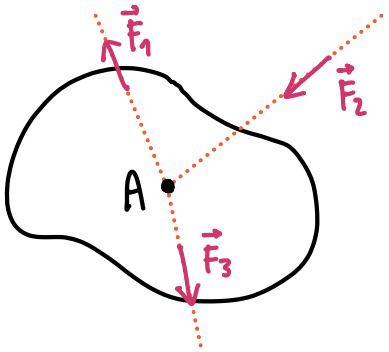
Kräftegruppe: Ist eine Sammlung von Kräften, die an einem Körper angreifen.



P_i:

$\vec{r}_i$:

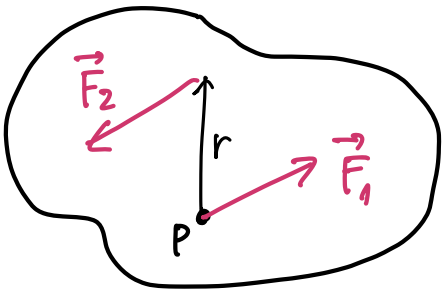
Zentrale Kräftegruppe: Wenn die Wirkungslinien aller Kräfte einer Kräftegruppe durch einen Punkt gehen



$$\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$$

Dann ist $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ und

Kräftepaar: besteht aus 2 entgegengesetzt gerichtete Kräfte gleichen Betrags.



$$\vec{R} = 0$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad *1$$

Abstand zw. den 2 Angriffspunkten

das Moment ist in diesem Fall unabhängig vom Bezugspunkt! *2

$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F \quad ; \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$

*1 Warum? Nehmen wir an, wir berechnen das Moment bezüglich 0. Dann:

$$\vec{M}_0^{tot} = \vec{M}_0^{F_1} + \vec{M}_0^{F_2} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \underset{\vec{F}_2 = -\vec{F}_1}{=} \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times (-\vec{F}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \underset{\substack{\vec{F}_1 = \vec{F} \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}}}{=} \vec{r} \times \vec{F}$$

(Abstand zw. den 2 Angriffspkt.)

*2 Warum? → Transformationsregel: $\vec{M}_P = \vec{M}_Q^{tot} + \vec{r}_{PQ} \times \vec{R} \underset{\vec{R}=0}{=} \vec{M}_Q \Rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_Q \quad \forall P, Q \in SK$

Nullsystem / System im Gleichgewicht: Eine Kräftegruppe ist ein Nullsystem, bzw. das System (d.h. Körper und Kräftegruppe) ist im Gleichgewicht, wenn

Symbolisch: $\{\vec{F}_i\} \Leftrightarrow 0$

1.2 Die Dyname

einer Kräftegruppe ist definiert als:

(analog zur Kinemate in Kinematik)

Eine Kräftegruppe kann immer auf ihre Dyname reduziert werden.
Analog zur Kinemate beschreibt die Dyname eine Kräftegruppe komplett & besitzt 2 Invarianten:

1. Invariante:

2. Invariante:

Erinnerung: Invariante = überall gleich auf SK.

Nun stellt sich die Frage, wann 2 Kräftegruppen an einem SK dieselbe Wirkung haben.
Dann heissen diese Kräftegruppen (statisch) äquivalent.

1.3 Statische Äquivalenz:

Definitionsgemäss sind 2 Kräftegruppen statisch äquivalent, wenn ihre Gesamtleistungen gleich sind: $\boxed{}$ $\forall$ SK-Bewegungen

Doch was folgt daraus?

Erinnerung: P = Gesamtleistung $= \vec{R}\cdot\vec{v}_B + \vec{M}_B\cdot\vec{\omega}$ ← Achtung das gilt nur bei SK (wir schauen uns jetzt nur SK an)

$\vec{M}_B$ = Gesamtmoment bezüglich $B = \sum_i \vec{M}_B^i = \sum_i \vec{r}_{Bi} \times \vec{F}_i$

$\vec{R}$ = Resultierende $= \sum_i \vec{F}_i$

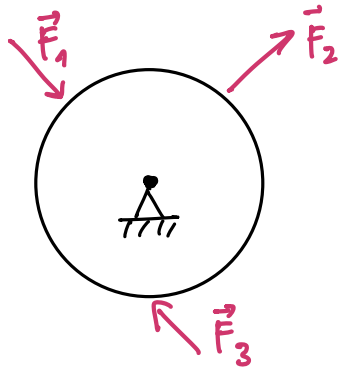
$\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ = Kinemate

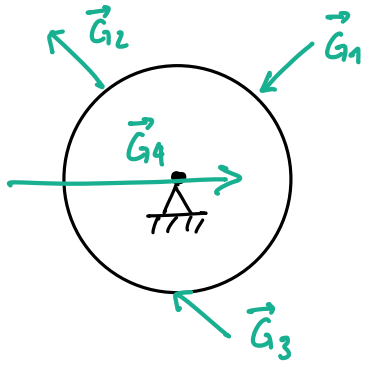
aus $P =$ erhalten wir, dass 2 Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\}$ & $\{\vec{G}_j\}$ statisch äquivalent sind, wenn und

D.h. in Kürze:

⚠ Wenn 2 Kräftegruppen in einem beliebigen Punkt die gleiche Dyname $\{\vec{R}, \vec{M}_P^{tot}\}$ haben, sind sie statisch äquivalent.

Bsp:





$\{F_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$ $\qquad$ $\{\vec{G}_i\} = \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3, \vec{G}_4\}$

$\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_i\}$ sind verschiedene Kräftegruppen, die auf denselben SK wirken.

Falls $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{R}_2 = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \vec{G}_4$ und

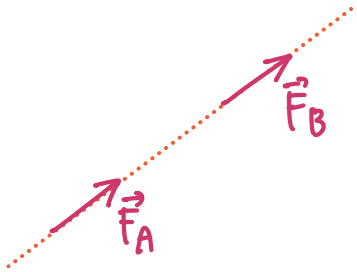
$\vec{M}_P\{\vec{F}_i\} = \vec{M}_P\{\vec{G}_i\}$, dann sind $\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_i\}$ statisch äquivalent.

Bem: **Statische äquivalenz von 2 Kräften:**

2 Kräfte $\vec{F}$ und $\vec{G}$ sind statisch äquivalent wenn:

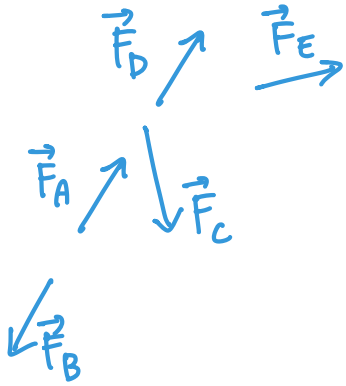
$\vec{F} = \vec{G}$ <u>und</u> Wirkungslinie von $\vec{F}$ = Wirkungslinie von $\vec{G}$

Bsp:



$\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ sind statisch äquivalent

Quiz: Welche Kräfte sind statisch äquivalent?



Zusammenfassung:

Charakterisierung einer Kräftegruppe mittels der Invarianten der Dyname:

Kräftepaar ($\hat{=}$ Moment):

Einzelkraft:

Nullsystem:

Schraube:

Für 2 Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_i\}$: **statisch äquivalent** wenn

$$\vec{R}\{\vec{F}_i\} = \vec{R}\{\vec{G}_i\} \quad \text{und} \quad \vec{M}_p\{\vec{F}_i\} = \vec{M}_p\{\vec{G}_i\}$$

beliebig, aber gleicher Pkt.

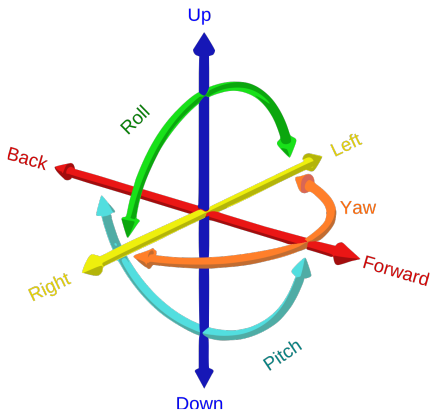
2. Der Freiheitsgrad:

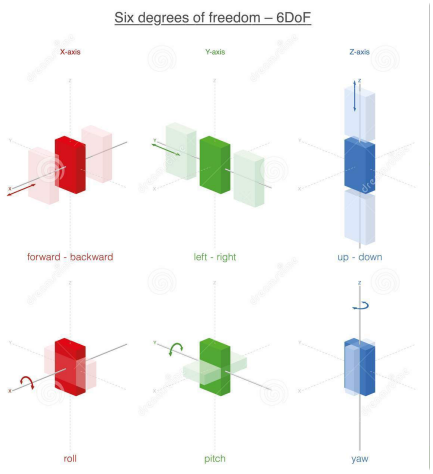
Der Freiheitsgrad ist die Anzahl unabhängiger Bewegungen, welcher ein Körper oder System machen kann.

Um den Freiheitsgrad eines Systems zu bestimmen, muss man salopp gesagt sich überlegen, in welche Richtungen sich das System unabhängig bewegen kann.
(Keine Angst es gibt auch eine Formel dafür :))

Schauen wir uns zuerst einfach ein einzelner freier Körper im Raum an:

Freier Körper in 3D:

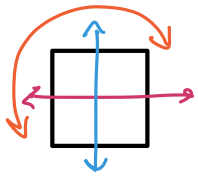




Freiheitsgrad =

↑ kann sich in all diese "Richtungen" bewegen! Bzw. alle Bewegungen sind Kombinationen von diesen 6!

Freier Körper in 2D:

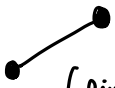
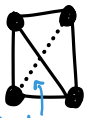


→ kann sich in 3 "Richtungen" (x, y, Rotation) bewegen

Freiheitsgrad =

Nun wollen wir uns anschauen, wie man den Freiheitsgrad eines Systems (aus mehreren SK & Bindungen) bestimmen kann. Dafür haben wir eine nützliche Formel:

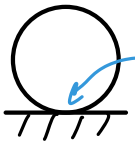
Beispiele:

	2D	3D
• (ein Punkt)	n=	n=3
 (ein Stab)	n= b= ⇒ f= *	n= b= ⇒ f=
	n= b= ⇒ f=	n= b= ⇒ f=
 diese Bindung schränkt in 2D den Freiheitsgrad nicht weiter ein → nicht mitzählen!	n= b= ⇒ f=	n= b= ⇒ f=

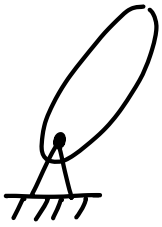
↳ wir haben hier eigentlich bewiesen, dass ein SK in 2D den Freiheitsgrad , in 3D den Freiheitsgrad hat! (ein SK ist eine Ansammlung von zusammengebundenen materiellen Punkten)

*Achtung ein <u>Stab</u> hat f= in 3D (diese Rotation ↻ kann nicht definiert werden)

Beispiel: mehrere SK in 2D:



n=
b=
⇒ f=



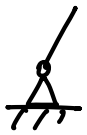
n=
b=
⇒ f=

n=
b=
⇒ f=

Tipp: b bestimmen: überlege, in welche Richtungen der Körper sich nicht mehr bewegen kann.

Die wichtigsten Bindungen (für die Serie 5):

b=



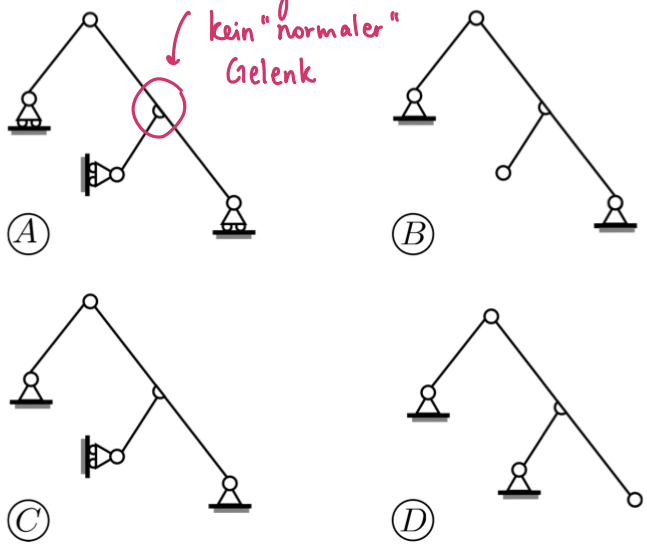
b=

b=

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 5

4. Welche der folgenden Systemen haben den Freiheitsgrad 2 ?

Achtung das ist kein "normaler" Gelenk



(a) Nur A.

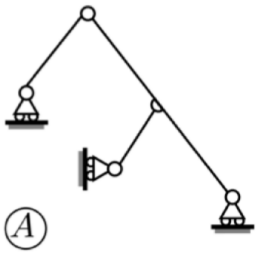
(b) Nur D.

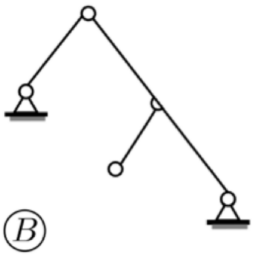
(c) Nur B und C.

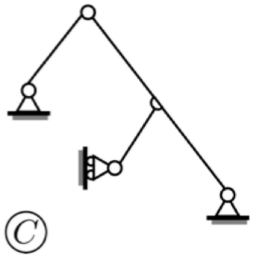
(d) Nur A, B und D.

(e) Alle.

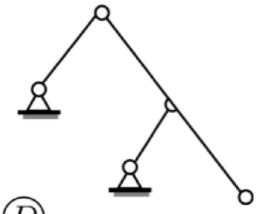
alle Systeme haben ..... SK → n= .....





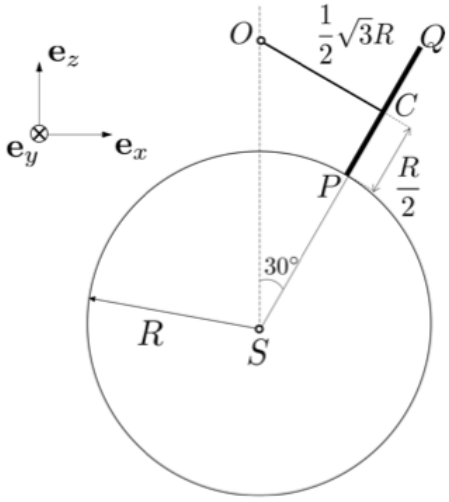


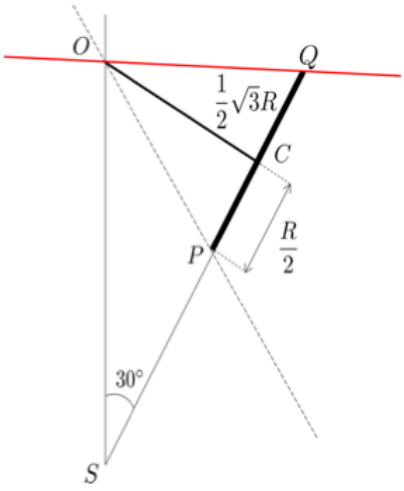
(C)



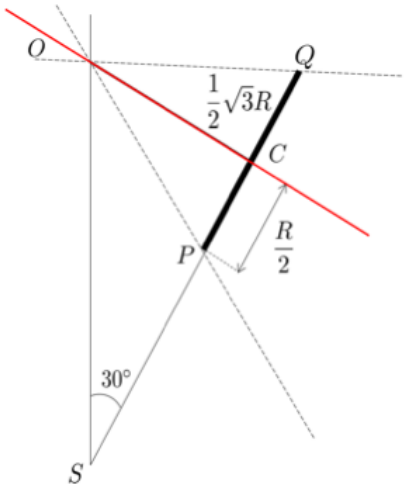
(D)

3. Auf einer Kugel mit dem Radius R rollt eine Kreisscheibe mit dem Radius $R/2$, die auf einer in O gelagerten Welle sitzt. Die Scheibenebene enthält im Berührungspunkt P die Normale zur Kugelfläche, welche mit der Vertikalen einen Winkel von $\pi/6$ einschliesst. Der Mittelpunkt C der Nabe bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_C = (0,\ v,\ 0)$. In welcher Abbildung ist die richtige momentane Rotationsachse der Kreiselung dargestellt?

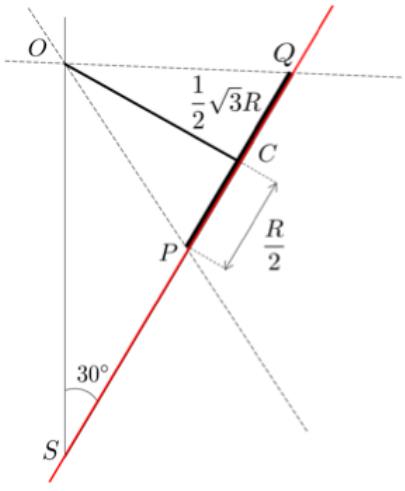




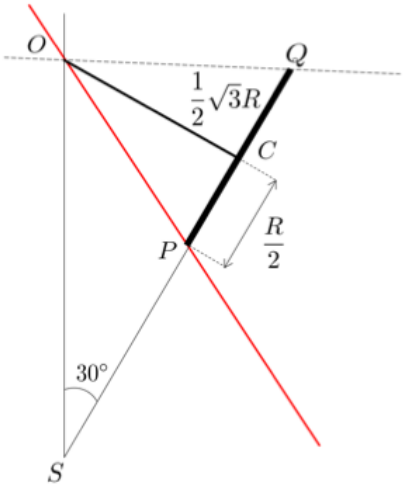
(a)



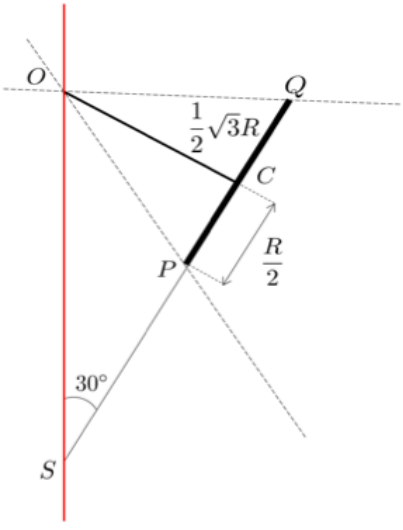
(b)



(c)

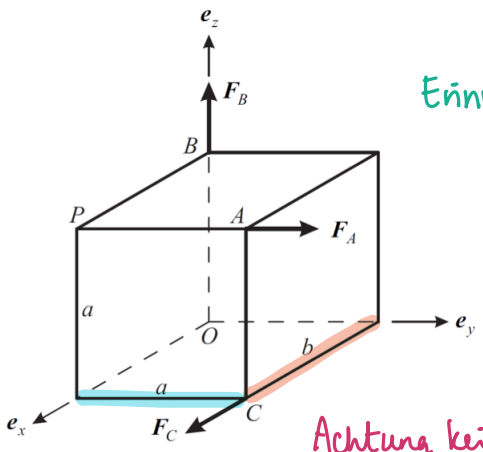


(d)



(e)

1. [1] Die Kräfte $\mathbf{F}_A = F\mathbf{e}_y$, $\mathbf{F}_B = F\mathbf{e}_z$, und $\mathbf{F}_C = F\mathbf{e}_x$ greifen gemäss Abbildung an einem starren Quader an (Kantenlängen b, a, a).



Erinnerung: $\vec{M}_0^A =$

Achtung kein Würfel!

1. Berechnen Sie die Dyname der Kräftegruppe in O.
2. Berechnen Sie die Dyname der Kräftegruppe in P.
3. Wie muss das Verhältnis $\frac{a}{b}$ gewählt werden, damit sich die Kräftegruppe auf eine Einzelkraft reduzieren lässt?

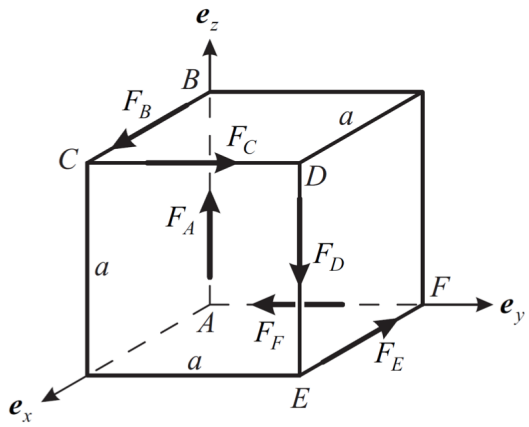
→ alle Kräfte in Vektorform aufschreiben:

1) Dyname im Punkt O=

2) Dyname im Pkt. P =

3) Einzelkraft:

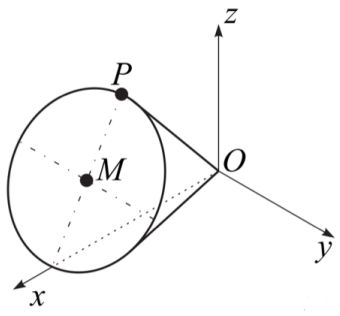
2. [2] Bestimmen Sie die eingezeichneten Komponenten der sechs am Würfel (Seitenlänge a) skizzierten Kräfte so, dass sie einem Momentvektor in z-Richtung vom Betrag M statisch äquivalent sind.

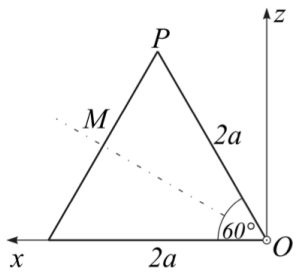


Wir müssen die Kräfte so bestimmen, s.d. statisch äquivalent zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ d.h. $\vec{R} =$ und $\vec{M}_0^{tot} =$ ← unser Ziel.

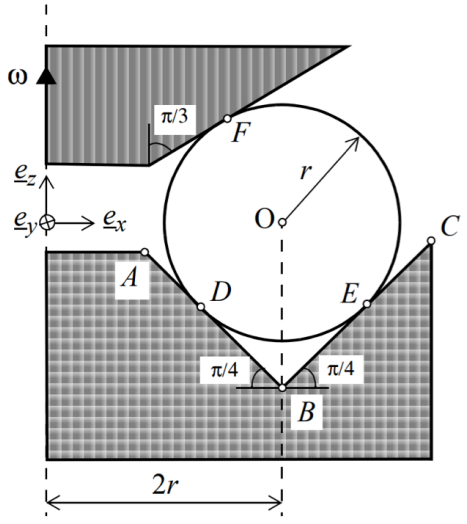
5. Ein starrer Kegel rollt mit der gegebenen Rotationsschnelligkeit ω auf der xy-Ebene ab, so dass seine Spitze stets im Ursprung des raumfesten kartesischem Koordinatensystems liegt. Die Abmessungen sind der Skizze zu entnehmen.





1. Was ist in der skizzierten Lage die momentane Rotationsachse?
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_P$ und $\mathbf{v}_M$ in den Punkten P und M in der momentanen Lage.
3. Wie lange braucht der Kegel fur eine Umdrehung um die z-Achse?

6. Eine Kugel mit Radius r rollt auf einer festen Kegelfläche AB vom halben Offnungswinkel $\pi/4$, einer festen Kegelfläche BC vom gleichen Öffnungswinkel und auf der gezeichneten, um $\mathbf{e}_z$ drehenden Welle ab. Die Welle rotiere mit der Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Was ist die Kinemate der Kugel in ihrem Mittelpunkt O?



(a) $\mathbf{v}_O = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}(2-\sqrt{3})r\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = -2\omega(\sqrt{3}-2)\,\mathbf{e}_x.$

(b) $\mathbf{v}_O = \sqrt{\dfrac{3}{2}}(3-\sqrt{2})r\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = 2\omega(3+\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(c) $\mathbf{v}_O = \sqrt{2}(3-\sqrt{2})\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = r\omega(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(d) $\mathbf{v}_O = \dfrac{3}{\sqrt{2}}(3-\sqrt{2})r\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = \omega(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(e) $\mathbf{v}_O = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})r\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = -3\omega(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

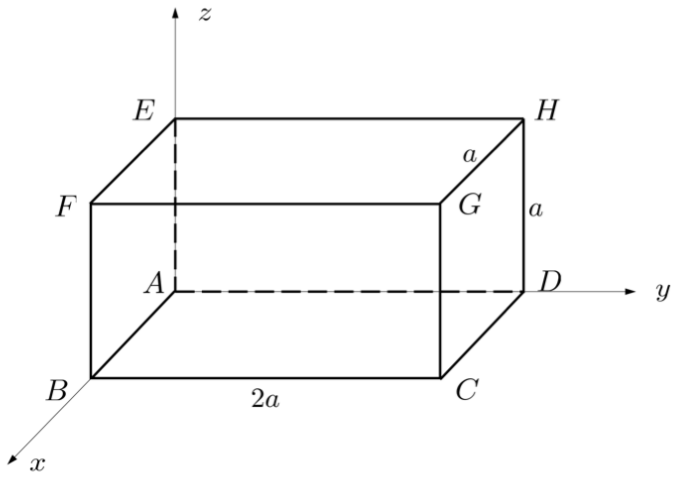
7. *(Optional)* Der Bewegungszustand eines starren Quaders mit den Seitenlängen a, a und $2a$ ist zur Zeit t durch die Geschwindigkeiten in den Ecken E, D, F, die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und die Schnelligkeit $v_Z = \sqrt{2}v$ auf der Zentralachse gegeben:

↳ "Rotationsachse bei einer Schraubung"

↳ $\vec{v} \neq 0$, aber der Körper rotiert nach wie vor um diese Achse mit Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

$$\mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} 2v, \\ e_2, \\ e_3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v}_D = \begin{pmatrix} d_1, \\ d_2, \\ 2v \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v}_F = \begin{pmatrix} f_1, \\ v, \\ f_3 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega \begin{pmatrix} 0, \\ 1, \\ 1 \end{pmatrix};$$

wobei e_2, e_3, , d_1, d_2, f_1, f_3, ω unbekannt sind.



1. Stellen Sie den Bewegungszustand durch eine Kinemate in der Ecke D dar.
2. Bestimmen Sie die Zentralachse ζ.