

Themen von Heute:

- > Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?
- > Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:
 1. Statische & Kinematische Bestimmtheit
 2. (nicht) Kippen
- > Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Seite 8)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

1. Statische und Kinematische Bestimmtheit:

Mithilfe der statischen / kinematischen Bestimmtheit kann man prüfen, ob sich ein System im mechanischen / kinematischen Gleichgewicht befindet. Das heißt: Inwiefern das vorhandene System in seiner Beweglichkeit aufgrund von Lagern oder Gelenken eingeschränkt ist.

Für Maschinenbauer / Bauingenieure usw. wird es dann verwendet, um zu entscheiden welche Berechnungsmethoden angewandt werden können

↑ Wir werden das nicht machen :)

Systeme werden bezüglich statischer Bestimmtheit in 3 Kategorien eingeordnet:

Statisch Bestimmt:

Ein System ist statisch bestimmt, wenn jede Starrkörper-Bewegungsmöglichkeit genau durch ein Lager- oder Verbindungsreaktion unterbunden wird. Das heißt: Wenn ein System statisch bestimmt ist, gilt:

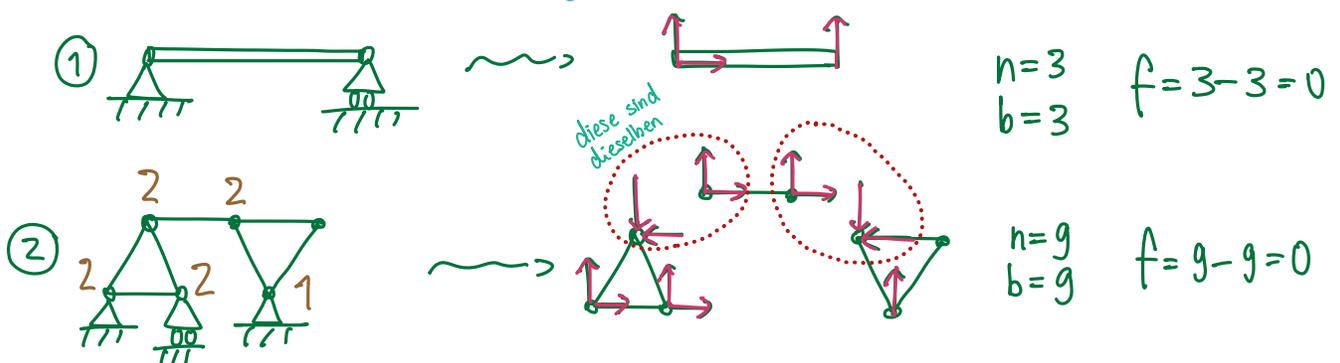
$$f = n - b = 0$$

Erinnerung: f : Freiheitsgrad

n : Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Starrkörper

b : Anzahl Bindungen

Beispiele:



Statisch Unbestimmt:

Ein System ist statisch unbestimmt, wenn die Anzahl der unbekanntes Reaktionskräfte (Lagerkräfte, Verbindungskräfte usw.) grösser ist als die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen. \rightarrow $KB(x): 0 = \dots$
 $KB(y): 0 = \dots$
 \vdots usw.
(das was wir in Statikaufgaben aufstellen)

D.h. wenn

$$f = n - b < 0$$

Tipp: Intuitiv: Wenn man irgendwo eine Bindungskraft (in einer Richtung) wegnehmen kann ohne dass das System deswegen zusammenfällt, ist das System statisch unbestimmt.

Good to know: In diesem Fall ist es nicht möglich, die unbekanntes Reaktionskräfte mittels der Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen.

Good to know: $b - n$ ist der Grad der statischen Unbestimmtheit.

Beispiele:

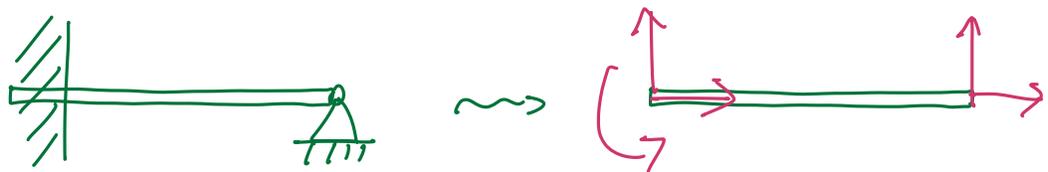
①



$$n = 3$$
$$b = 4 \quad \rightarrow \quad f = 3 - 4 = -1$$

und: $4 - 3 = 1 \rightarrow$ einfach statisch unbestimmt

②



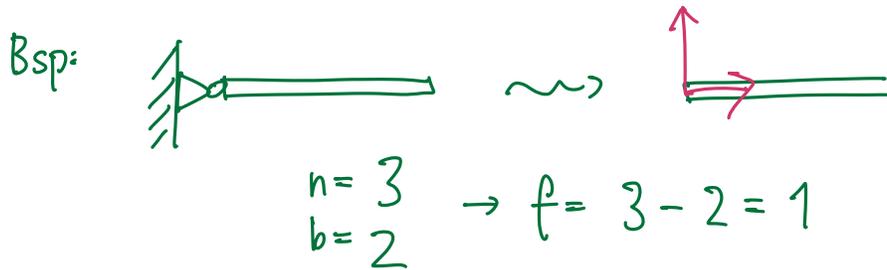
$$n = 3$$
$$b = 5 \quad \rightarrow \quad f = 3 - 5 = -2$$

und: $5 - 3 = 2 \rightarrow$ zweifach statisch unbestimmt

Mechanismus:

Ein System kann weder statisch bestimmt noch statisch unbestimmt sein, und zwar wenn $f = n - b > 0$.

Dann ist das System ein Mechanismus (bzw. statisch überbestimmt).



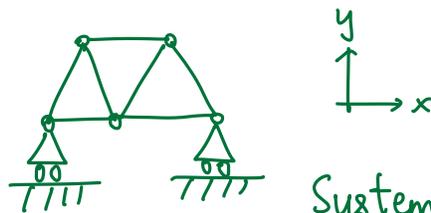
Es interessiert uns auch noch, wie sich das System kinematisch verhält:

Kinematisch unbestimmt:

Ein System ist kinematisch unbestimmt, falls zulässige momentane Bewegungszustände möglich sind.

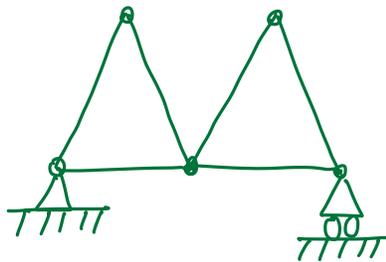
Beispiele:

①

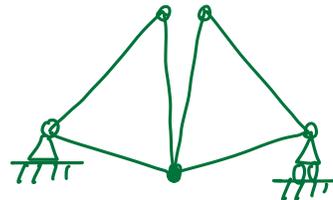


System kann sich in x-Richtung bewegen
 \Rightarrow kinematisch unbestimmt

②



System kann sich z.B. so bewegen:



\Rightarrow kinematisch unbestimmt

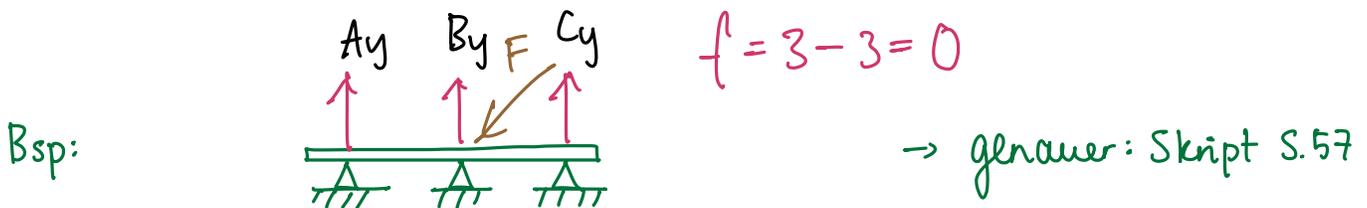
Good to know: Falls eine Gleichung trivial ist (z.B. $\sum F_x = 0$) ist es oft ein Indiz für kinematische Unbestimmtheit.

Wichtig: statisch überbestimmt ($f > 0$) ^{impliziert} \Rightarrow kinematisch unbestimmt,
 Doch es ist keine notwendige Bedingung, um das System kinematisch unbestimmt zu machen. D.h. die umgekehrte Aussage gilt nicht:
 kin.-unbestimmt $\not\Rightarrow f > 0$ und insbesondere:
 $f \neq 0 \not\Rightarrow$ nicht kinematisch unbestimmt.

Warum?

\hookrightarrow Es gibt Systeme, die gleichzeitig statisch unbestimmt (d.h. $f < 0$) und kinematisch unbestimmt sind.

Ich weiss es ist ein bisschen verwirrend $\ddot{}$ aber man muss einfach aufpassen.



\rightarrow der Balken kann sich in x -Richtung bewegen \Rightarrow kinematisch unbestimmt

\rightarrow 2 Gleichungen, 3 Unbekannte \Rightarrow statisch unbestimmt

$$KB(x): 0 = -F_x$$

$$KB(y): 0 = A_y + B_y + C_y - F_y$$

$$MB(z): 0 = \dots$$

$$2 - 3 = -1 < 0$$

Statische & Kinematische Bestimmtheit, zusammengefasst:

$$f = n - b = 0 \quad (\Leftrightarrow) \text{ statisch bestimmt}$$

$$f = n - b < 0 \quad (\Leftrightarrow) \text{ statisch unbestimmt}$$

$$f = n - b > 0 \quad (\Leftrightarrow) \text{ Mechanismus}$$

System kann sich bewegen (\Leftrightarrow) kinematisch unbestimmt

wobei $n = \#$ GGW-Bedingungen
($\hat{=}$ Σ der Freiheitsgrade
der einzelnen SK)

$b = \#$ Unbekannte
($\hat{=}$ $\#$ Lager- und
Bindungskräfte)

Erinnerung: In 2D hat ein SK 3 GGW-Gleichungen,
In 3D hat ein SK 6 GGW-Gleichungen

Warum?
 \hookrightarrow siehe Notes Ü6

Wichtige Zusammenhänge:

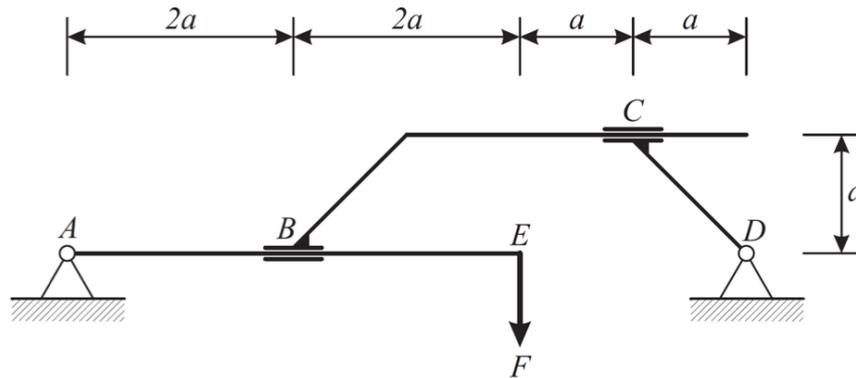
- "Ein System aus starren Teilen ist genau dann statisch bestimmt, wenn es [...] weder statisch unbestimmt noch kinematisch unbestimmt ist."
 \hookrightarrow aus Skript S.57
- Ein kinematisch unbestimmtes System kann nicht statisch bestimmt sein.
- Ein System kann gleichzeitig kinematisch und statisch unbestimmt sein.
- Aufpassen: nicht statisch bestimmt $\not\leftrightarrow$ statisch unbestimmt
- Statisch überbestimmt (d.h. $f > 0$) \Rightarrow kinematisch unbestimmt.

Achtung \uparrow impliziert nicht \Leftrightarrow !

d.h. insbesondere: $f = n - b \neq 0 \not\leftrightarrow$ nicht kinematisch unbestimmt

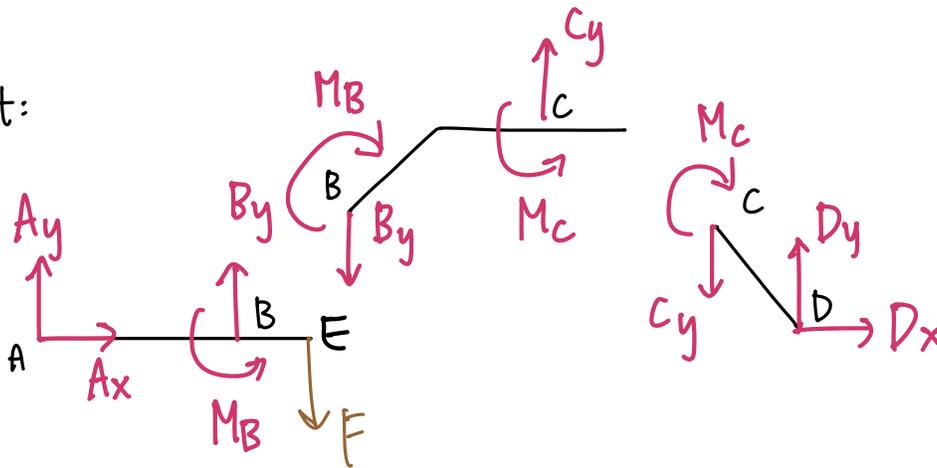
Beispielaufgabe 1: Serie 8, Aufgabe 1:

1. ¹⁾ Das abgebildete ebene System besteht aus drei starren, gewichtslosen Balken. In den Punkten A und D sind die jeweiligen Balken reibungsfrei gelenkig gelagert. In den Punkten B und C befindet sich je ein langes Querlager. Balken BC ist fest mit dem langen Querlager in B verbunden und Balken CD ist fest mit dem langen Querlager in C verbunden. Im Punkt E greift die eingezeichnete Kraft vom Betrag F an.



1. Berechnen Sie die Lagerreaktionen in den Punkten A , B , C und D . Schneiden Sie dazu die drei starren Körper einzeln frei und stellen Sie die notwendigen Gleichgewichtsbedingungen auf.
2. Ist das System statisch unbestimmt? Geben Sie eine Begründung an.
3. Ist das System kinematisch unbestimmt? Geben Sie eine Begründung an.

Freischnitt:



2) # GGW-Gleichungen: $3 \cdot 3 = 9 = n$

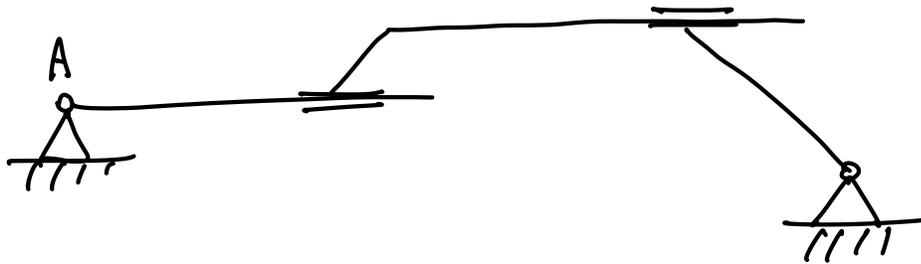
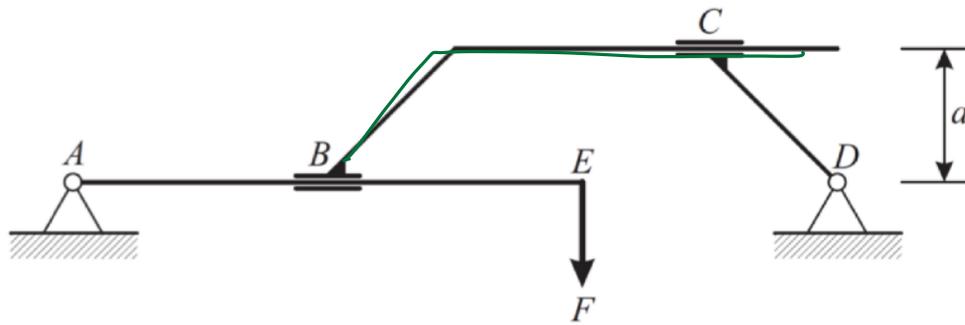
Bindungskräfte ($\hat{=}$ Unbekannte): $b = 8$

$$f = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$f < 0$$

\Rightarrow nicht statisch unbestimmt //

3) kann sich das System irgendwie bewegen?

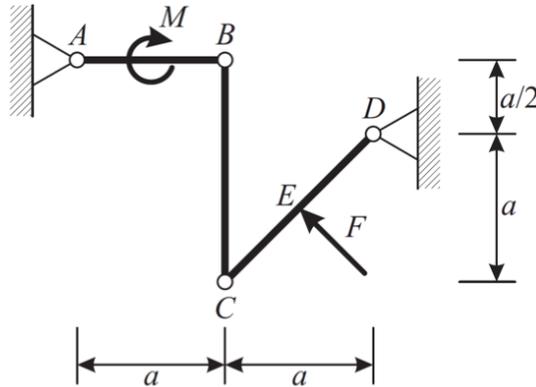


kinematisch unbestimmt //

Beispielaufgabe 2: Serie 8, Aufgabe 3

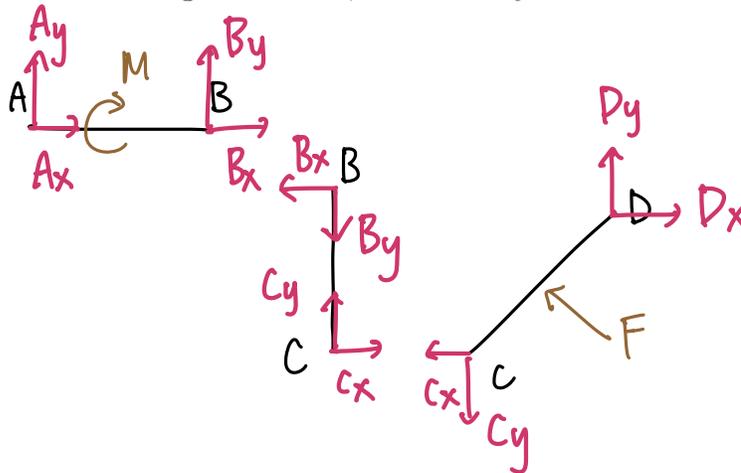
3. ³ Das skizzierte System besteht aus drei gewichtslosen Stäben AB , BC , CD . In A und D ist das System reibungslos gelenkig gelagert. In B und C sind die Stäbe reibungslos gelenkig miteinander verbunden. Am Stab AB greift ein Kräftepaar vom Betrag M an. Senkrecht in der Mitte E des Stabes CD greift eine Kraft vom Betrag F an. Der Betrag M des Kräftepaares sei gegeben und der Betrag F der Kraft sei unbekannt. Das System sei in Ruhe.

Annahmen: Ebenes System, Stäbe starr und gewichtslos, Lager reibungsfrei.



1. Ist das System statisch unbestimmt?
2. Ist das System kinematisch unbestimmt?
3. Bestimmen Sie die Lagerkräfte in D .
4. Bestimmen Sie den Betrag der Kraft F , sodass das System sich in Ruhe befindet.

Freischnitt:



1) # GGW-Bedingungen: $n = 3 \cdot 3 = 9$

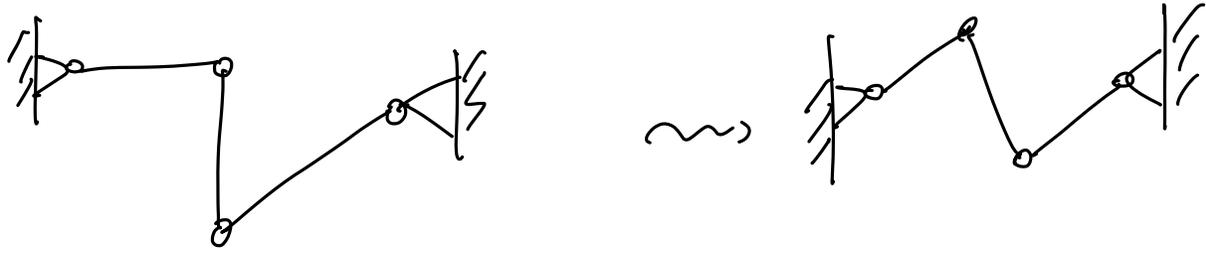
Unbekannte ($\hat{=}$ Bindungskräfte): $b = 8$

$\rightarrow f = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow$ Mechanismus

$f < 0$

\Rightarrow nicht statisch unbestimmt //

2) kann sich das System irgendwie bewegen?

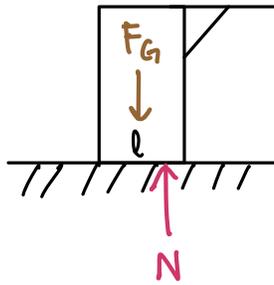


Ja, kinematisch unbestimmt //

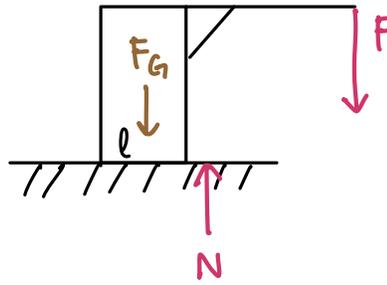
2. (nicht) Kippen:

Um zu prüfen, in welchem Fall ein Körper kippt, muss die Normalkraft mit der Ebene, auf die der Körper steht, eingeführt werden.

Damit der Körper nicht kippt, muss die Kraft innerhalb der Kontaktfläche / Standfläche angreifen:

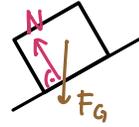
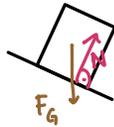
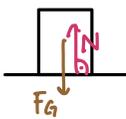


kippt nicht



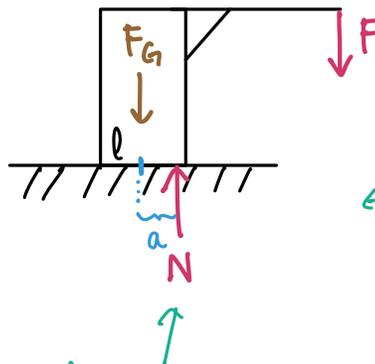
kippt!

Bem: Die Normalkraft N muss man immer senkrecht zur Auflagefläche einführen!



Doch wie können wir das (nicht) kippen berechnen?

Wir führen eine Abstandsvariable für N ein:



← Wir wissen effektiv (noch) nicht, wo genau N angreift!

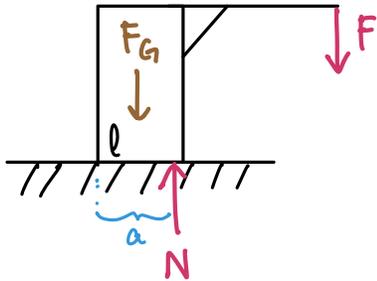
Dieses N wird auch auf eine bestimmte Weise eingeführt (wenn nicht schon gegeben)
→ werden wir im Bsp. sehen!)

Und wir stellen eine Bedingung für diese Abstandsvariable auf:

nicht kippen: $|a| \leq \frac{l}{2}$ wenn a wie oben eingeführt wurde*

* Wir dürfen die Variable beliebig einführen, doch dann muss man die Gleichung für (nicht) kippen entsprechend anpassen.

z.B. wenn wir es so einführen:



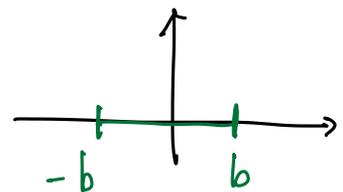
Dann ist die Bedingung für nicht kippen: $a \in [0, l]$

→ passt es an je nach dem wie ihr die Variable eingeführt habt!

Zusatz: nützliche mathematische Eigenschaften für den Betrag:
(wirst du evtl. brauchen bei nicht-kippen-Aufgaben)

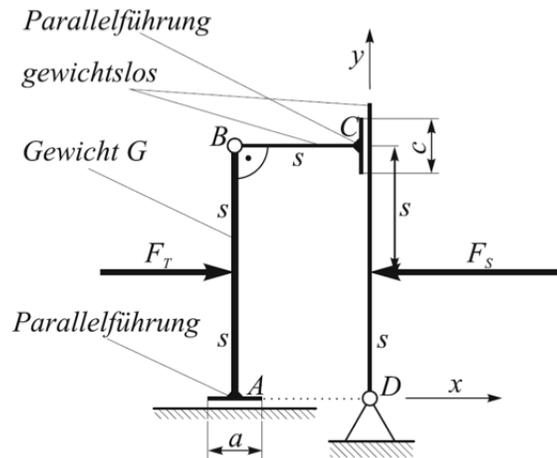
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ (und $|a^n| = |a|^n$)
- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ (und $\left| \frac{1}{a^n} \right| = \frac{1}{|a|^n}$)
- $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
- $|a| \leq c \cdot |b| \Leftrightarrow a \in [-1, 1] \cdot c \cdot b$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$



Beispielaufgabe: Serie 8, Aufgabe 4:

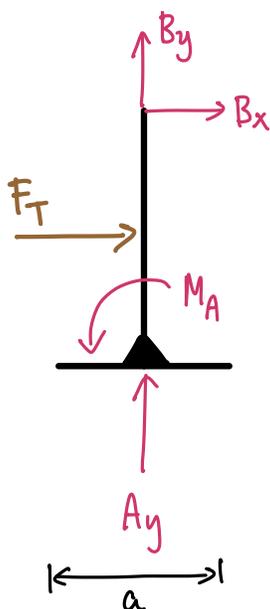
4. ⁴ Betrachten Sie das abgebildete System, das aus einem vertikal aufgestellten Balken AB (Länge $2s$) besteht, welcher im Punkt A über eine Parallelführung mit dem Boden verbunden ist. Im Punkt B wird der Balken BC reibungsfrei gelenkig mit AB verbunden. Die Konstruktion stützt sich im Punkt C auch über eine Parallelführung gegen den Balken CD ab. CD ist im Punkt D gelenkig gelagert. Alle Winkel der Konstruktion betragen 90° . Die Kräfte F_T bzw. F_S zeigen in bzw. parallel zur x -Richtung. Am Balken AB greift zusätzlich die Gewichtskraft in negative y -Richtung mit Betrag G an. BC und CD werden gewichtslos modelliert.



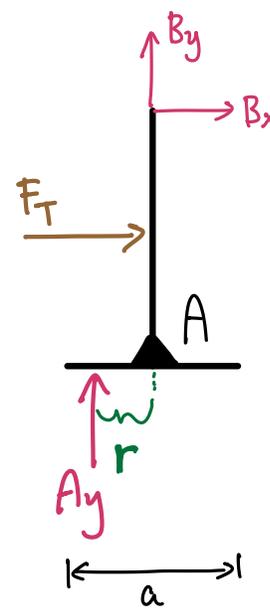
1. Ist das System statisch unbestimmt? Ist das System kinematisch unbestimmt?
2. Berechnen Sie die Lagerreaktionen in den Punkten A , B , C und D .
3. Wie muss das Verhältnis zwischen F_S und F_T gewählt werden, damit das System in Ruhe bleibt?
4. Wie gross sind die Längen a und c zu wählen, damit die Parallelführungen nicht kippen?

4) aus den vorherigen Teilaufgaben wissen wir:

$$M_A = -sF_T \quad , \quad A_y = G \quad , \quad M_C = 0$$



A_y und M_A durch
eine statisch
äquivalente Kraft
ersetzen
↳ Abstandvariable
einführen!



Das Moment im Punkt A ist nun: $M_A = -r \cdot A_y = -r \cdot G = -S F_T$

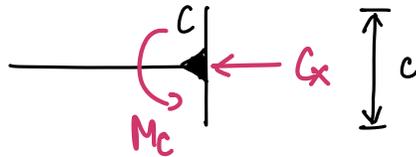
$$\Rightarrow r = \frac{S F_T}{G}$$

Bedingung für nicht kippen: $|r| \leq \frac{a}{2}$

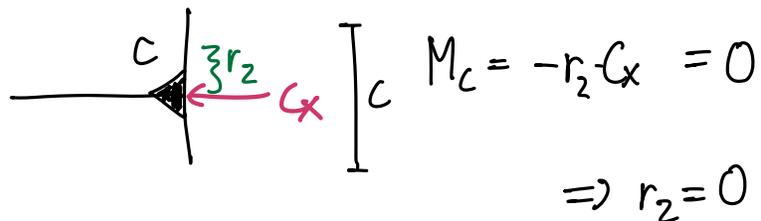
(A_y muss innerhalb vom Lager  angreifen, sonst kippt es!)

$$\Rightarrow |r| = \left| \frac{S F_T}{G} \right| \leq \frac{a}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad a \geq 2 \cdot \left| \frac{S F_T}{G} \right| = \underline{\underline{\frac{2 S F_T}{G}}}$$

Lager bei C :



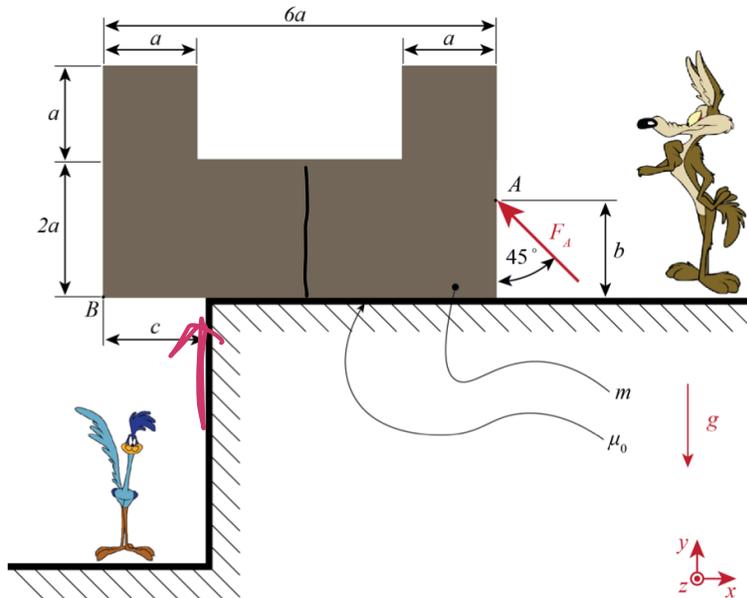
$$M_C = 0 \Rightarrow$$



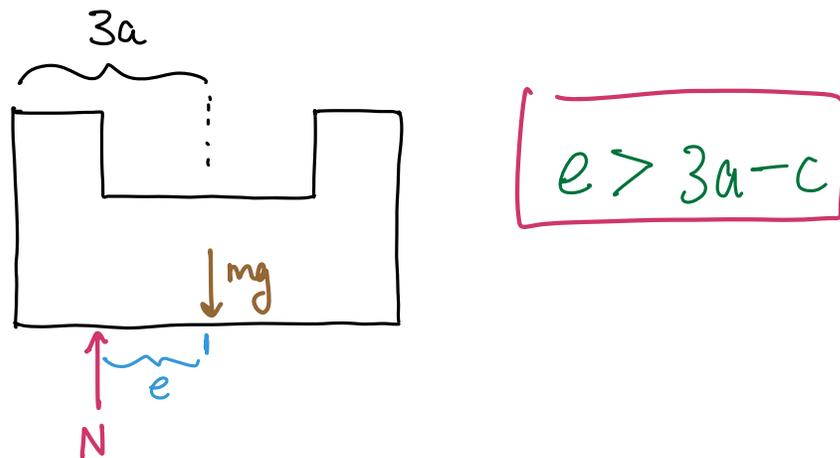
c darf beliebig klein sein. //

Beispielaufgabe 2: Zwischenklausur 3 HS20, Aufgabe 1:

Coyote versucht, ein Sofa auf den Roadrunner zu schieben. Das Sofa hat eine homogene Masse m , während seine Abmasse in Abbildung 1 durch eine Konstante a angegeben ist. Im Punkt A , der b vom Boden entfernt ist, wirkt $F_A = F$ in einem Winkel von 45° auf das Sofa. Die Erdbeschleunigung g ist in $-y$ Richtung gerichtet. Zwischen dem Sofa und dem Boden wird der Reibungskoeffizient als μ_0 definiert.



- (c) Bestimmen Sie c , so dass der Körper kippt. Antworten Sie mit den bekannten Größen (m, g, a, F, b, μ_0). [3 Punkte]



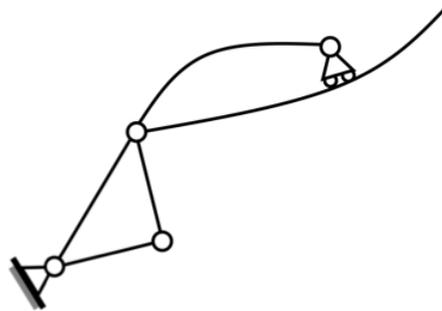
aus vorherigen Berechnungen wissen wir, dass,

$$\begin{cases} N = mg - \frac{\sqrt{2}}{2} F & \text{und} \\ Ne = \frac{\sqrt{2}}{2} F \cdot (3a + b) \end{cases}$$

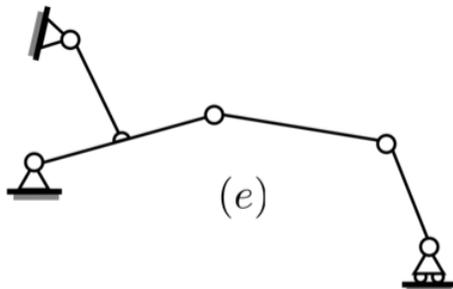
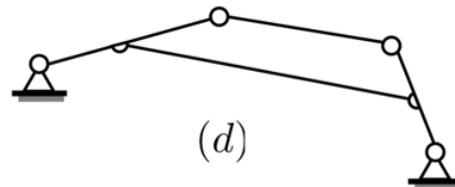
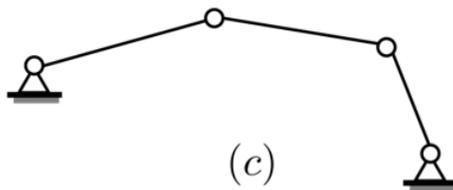
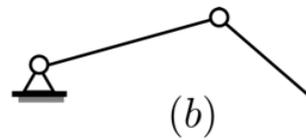
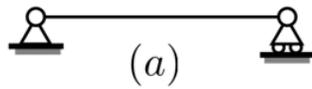
Bedingung für Kippen:

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 8

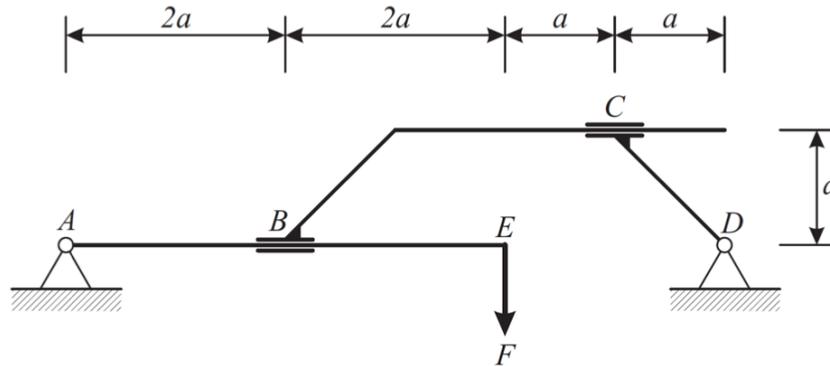
6. Betrachten Sie das hier unten abgebildete System, das aus starren miteinander gelenkig verbundenen Stäben besteht.



Welches der folgenden Systeme hat denselben Freiheitsgrad wie das obige?



1. ¹ Das abgebildete ebene System besteht aus drei starren, gewichtslosen Balken. In den Punkten A und D sind die jeweiligen Balken reibungsfrei gelenkig gelagert. In den Punkten B und C befindet sich je ein langes Querlager. Balken BC ist fest mit dem langen Querlager in B verbunden und Balken CD ist fest mit dem langen Querlager in C verbunden. Im Punkt E greift die eingezeichnete Kraft vom Betrag F an.



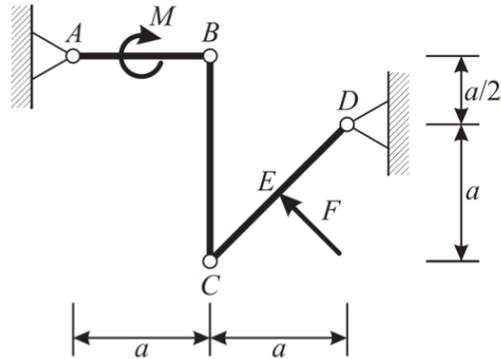
1. Berechnen Sie die Lagerreaktionen in den Punkten A , B , C und D . Schneiden Sie dazu die drei starren Körper einzeln frei und stellen Sie die notwendigen Gleichgewichtsbedingungen auf.

schon gemacht:)

2. Ist das System statisch unbestimmt? Geben Sie eine Begründung an.
3. Ist das System kinematisch unbestimmt? Geben Sie eine Begründung an.

3. ³ Das skizzierte System besteht aus drei gewichtslosen Stäben AB , BC , CD . In A und D ist das System reibungslos gelenkig gelagert. In B und C sind die Stäbe reibungslos gelenkig miteinander verbunden. Am Stab AB greift ein Kräftepaar vom Betrag M an. Senkrecht in der Mitte E des Stabes CD greift eine Kraft vom Betrag F an. Der Betrag M des Kräftepaares sei gegeben und der Betrag F der Kraft sei unbekannt. Das System sei in Ruhe.

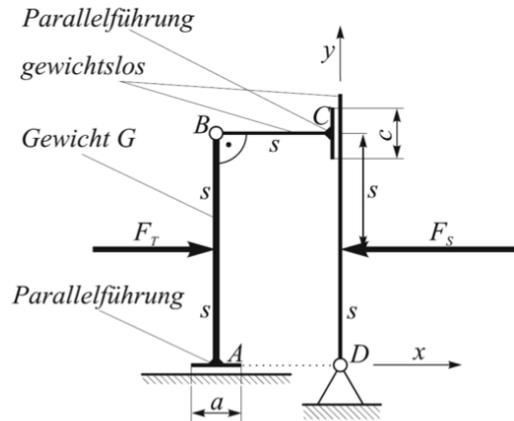
Annahmen: Ebenes System, Stäbe starr und gewichtslos, Lager reibungsfrei.



Schon gemacht :) }

1. Ist das System statisch unbestimmt?
2. Ist das System kinematisch unbestimmt?
3. Bestimmen Sie die Lagerkräfte in D .
4. Bestimmen Sie den Betrag der Kraft F , sodass das System sich in Ruhe befindet.

4. ⁴ Betrachten Sie das abgebildete System, das aus einem vertikal aufgestellten Balken AB (Länge $2s$) besteht, welcher im Punkt A über eine Parallelführung mit dem Boden verbunden ist. Im Punkt B wird der Balken BC reibungsfrei gelenkig mit AB verbunden. Die Konstruktion stützt sich im Punkt C auch über eine Parallelführung gegen den Balken CD ab. CD ist im Punkt D gelenkig gelagert. Alle Winkel der Konstruktion betragen 90° . Die Kräfte F_T bzw. F_S zeigen in bzw. parallel zur x -Richtung. Am Balken AB greift zusätzlich die Gewichtskraft in negative y -Richtung mit Betrag G an. BC und CD werden gewichtslos modelliert.

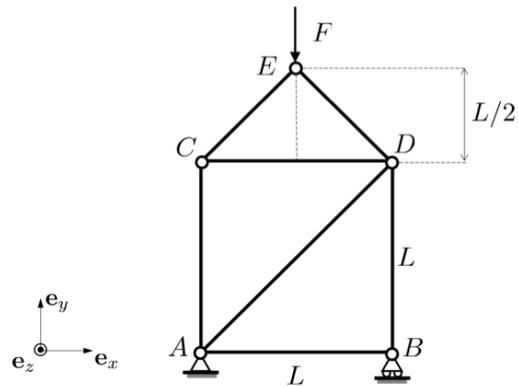


1. Ist das System statisch unbestimmt? Ist das System kinematisch unbestimmt?
2. Berechnen Sie die Lagerreaktionen in den Punkten A , B , C und D .
3. Wie muss das Verhältnis zwischen F_S und F_T gewählt werden, damit das System in Ruhe bleibt?
4. Wie gross sind die Längen a und c zu wählen, damit die Parallelführungen nicht kippen?

schon gemacht, aber versucht es nochmal selber!

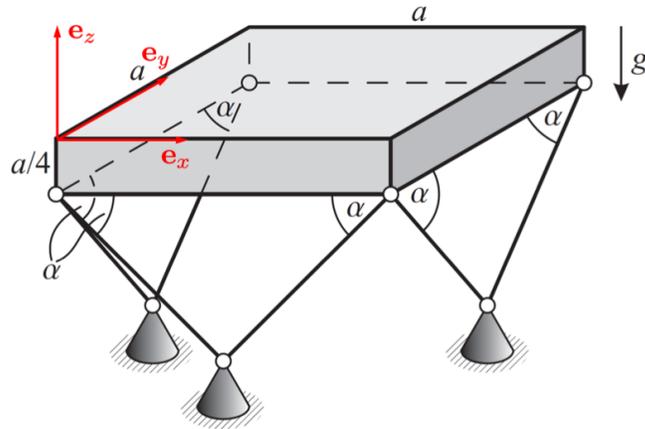
5. Das ebene Fachwerk in der Skizze besteht aus 7 reibungsfrei gelenkig miteinander verbundenen Stäben mit den Längen wie in der Skizze gegeben. Im Punkt A ist es gelenkig gelagert, im Punkt B horizontal verschiebbar gelagert, sodass es nicht abheben kann. Im Punkt E greift eine Kraft vom Betrag F wie eingezeichnet an. Was ist die Stabkraft im Stab CD in Abhängigkeit der Kraft F ?

recap PdvL



- (a) $S_{CD} = \frac{F}{2}$
 (b) $S_{CD} = F$
 (c) $S_{CD} = \sqrt{2}F$
 (d) $S_{CD} = \frac{F}{\sqrt{2}}$
 (e) $S_{CD} = \frac{F}{4}$

2. ² Gegeben ist ein homogener Quader (Kantenlängen $a/4, a, a$) mit dem Gewicht F_G . Der Quader steht auf sechs gewichtslosen Stäben, die durch reibungsfreie Gelenke mit dem Quader und dem Untergrund verbunden sind. Jeweils zwei Stäbe liegen in einer Ebene mit einer Quaderseite. Die Stäbe bilden mit den Quaderkanten einen Winkel von $\alpha = 45^\circ$.



macht
diese

1. Ist der Quader statisch unbestimmt gelagert? Begründen Sie die Antwort.
2. Ist der Quader kinematisch unbestimmt gelagert? Begründen Sie die Antwort.
3. Bestimmen Sie die Stabkräfte.

Mitö vom HS20 löst es ganz anders als Mitö von dieses Jahr.
Schaut nach falls es euch interessiert.