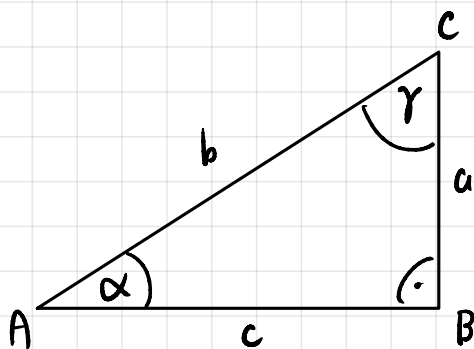


Vor der Übung 1: Basiswissen

Trigonometrie: Das musst du wissen:

Definition über rechtwinkliges Dreieck:



in diesem Bsp.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{c}$$

Merksprüche:

s	c	t
$\frac{G}{H}$	$\frac{A}{H}$	$\frac{G}{A}$

wenn man es den orangen Pfeil nach liest: GAGHHA ("Gaga")

englische Version: "SohCahToa"

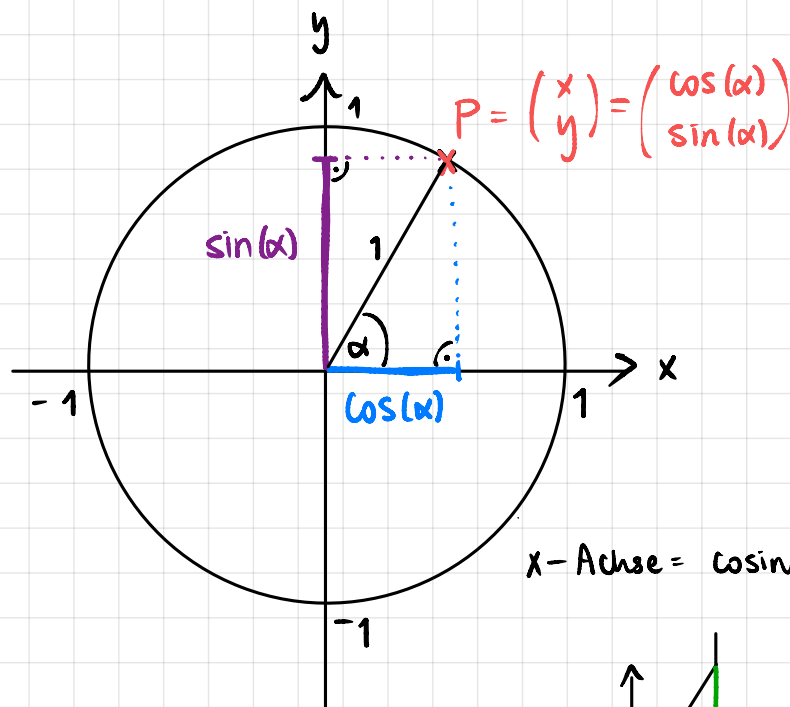
o: opposite (Gegenkathete)

a: adjacent (Ankathete)

h: hypotenuse

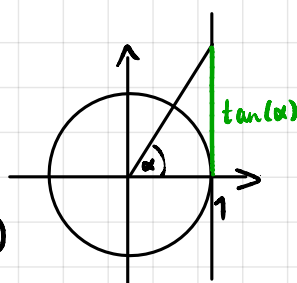
Good to know: $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ sind Funktionen. Ihre Umkehrfunktionen sind $\arcsin(a)$, $\arccos(a)$, $\arctan(a)$ ($\arcsin, \arccos$ nur definiert auf $a \in [-1, 1]$)

Der Einheitskreis:



x-Achse = cosinus, y-Achse = sinus

Good to know: Tangens ist hier:
(wirst du in TechMech nie brauchen)



Good to know:

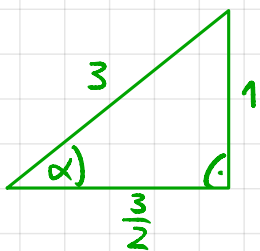
$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

← Pythagoras über Einheitskreis

Anwendungen, Bspe:

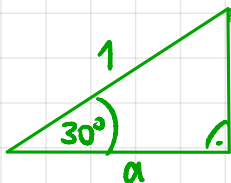
2

①



Was ist α ? $\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

②

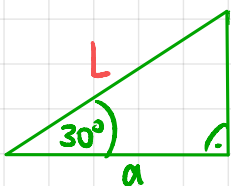


Was ist die Länge von a ? $a = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

↑
Warum $\cos$? $\rightarrow$ Stell dir den Einheitskreis vor!

gleiche Frage, aber leicht anders:

③

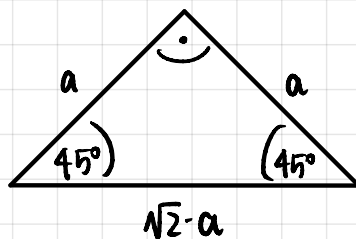


$$a = L \cdot \cos(30^\circ) = L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

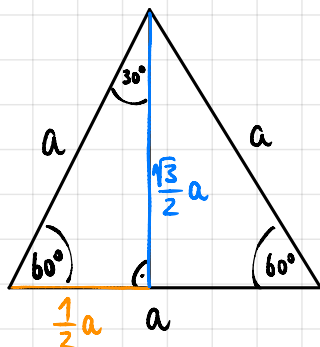
(Strahlensatz)

Wichtige Dreiecke (diese Dreiecke wirst du sehr oft sehen in TechMech!):

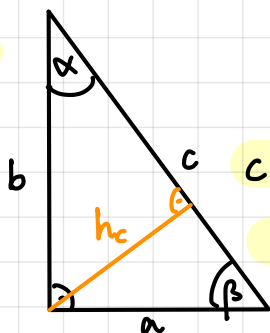
Gleichschenkelig & rechtwinkliges Dreieck:



Gleichseitiges Dreieck:



Rechtwinklig:



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$h_c = \frac{a \cdot b}{c}$$

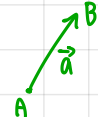
← Satz von Pythagoras

Vektoren

3

Basics: Was sind Vektoren überhaupt? Im Rahmen der Technischen Mechanik Vorlesung sind Vektoren einfach gesagt Pfeile. Ein Vektor hat immer eine **Länge** und eine **Richtung**. (z.B. $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_a$)

↑ Länge ↑ Richtung

Beispiel:  $\vec{a}$ ist ein Vektor vom Punkt A zu Punkt B.

Ein Vektor kann auf zwei Arten beschrieben werden:

① **2D:** $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ← x-Komponente
← y-Komponente

② $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$
↑ ↑
Einheitsvektoren (Basis)

3D: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ ← x-Komponente
← y-Komponente
← z-Komponente

↑

$\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$
↑

Vorteil dieser Schreibweise: übersichtlich

Vorteil dieser Schreibweise: Basis (hier $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) sofort klar

Good to know: Notation von Vektoren (die folgenden Schreibweisen sind äquivalent):

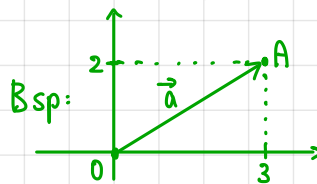
$\vec{a}$ Pfeil oben
 $\underline{a}$ Strich unten
 $\boldsymbol{a}$ fett

Ihr dürft die Schreibweise wählen die ihr möchtet, doch bleibt konsistent!
Ich werde in meinen Übungsmaterialien die Schreibweise mit dem Pfeil oben ($\vec{a}$) benutzen.

Länge und Richtung: Die Länge (aka. Betrag, (Zwei-)Norm) eines Vektors beschreibt, wie lang ein Vektor ist. Diese wird wie folgt bestimmt:

2D: $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

3D: $|\vec{b}| = b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$



$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

↳ das ist eigentlich nichts anderes als Pythagoras.

kleine Übungen: Bestimme die Länge der folgenden Vektoren:

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 3) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

4) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ 5) $\vec{e} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$a = |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$b = |\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$

$c = |\vec{c}| = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 2} = \sqrt{\frac{19}{9}} = \frac{\sqrt{19}}{3}$

$d = |\vec{d}| = \sqrt{1^2 + (-\frac{2}{3})^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

$e = |\vec{e}| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 1^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + 1 + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$

Die **Richtung** eines Vektors wird mit sogenannten **Einheitsvektoren** angegeben. Die Eigenschaft der Einheitsvektoren ist, dass sie immer die **Länge 1** haben.

z.B. ist $\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor, da $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

Good to know: Einheitsvektoren schreibt man in der Regel so: $\vec{e}_j$

(wobei j der Index ist $\rightarrow$ d.h. an der Stelle von j kommen Zahlen / Buchstaben)

Nun wissen wir, wie Vektoren beschrieben werden: $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_a$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Länge Richtungen

Da ein Vektor einzig durch ihre Länge & Richtung definiert ist, ist es "egal", wo im Raum sie sich befindet. d.h.



diese 2 Vektoren sind genau dieselben Vektoren.

Good to know: dies ist die analytische Schreibweise von Vektoren. In TechMech sind die Einheitsvektoren i.d.R. die Basisvektoren ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ oder $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$). Deswegen musst du dich oft nicht wirklich um diese kümmern. Vor allem wenn du dein Ergebnis in diese Form: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ angibst, sind die Einheitsvektoren (in diesem Fall $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$) sozusagen schon mit inbegriffen.

Bsp: geben Sie Länge und Richtung der folgenden Vektoren an:

1) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Länge: $|\vec{p}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$

Richtung: $\vec{e}_p = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}}$

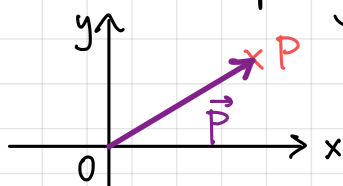
$\uparrow$
durch die Länge teilen

2) $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Länge: $|\vec{q}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38}$

Richtung: $\vec{e}_q = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{38}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}}$

Ortsvektor: verbindet einen Punkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems. Dieser ist eindeutig definiert.



$\vec{P}$ ist der Ortsvektor vom Punkt P.

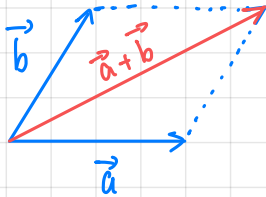
Rechnen mit Vektoren: Jetzt wo wir gelernt haben, was Vektoren sind, können wir anfangen mit diesen zu rechnen:)

5

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ zwei Vektoren. Dann:

Addition: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$ Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

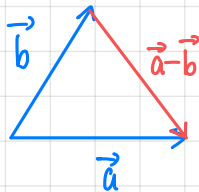
Visuell:



Subtraktion:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$
 Bsp: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

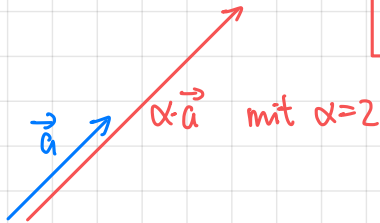
Visuell:



Multiplikation mit einem Skalar:

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_x \\ \alpha \cdot a_y \\ \alpha \cdot a_z \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Visuell:



Bsp: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

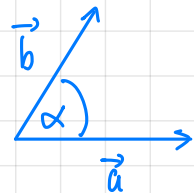
Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$
 Bsp: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 + 15 + 2 = 25$

Good to know:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

α : der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel.



Good to know: orthogonale Vektoren: 2 Vektoren, dessen Skalarprodukt 0 ergibt, sind orthogonal (= senkrecht) aufeinander.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

orthogonal zu

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zusatzfrage: Wann sind 2 Vektoren parallel zueinander? → lö letzte Seite:) 6

Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

← nur in 3D.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35-12 \\ 4-10 \\ 6-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wie kann ich mir die Formel für das Kreuzprodukt merken? → 2 Tricks:

① Der 3-Fisch-Trick:

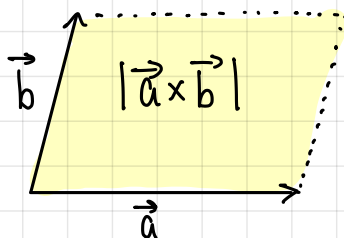
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - b_y \cdot a_z \\ a_z \cdot b_x - b_z \cdot a_x \\ a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y \end{pmatrix}$$

↑ die ersten 2 noch mal unten aufschreiben

② die platzsparende Methode:

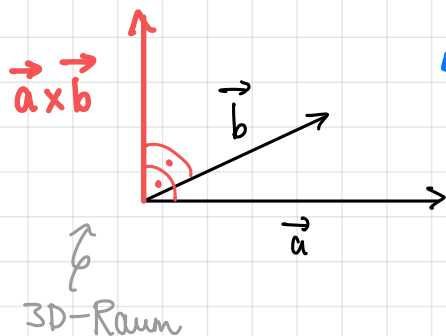
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - b_y \cdot a_z \\ a_z \cdot b_x - b_z \cdot a_x \\ a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Good to know: Geometrische Bedeutung des Kreuzprodukts:

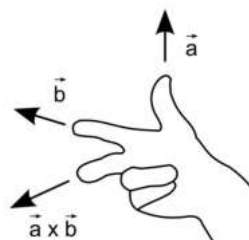


$|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist die Fläche des Parallelogramms, welcher von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossen wird.

Good to know: $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ sowie $\vec{b}$.



← hier gilt die Rechte-Hand-Regel:

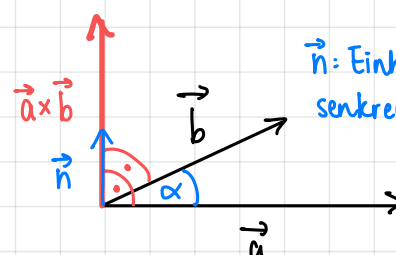


Good to know:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$

auch:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\alpha)) \vec{n}$$



$\vec{n}$: Einheitsvektor, welcher senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist

Rechnen mit Wurzeln:

7

Basics:

$$\bullet \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\bullet \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\bullet \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\bullet \sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = |a| \cdot \sqrt{b}$$

$$\bullet \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Brüche : $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$

Bsp: $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

↑
das ist dasselbe wie $\cdot 1$ (erweitern)

Ableiten, Basics:

• Sei $f(x) = x^n$. Dann ist $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Bsp: $f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5x^4$

• $\sin'(x) = \cos(x)$

• $\cos'(x) = -\sin(x)$

Spezielle Funktionen wie z.B. $\log(x)$ haben spezielle Ableitungen, diese sind in TechMech jedoch nicht wichtig $\rightarrow$ ihr werdet sie in Analysis zu genüge sehen :)

Ableiten, die wichtigsten Regeln:

Summenregel: $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

Bsp: $f(x) = 3x + 5x^2 \rightarrow f'(x) = 3 + 10x$

Faktorregel: $f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$

Bsp: $f(x) = 2x^2 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot 2x = 4x$

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Bsp: $f(x) = 3x^2 \cdot e^x \rightarrow f'(x) = 6x \cdot e^x + 3x^2 \cdot e^x$ ($(e^x)'$ ist e^x)

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Bsp: $f(x) = \frac{4x^2}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{8x \cdot x - 4x^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{8x^2 - 4x^2}{x^2}$

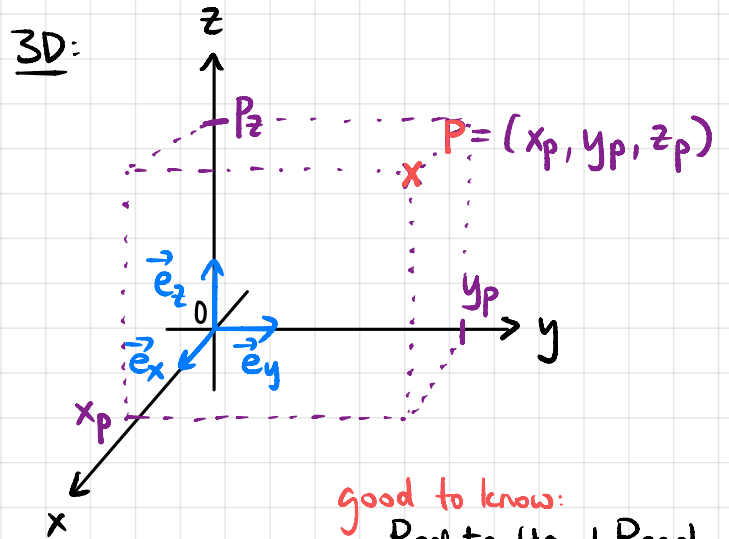
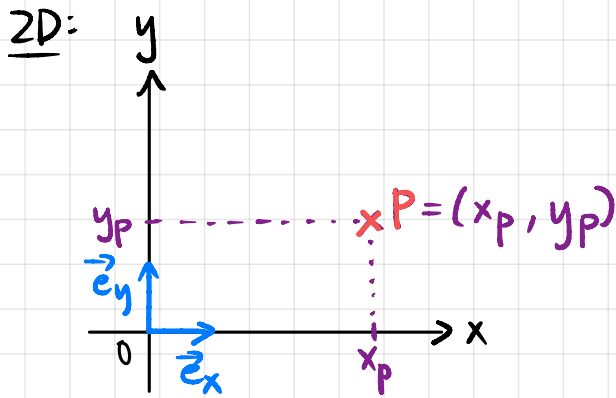
Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Bsp: $f(x) = \sin(x^3) \rightarrow f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$

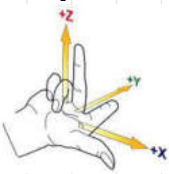
Koordinatensysteme:

8

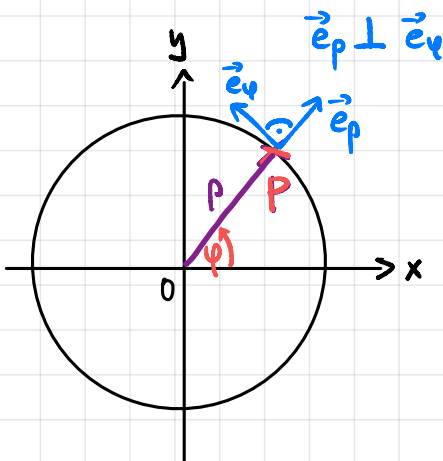
① kartesische Koordinaten:



good to know:
Rechte Hand Regel
beachten.



② Polarkoordinaten (nur 2D):



Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_\rho = \cos(\psi) \vec{e}_x + \sin(\psi) \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\psi = -\sin(\psi) \vec{e}_x + \cos(\psi) \vec{e}_y$$

Umrechnung:

Polar $\rightarrow$ kartesisch

$$x = \rho \cdot \cos(\psi)$$

$$y = \rho \cdot \sin(\psi)$$

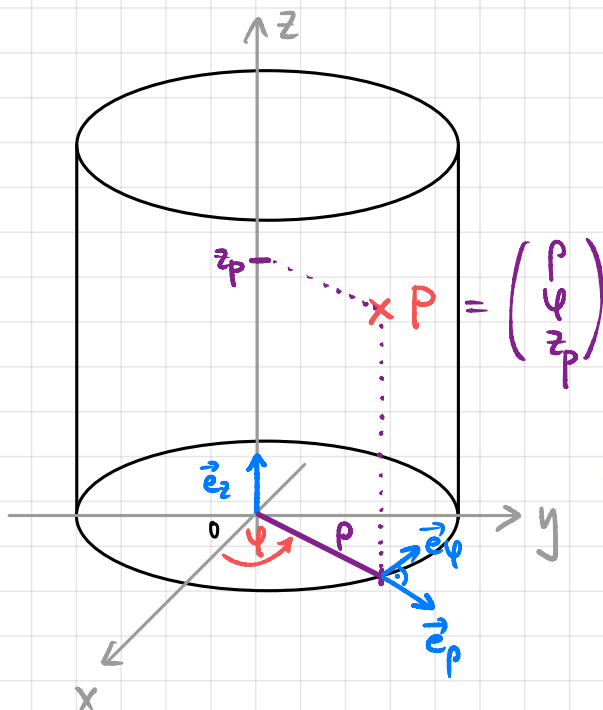
kartesisch $\rightarrow$ Polar

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ρ ("rho") beschreibt den Radius.

③ Zylinderkoordinaten:



Umrechnung:

$$\vec{e}_\rho = \cos(\psi) \vec{e}_x + \sin(\psi) \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\psi = -\sin(\psi) \vec{e}_x + \cos(\psi) \vec{e}_y$$

Zylinder $\rightarrow$ kartesisch

$$x = \rho \cdot \cos(\psi)$$

$$y = \rho \cdot \sin(\psi)$$

$$z = z$$

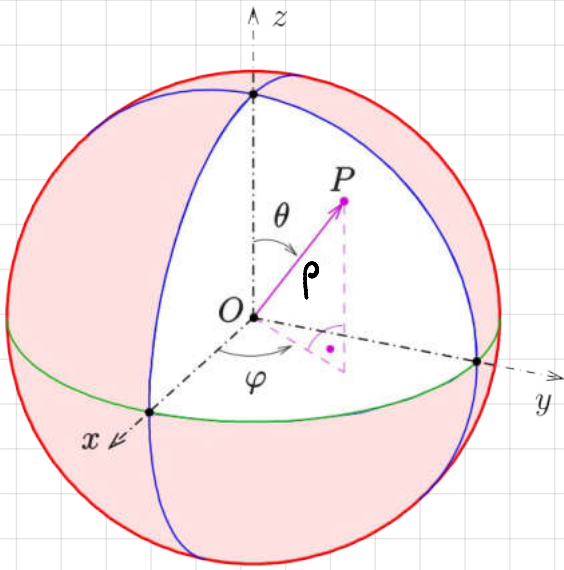
kartesisch $\rightarrow$ Zylinder

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

④ Kugelkoordinaten (nicht wichtig in TechMech aber z.B. in NuS schon :))



$$P = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Umrechnung:

Kugel $\rightarrow$ Kartesisch

$$x = \rho \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = \rho \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = \rho \cdot \cos(\theta)$$

Kartesisch $\rightarrow$ Kugel

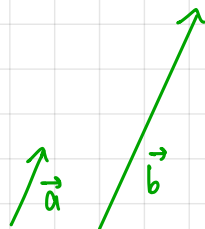
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

Lösung zur Frage auf Seite 6: Richtungsvektor gleich

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$



$$\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_b = \frac{1}{3\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{e}_a \quad \text{:)}$$

durch die Länge teilen

Themen von Heute:

- Kleine Vorstellungsrunde
- Organisatorisches: Informationen zur Übungsstunde
- Teil 1: Recap der Theorie
- Teil 2: Übungsaufgaben lösen

Kleine Vorstellungsrunde:

Über mich: Name: Lina De Windt

Erreichbar unter: ldewindt@ethz.ch

Studium: 3. Semester ITET

Teil 1: Recap der Theorie

Theorie von Heute:

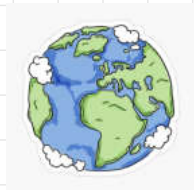
- ① materieller Punkt
 - ② Geschwindigkeit & Schnelligkeit
 - ③ Starre Körper
 - ④ Satz der projizierten Geschwindigkeit (SdpG)
 - ⑤ ebene Bewegungen
- } nächste Woche

① materieller Punkt:

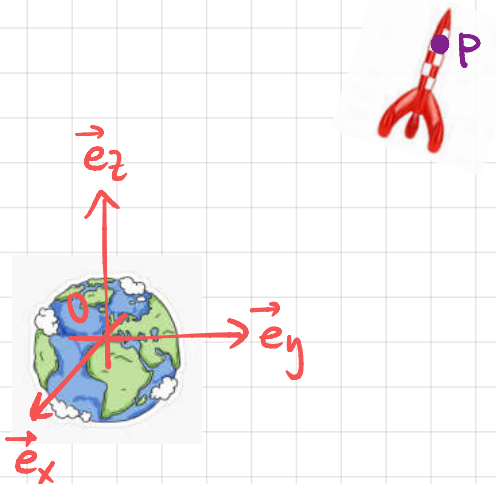
Ein materieller Punkt ist nichts anderes als ein Punkt eines Körpers.



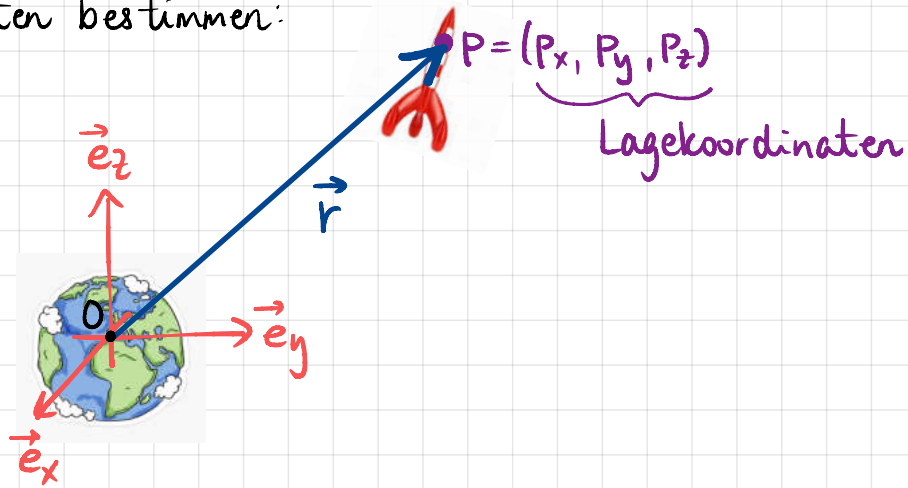
Doch mit nur einem Punkt im Raum können wir nichts anfangen. Deswegen führen wir Bezugskörper ein - z.B. wäre die Erde ein guter Bezugskörper für die Rakete:



Bezugskörper haben Bezugssysteme: das ist ein fancy-Wort für Koordinatensystem:



Wo wir jetzt ein Bezugssystem haben, können wir die Lage des Punktes durch die Lagekoordinaten bestimmen:

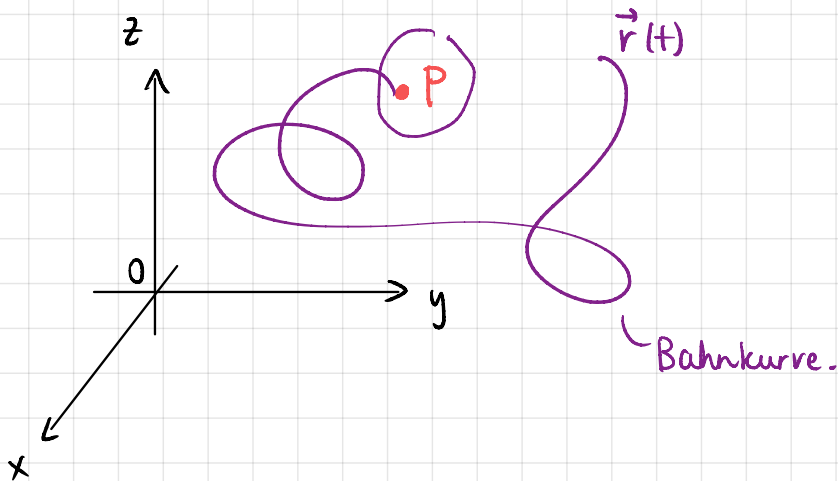


Ortsvektor: $\vec{r} = \vec{OP} = P_x \vec{e}_x + P_y \vec{e}_y + P_z \vec{e}_z$ oder $\vec{r} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$
verbindet den Ursprung (O) mit dem Punkt.

Ein System: ist eine Menge von Materiellen Punkten.

② Geschwindigkeit & Schnelligkeit:

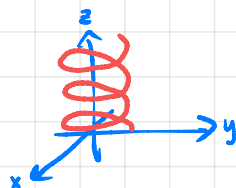
Ein Punkt im Raum, der sich bewegt, kann man durch eine Funktion beschreiben:



Eine solche Funktion könnte z.B. so aussehen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$

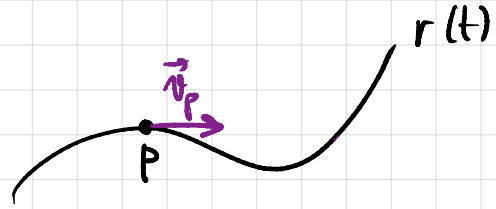
Quiz: Welche Bahnkurve beschreibt diese Funktion?

→ Spirale



Geschwindigkeit: Die Geschwindigkeit ist definiert als die zeitliche Ableitung des (zeitlich abhängigen) Ortsvektors.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$



Good to know: der Geschwindigkeitsvektor eines Punktes ist tangential zur Bahnkurve des Punktes.

Schnelligkeit:

3D:

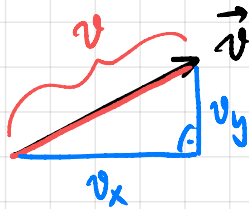
$$v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

2D:

$$v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Pythagoras

Geometrisch gesehen: die Schnelligkeit ist die Länge des Geschwindigkeitsvektors.



Das Ableiten ist in kartesischen Koordinaten recht straightforward, aber sobald wir andere Koordinaten nehmen, wird es ein bisschen komplizierter. Deswegen hier eine kleine Übersicht:

Tabelle Geschwindigkeit & Schnelligkeit in verschiedenen Koordinatensystemen.

Koordinaten	Bewegungsgleichung	Geschwindigkeitsgleichung	Schnelligkeit
Kartesische	$\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$	$\underline{v} = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y + \dot{z}\underline{e}_z$	$s = \underline{v} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$
Zylindrische	$\underline{r} = \rho\underline{e}_\rho + z\underline{e}_z$	$\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z$	$s = \underline{v} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$
Polar:	$\underline{r} = \rho\underline{e}_\rho$	$\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$	$s = \underline{v} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2}$

Beachte: Der Einheitsvektor $\underline{e}_\rho = \underline{e}_\rho(\varphi(t))$ ist abhängig von $\varphi(t)$, resp. $\psi(t)$ und $\theta(t)$. Dies muss beim Ableiten berücksichtigt werden.
Die zeitlichen Abhängigkeiten habe ich in der Tabelle weggelassen $x = x(t), y = y(t)...$

$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}$
-g für Serie usw.

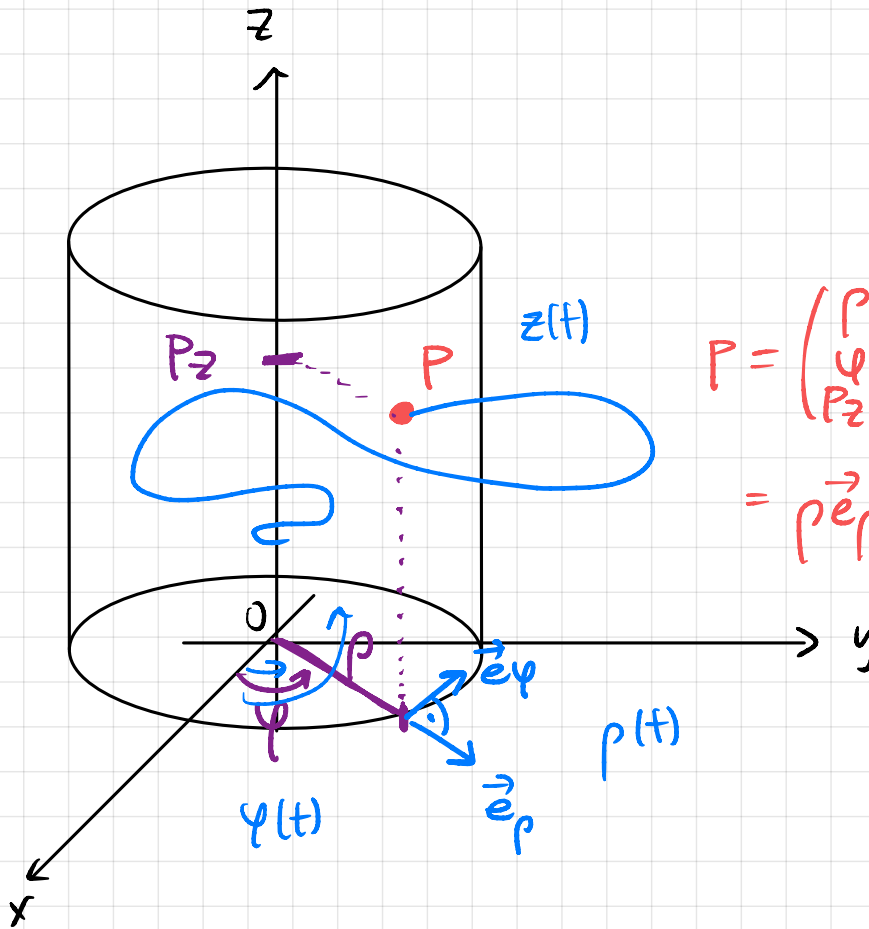
Exkurs: Koordinatensysteme

otation:

Formel)

ngslinie

Zylinder:



$$P = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ P_z \end{pmatrix}$$

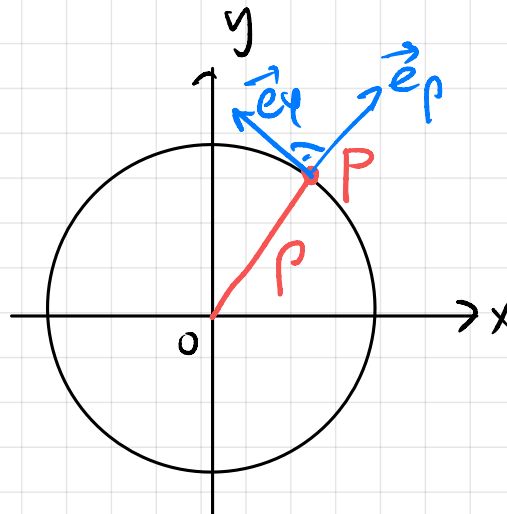
$$= \rho \vec{e}_\rho + \varphi \vec{e}_\varphi + z \vec{e}_z$$

∈ SK.

$P = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ P_z \end{pmatrix}$. Dabei
laut finden.

$\varphi = 0$) ist.
unter

Polar ("Zylinder ohne z"):



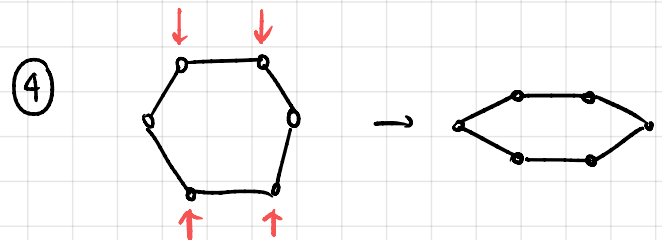
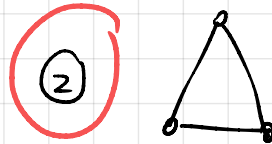
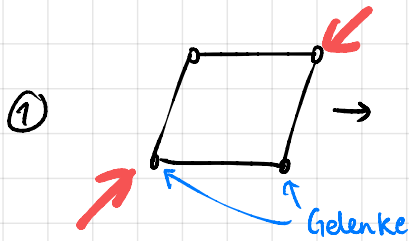
→ genauer siehe "Zusatzmaterialien 1"

③ Starre Körper

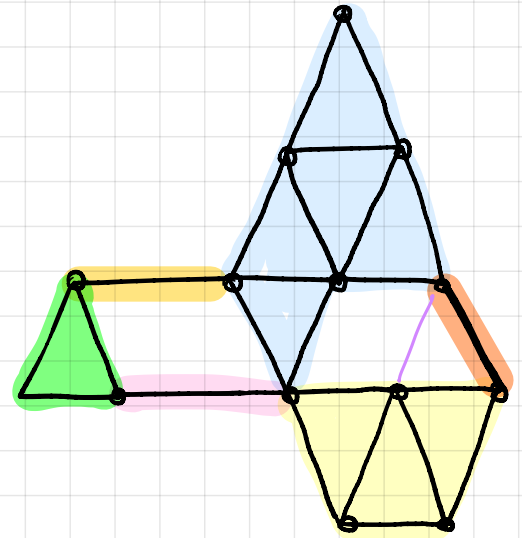
Starre Körper (SK) sind Körper, die sich nicht deformieren. z.B. ist ein Stab ein Starrkörper.



Quiz: Welche der folgenden Körper sind Starrkörper?



Bonus: Wie viele SK hat dieses System?



Lösung: 6

Warum? Siehe Farben

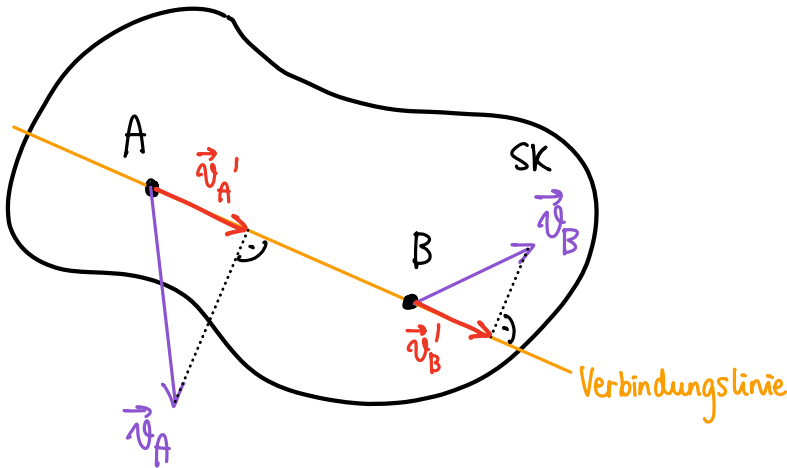
Theorie dieser Woche:

1. Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)
2. ebene Bewegungen: Translation & Rotation
 - 2.1 Satz vom Momentanzentrum (SvM)
3. Räumliche Bewegungen

1. Der Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG):

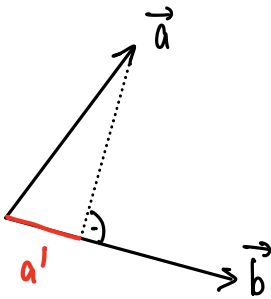
↑ gilt für alle Starrkörper.

Dieser Satz besagt, dass die **Projektionen** (mit einem Strich ' gekennzeichnet) der **Geschwindigkeiten** von 2 Punkten auf einem SK auf ihre Verbindungslinie **gleich** sind:



$$\vec{v}'_A = \vec{v}'_B$$

So weit so gut, aber wie beschreibt man Projektionen mathematisch?



Die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ ist: $a' = \vec{a} \cdot \vec{e}_b$

↑
Achtung das ist ein Skalar.
("Anteil von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ ")

Falls ihr den Vektor braucht: $\vec{a}' = a' \cdot \vec{e}_b = (\vec{a} \cdot \vec{e}_b) \cdot \vec{e}_b$

Mit diesem Kenntnissen können wir den SdpG umformen zu:

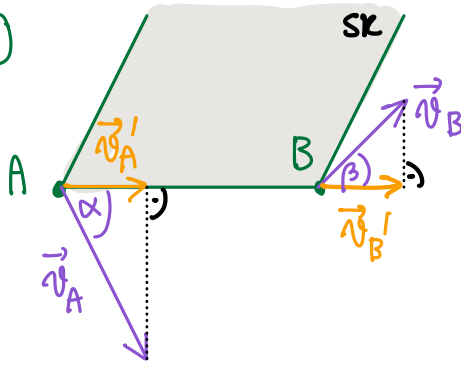
$$\vec{v}'_A = \vec{v}'_B \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_A \cdot \vec{r}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \vec{r}_{AB} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{r}_{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = 0$$

Je nach Aufgabe kann die eine oder die andere Gleichung nützlich sein.
Im Kern sind diese Gleichungen alle äquivalent!

Beispiele:

①



Quiz: Welche Aussagen sind korrekt?

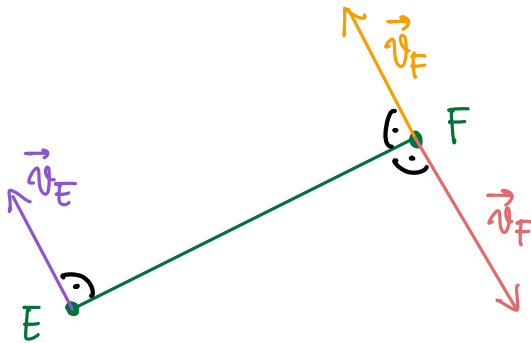
1) $\vec{v}_A \cdot \vec{e}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \vec{e}_{AB}$

2) $\vec{v}'_A = \vec{v}'_B$

3) $\vec{v}_A = \vec{v}_B$

4) $v_A \cos(\alpha) = v_B \cos(\beta)$

②



Quiz: Welches ist der korrekte Geschwindigkeitsvektor von F?

1) $\vec{v}_F$ (orange)

2) $\vec{v}_F$ (red)

3) Ohne weitere Informationen können wir das nicht wissen.

2. Ebene Bewegungen

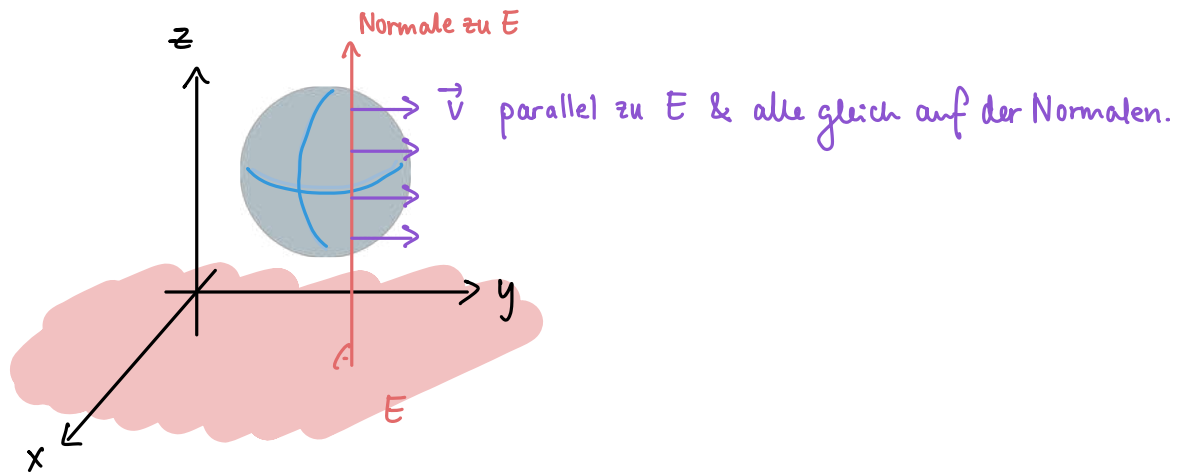
Ebene Bewegungen sind einfach gesagt Bewegungen, die in Ebenen (2D) stattfinden.

Eine ebene Bewegung bezüglich der xy -Ebene erfüllt folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} v_z = 0 & \text{keine Geschwindigkeit in } z\text{-Richtung} \Rightarrow \text{alle } \vec{v} \text{ sind parallel zur } xy\text{-Ebene} \\ v_x = v_x(x,y) \text{ und } v_y = v_y(x,y) & \text{Die Geschwindigkeiten hängen nur von der } x\text{- und } y\text{-Koordinate ab.} \end{cases}$$

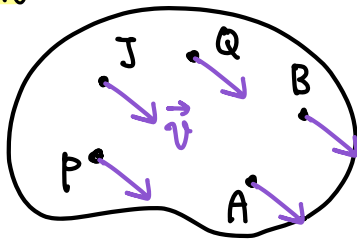
D.h. alle Punkte auf einer Normalen zu E haben die gleiche Geschwindigkeit.

z.B. das wäre eine ebene Bewegung auf der xy -Ebene:



Eine ebene Bewegung ist momentan entweder eine Translation oder eine Rotation:

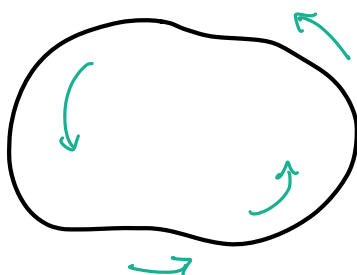
Translation:



$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q \quad \forall P, Q \in SK$$

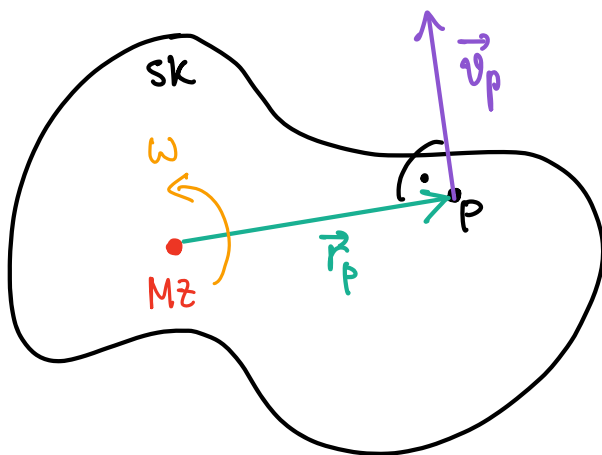
alle Punkte auf dem SK haben die gleiche Geschwindigkeit.

Rotation:



$\rightarrow$ SVM

2.1 Der Satz vom Momentanzentrum (SvM):



$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$

Achtung diese 2
nicht vertauschen!

Setup: M/Mz : Momentanzentrum

$\vec{\omega}$: Rotationsgeschwindigkeit (ist ein Vektor)

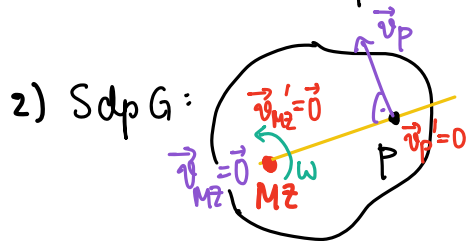
ω : Rotationsschnelligkeit (ist ein Skalar) $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ (wichtig für Serie)

$\vec{r}_P$: Vektor vom Mz zum Punkt

Wichtig: $\vec{v}_P$ ist immer senkrecht zu $\vec{r}_P$ (Verbindungsgerade vom Mz zum Pkt.)

Warum? $\rightarrow$ 3 Argumente:

1) Intuition: Bsp. Bostitch



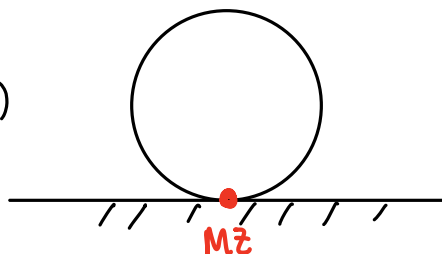
Das Mz hat $\vec{v}_{Mz} = \vec{0}$. $\Rightarrow \vec{v}'_{Mz}$ ist auch $\vec{0}$ auf alle möglichen Verbindungslinien. D.h. $\vec{v}'_P \stackrel{!}{=} \vec{0} \forall P \in SK$.
 $\Rightarrow$ das ist nur möglich wenn $\vec{v}_P \perp \vec{v}_{Mz}$ (oder $\vec{v}_P = \vec{0}$)

3) Kreuzprodukt: $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$ impliziert sofort, dass $\vec{v}_P \perp \vec{r}_P$ und $\vec{v}_P \perp \vec{\omega}$

Aber... Was ist ein **Momentanzentrum**?

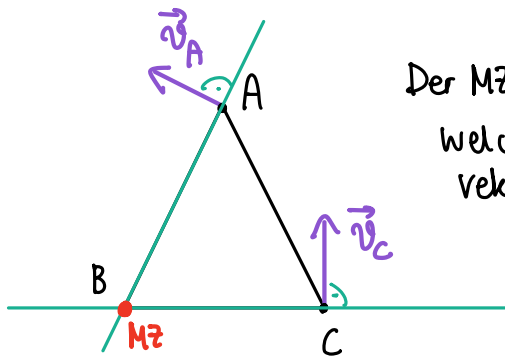
$\hookrightarrow$ Ein Momentanzentrum ist ein Punkt, der momentan **in Ruhe** (d.h. $\vec{v} = \vec{0}$) ist.

Beispiel Rad:
(gleitet nicht)



So weit so gut, aber wie bestimmt man Momentanzentren?

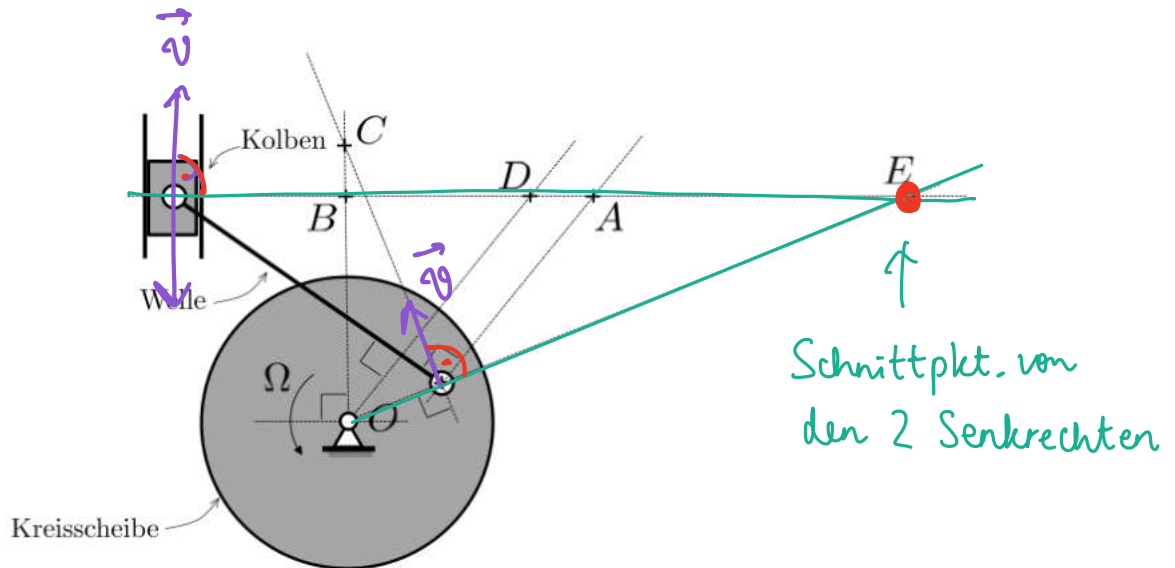
↳ Wir nutzen den Fakt aus, dass $\vec{v}_p \perp \vec{r}_{MP}$! → Konstruktion:)



Der MZ liegt auf dem Schnittpunkt der Geraden, welche senkrecht auf den Geschwindigkeitsvektoren stehen.

Bsp: Serie 2 Aufgabe 7:

7. Betrachten Sie den in der Abbildung dargestellten Kurbelwellenmechanismus. Die Kreisscheibe dreht sich um den Fixpunkt O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω . Die Welle verbindet den Kolben mit der Scheibe über zwei Drehgelenke an ihren Spitzen. Der Kolben kann sich nur in vertikaler Richtung bewegen, wie in der Abbildung gezeigt. Alle Teile des Systems können als starr angenommen werden. Welcher Punkt ist das Momentanzentrum der Welle?



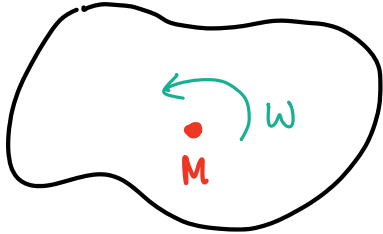
- (a) A
- (b) B
- (c) C
- (d) D
- (e) E

Good to know: $\vec{\omega}$ und ω :

$\vec{\omega}$ ist der Rotationsvektor. Aber warte mal ... Was heisst überhaupt Rotationsvektor?

$\Rightarrow$ Dieser ist folgendermassen definiert:

Sagen wir wir haben einen SK, der um M dreht:

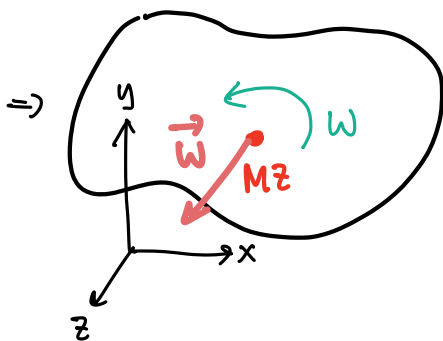


Dann zeichnen wir auch immer direkt ω ein.

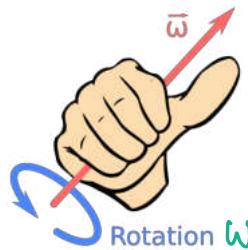
ω ist der Betrag von $\vec{\omega}$, sprich

$$\omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Doch wo ist $\vec{\omega}$?

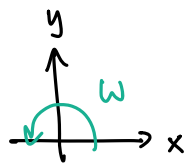


$\vec{\omega}$ ist nach der rechten-Hand-Regel mit ω verknüpft. In diesem Bsp. ist $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

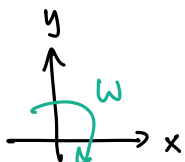


$\vec{\omega}$ zeichnen wir in 2D-Aufgaben schlicht nicht ein, weil dieser irrelevant ist (wenn $\vec{\omega}$ nur 1 Komponente hat brauchen wir nur ω für unsere Berechnungen) & weil es nicht einfach ist ihn einzuzichnen (kommt aus dem Blatt raus / geht in das Blatt hinein)

Merkt euch einfach:

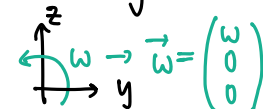


$$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

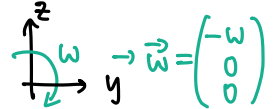


$$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}$$

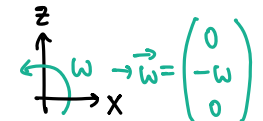
Falls sie gemein sind:



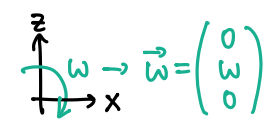
$$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

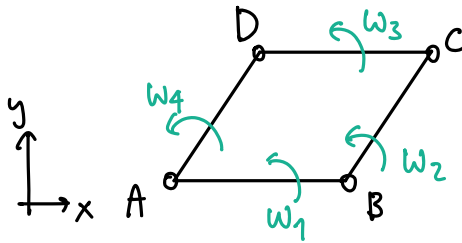


$$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

usw.

Good to know:

Die Parallelogrammregel:



$$\boxed{w_1 = w_3} \quad \text{und} \quad \boxed{w_2 = w_4}$$

(für Betrag & Richtung.)

Good to know:

SvM in 2D:

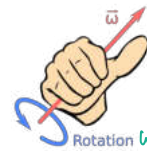
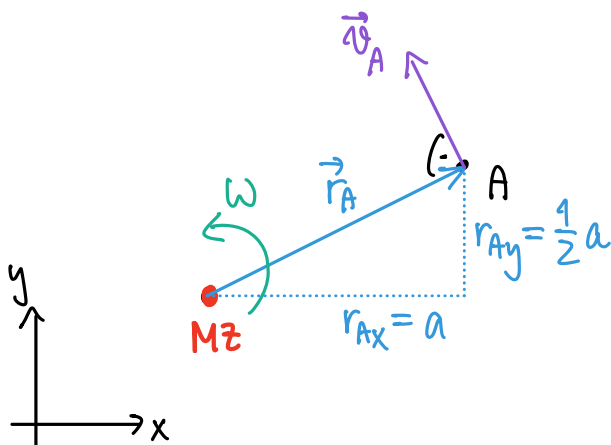
$$\vec{v}_P = \begin{pmatrix} \pm r_{Py} \omega \\ \pm r_{Px} \omega \end{pmatrix}$$

↑ Vorzeichen bestimmen mittels rechte-Hand-Regel.

Beispiel:

Vorgehen:

1. Geschwindigkeitsvektor einzeichnen
→ Rechte-Hand-Regel!



$$\Rightarrow \vec{v}_A = \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} \quad \text{Vorzeichen bestimmt :)}$$

2. $r_{Ax} \cdot \omega$ in y- und $r_{Ay} \cdot \omega$ in x-Komponente von $\vec{v}_A$ einsetzen

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}_A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} a \omega \\ a \omega \end{pmatrix}}}$$

Herleitung: über Kreuzprodukt:

nur z-Komponente →

$$\vec{v} \text{ in 2D: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_{Ax} \\ r_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_{Ay} \omega \\ r_{Ax} \omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑ keine z-Komponente

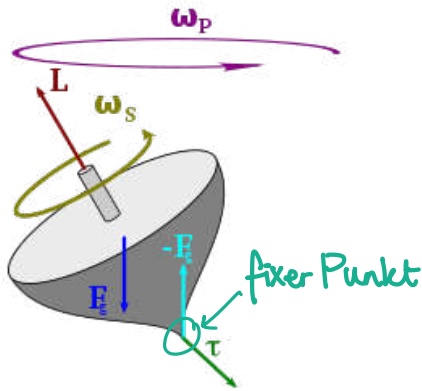
ist genau diese Formel

Theorie dieser Woche: letztes Thema in Kinematik:

- 1. Räumliche Bewegungen:
 - 1.1 Kreiselung
 - 1.2 Starrkörperformel
 - 1.3 Die Kinematik (& deren Invarianten)

1. Räumliche Bewegungen:

Kreiselung: Ist nichts anderes als eine Rotation, aber $\vec{\omega}$ "rotiert" auch. Dabei bleibt nur ein Punkt des SK fixiert.



Eine Kreiselung ist momentan eine Rotation! dh. $\vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{r}_p$ (svM) gilt immernoch.

1.1 Die Starrkörperformel (SK-Formel, a.k.a. ABBA-Formel):

ist die allgemeine Formel für eine SK-Bewegung:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$$

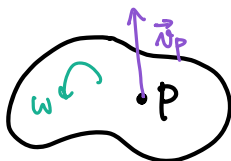
Translationskomponente Rotationskomponente

Translation: $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B \quad \forall \text{ Punkte } \in \text{SK}$

reine Rotation (um den Pkt. B): $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} \quad \leftarrow \text{svM!}$

1.2 Die Kinematik: beschreibt die Bewegung eines SK komplett! *

Sie ist immer bezogen auf einem ausgewählten Punkt eines SK.



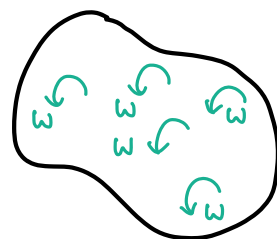
Kinematik von Punkt $P = \{ \vec{v}_p, \vec{\omega} \}$

1.3 Invarianten der Kinematik:

"ändern sich nicht" → d.h. für alle Punkte auf einem SK gleich.

1) $I_1 = \vec{\omega}$ (Rotationsgeschwindigkeit)

2) $I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_p$ $\forall$ Punkte $\in$ Starrkörper



egal wo ihr euch auf dem SK befindet, ω ist gleich!

Übersicht der Invarianten der Kinematik & entsprechender Bewegungszustand:

	$I_2 = 0$	$I_2 \neq 0$
$I_1 = 0$	Translation / Stillstand	—
$I_1 \neq 0$	Rotation	Schraubung

Zusatz: nützliche Rechenregeln für die Serie:

Good to know: die Grassmann-Identität für das Kreuzprodukt:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

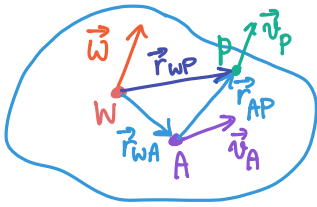
evtl. werdet ihr das in der Serie benutzen

Good to know: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ Why? $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$

Erinnerung: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Für Interessierte:

* Warum beschreibt die Kinematik die Bewegung eines SKs komplett?



Wenn wir $\vec{\omega}$ und die Geschwindigkeit eines Punktes auf dem SK kennen, können wir daraus die Geschwindigkeiten aller Pkte auf dem SK bestimmen!

Bsp: Seien $\vec{\omega}$ und $\vec{v}_A$ bekannt. Dann: $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{WA}$

Was ist $\vec{v}_P$ für P beliebig, $P \in SK$? $\rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{WP}$

nun ist $\vec{r}_{WP} = \vec{r}_{WA} + \vec{r}_{AP} \rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{WA} + \vec{r}_{AP}) = \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{WA}}_{\vec{v}_A} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

und das ist nichts anderes als die SK-Formel! 😊

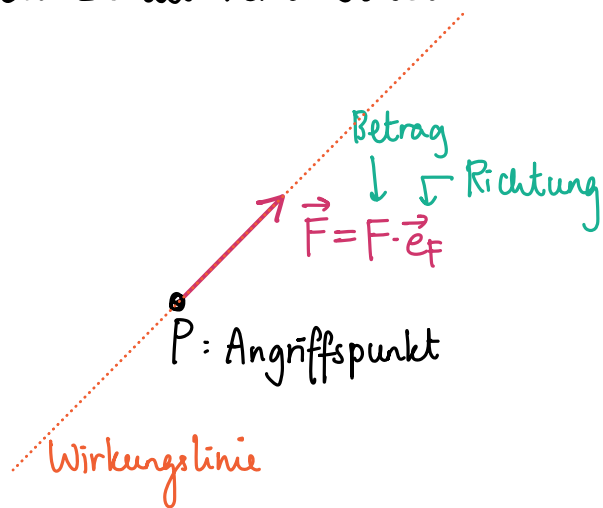
Theorie dieser Woche:

1. Kraft
2. Moment
3. Leistung

1. Kraft: Kräfte machen sich durch ihre Wirkung auf Objekte bemerkbar.

Sie hat immer einen Betrag, eine Richtung und einen Angriffspunkt.

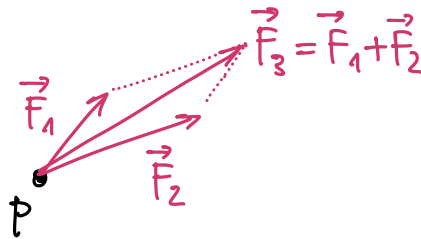
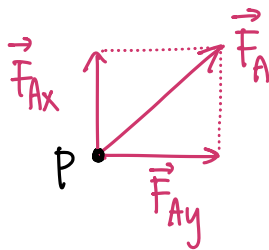
Man stellt sie als Vektoren dar:



Bem: $[F] = N = \frac{m \cdot kg}{s^2}$

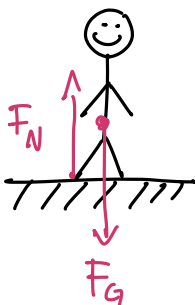
Kräfte dürfen vektoriell addiert werden, wenn sie denselben Angriffspkt. haben:

z.B.

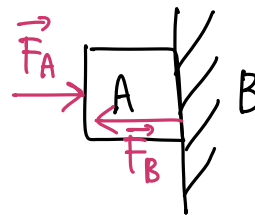


Reaktionsprinzip: ← sehr wichtig

Kräfte wirken immer wechselseitig. Übt A eine Kraft F_A auf B aus, so übt B eine gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Kraft auf A aus:



$$\vec{F}_G = -\vec{F}_N, \quad |\vec{F}_N| = |\vec{F}_G|$$



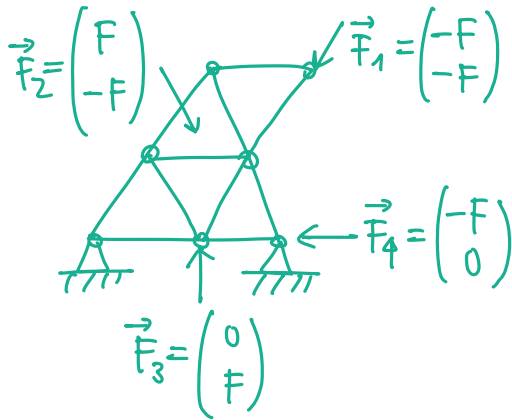
$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B, \quad |\vec{F}_A| = |\vec{F}_B|$$

Die Resultierende eines Systems:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$$

Ist die Summe aller Kräfte, die auf das System wirken.

Bsp:



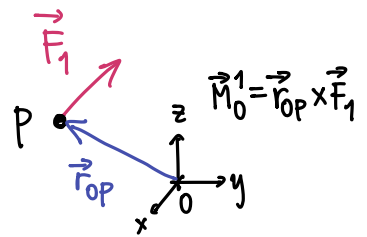
$$\begin{aligned} \vec{R} &= \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \\ &= \begin{pmatrix} -F \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -F \\ -F \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

2. Das Moment: Beschreibt die Drehwirkung einer Kraft auf einen Körper. Sie ist ein Vektor & ist vom Bezugspunkt abhängig.

Moment von $\vec{F}_i$ bezüglich Punkt O:

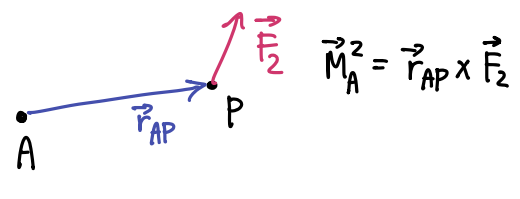
$$\vec{M}_0^i = \vec{r}_{OP} \times \vec{F}_i$$

Index der betrachteten Kraft
Angriffspunkt der Kraft
Bezugspunkt



Moment von $\vec{F}_i$ bezüglich Punkt A:

$$\vec{M}_A^i = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}_i$$



das resultierende Moment: Ist die Summe aller Momente auf einem Körper. Diese ist auch bezogen auf einem Punkt des Körpers!

wird leider oft nicht geschrieben

$$\vec{M}_0^{\text{tot}} = \sum_i \vec{M}_0^i$$

$$\vec{M}_A^{\text{tot}} = \sum_i \vec{M}_A^i$$

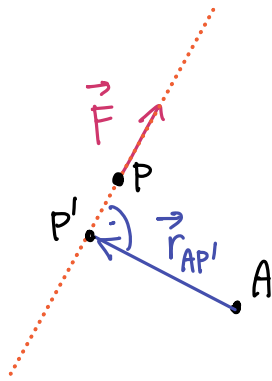
anderer Bezugspunkt

Die Transformationsregel: Wenn das resultierende Moment bez. eines Punktes & die Resultierende bekannt ist, kann das resultierende Moment bez. ein anderer Pkt. folgendermassen bestimmt werden:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{r}_{AO} \times \vec{R} \quad (\text{analog zur SK-Formel in Kinematik})$$

Good to know: Wenn $\vec{R} = 0$, ist das Moment unabhängig vom Bezugspunkt.
Warum? $\rightarrow$ Traforegel: $\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \underbrace{\vec{r}_{PQ} \times \vec{R}}_{=0} = \vec{M}_Q \Leftrightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_Q \quad \forall P, Q$

Good to know: Wenn $\vec{r} \perp$ Wirkungslinie von $\vec{F}$, kann der Betrag des Moments folgendermassen berechnet werden:



$$M_A = r_{AP'} F \quad \vec{r}_{AP'} \perp \text{Wirkungslinie von } \vec{F}$$

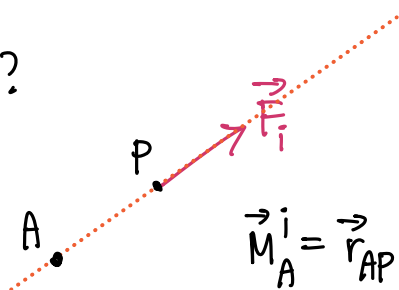
Tipp: Wenn ihr das Moment einzeichnen müsst: die rechte-Hand-Regel benutzen: (analog zu $\vec{\omega}, \omega$)

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \end{pmatrix}$$

Good to know: Wenn die Wirkungslinie einer Kraft durch einen Punkt geht, dann ist das Moment dieser Kraft bez. diesen Punkt 0.

Warum?



Kreuzprodukt von 2 parallelen Vektoren ist 0

$$\vec{M}_A^i = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}_i = \vec{0}$$

ausserdem: Wenn man physikalisch überlegt kann man auch sehen, dass eine solche Kraft keine Drehwirkung auf diesen Punkt hat.

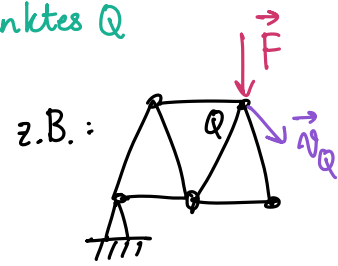
3. Leistung:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_Q$$

Geschwindigkeit des Angriffspunktes Q

angreifende Kraft

ist ein Skalar (d.h. $\in \mathbb{R}$) & kein Vektor!



Die Gesamtleistung:

$$P_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_i \vec{M}_i \cdot \vec{\omega}_i$$

Summe der Leistungen der einzelnen Pkte

"reine-Rotation-Komponenten"

Good to know: Bei einer reinen Rotation gilt $P = \vec{M}_0 \cdot \vec{\omega}$

Good to know:

Wenn alle Kräfte & Momente nur an einem SK angreifen:

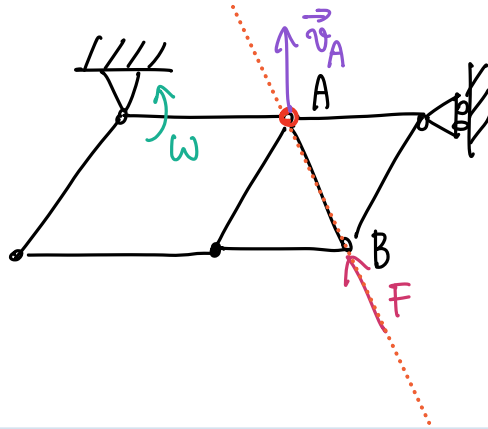
$$P_{\text{tot}} = \vec{R} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A^{\text{tot}} \cdot \vec{\omega}$$

hier gleicher Punkt!

↳ nützlich wenn die Kinematik $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ & das Moment $\vec{M}_B$ bez. eines Pktes bekannt ist.

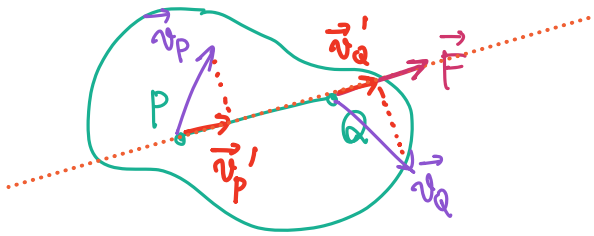
Wichtig: Für die Bestimmung von Momenten & Leistungen darf man die Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschieben. Wählt deswegen einen Punkt aus, bei der die Geschwindigkeit einfach zu bestimmen ist.

Bsp:



$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_B = \vec{F} \cdot \vec{v}_A$$

↳ Warum? → Wegen SdpG!



$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_P = \vec{F} \cdot \vec{v}_Q \text{ weil } \vec{v}_P' = \vec{v}_Q'$$

Theorie dieser Woche:

1. Äquivalenz & Reduktion von Kräftegruppen

1.1 Charakterisierung von Kräftegruppen

1.2 Die Dynamik & ihre Invarianten

1.3 statische Äquivalenz

1.4 Charakterisierung einer Kräftegruppe mittels der Invarianten der Dynamik

2. Der Freiheitsgrad

Quiz 2: Beim Berechnen von Momenten und Leistungen darf man die Kräfte entlang ihrer verschieben.

a) Rotationsachse **(b) Wirkungslinie** c) Senkrechte d) zu müde für TechMech

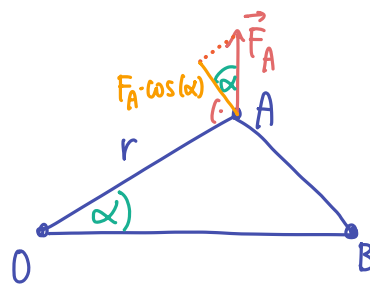
Quiz 1: Wie bestimmt man das Moment einer Kraft $\vec{F}_A$ bezüglich Punkt O?

(a) $\vec{M}_O^A = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_A$

b) $M_O^A = r \cdot F_A \rightarrow$ nur wenn $\vec{r} \perp \vec{F}$

(c) $M_O^A = r \cdot F_A \cdot \cos(\alpha)$

(d) $\vec{M}_O^A = \vec{M}_B^A + \vec{r}_{OB} \times \vec{F}$



Good to know: Momente berechnen in 2D:

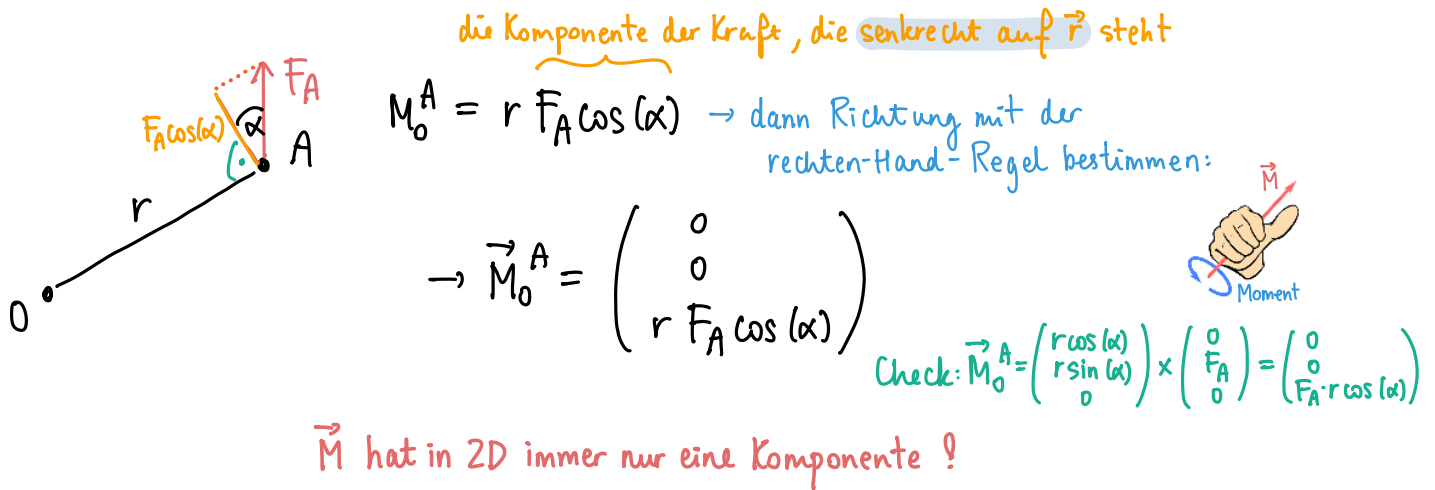
die Komponente der Kraft, die senkrecht auf $\vec{r}$ steht

$M_0^A = r F_A \cos(\alpha) \rightarrow$ dann Richtung mit der rechten-Hand-Regel bestimmen:

$\rightarrow \vec{M}_0^A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r F_A \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Check: $\vec{M}_0^A = \begin{pmatrix} r \cos(\alpha) \\ r \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_A \cdot r \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

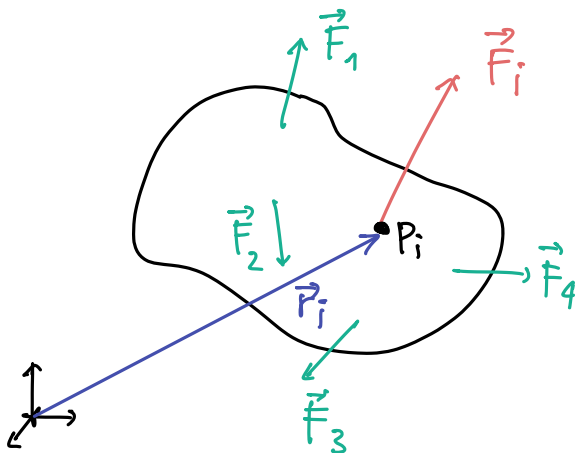
$\vec{M}$ hat in 2D immer nur eine Komponente !



1. Äquivalenz & Reduktion von Kräftegruppen

Als erstes müssen wir einige Begriffe kennenlernen:

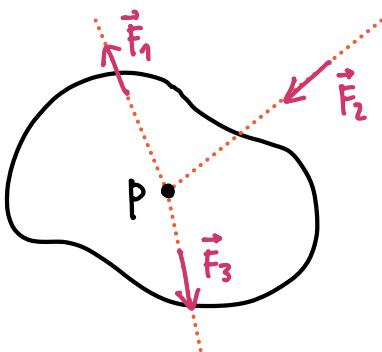
Kräftegruppe: Ist eine Sammlung von Kräften, die an einem Körper angreifen.



$$\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\}$$

P_i ist dabei der Angriffspunkt der Kräftegruppe
 $\vec{r}_i$ ist der Ortsvektor zu P_i .

Zentrale Kräftegruppe: Wenn die Wirkungslinien aller Kräfte einer Kräftegruppe durch einen Punkt gehen



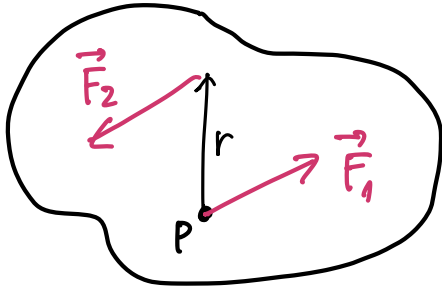
$$\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$$

Dann ist $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \neq 0$ und

$$\vec{M}_P = \vec{0}$$

das Moment bezüglich P (Pkt. wo alle Wirkungslinien durchgehen)

Kräftepaar: besteht aus 2 entgegengesetzt gerichtete Kräfte gleichen Betrags.



$$\vec{R} = 0$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad *1$$

↑ Abstand zw. den 2 Angriffspunkten

das Moment ist in diesem Fall unabhängig vom Bezugspunkt! *2

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |F|; \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$$

*1 Warum? Nehmen wir an, wir berechnen das Moment bezüglich 0. Dann:

$$\vec{M}_0^{\text{tot}} = \vec{M}_0^{\vec{F}_1} + \vec{M}_0^{\vec{F}_2} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times (-\vec{F}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{r} \times \vec{F}$$

↑
 $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$

↑
 $\vec{F}_1 = \vec{F}$

*2 Warum? → Transformationsregel: $\vec{M}_P = \vec{M}_Q^{\text{tot}} + \vec{r}_{PQ} \times \vec{R} = \vec{M}_Q \Rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_Q \quad \forall P, Q \in SK$

$$\vec{R} = 0$$

↑
 $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$
(Abstand zw. den 2 Angriffspkt.)

Nullsystem / System im Gleichgewicht: Eine Kräftegruppe ist ein Nullsystem, bzw. das System (d.h. Körper und Kräftegruppe) ist im Gleichgewicht, wenn

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_0^{\text{tot}} = \vec{0} \end{cases}$$

Symbolisch: $\{\vec{F}_i\} \Leftrightarrow 0$

2. Die Dynamik einer Kräftegruppe ist definiert als:

$$\{\vec{R}, \vec{M}_P\}$$

(analog zur Kinematik in Kinematik)

↑
beliebiger Pkt.

Eine Kräftegruppe kann immer auf ihre **Dynamik reduziert** werden.

Analog zur Kinematik **beschreibt die Dynamik eine Kräftegruppe komplett** & besitzt

2 Invarianten:

1. Invariante:

$$\vec{I}_1 = \vec{R}$$

Erinnerung: Invariante = überall gleich auf SK.

2. Invariante:

$$I_2 = \vec{M}_P \cdot \vec{R}$$

Nun stellt sich die Frage, wann 2 Kräftegruppen an einem SK **dieselbe Wirkung** haben.

Dann heißen diese Kräftegruppen (statisch) **äquivalent**.

3. Statische Äquivalenz:

Definitionsgemäss sind 2 Kräftegruppen statisch äquivalent, wenn ihre Gesamtleistungen gleich sind: $P(\{\vec{F}_i\}) = P(\{\vec{G}_j\}) \quad \forall \text{SK-Bewegungen}$

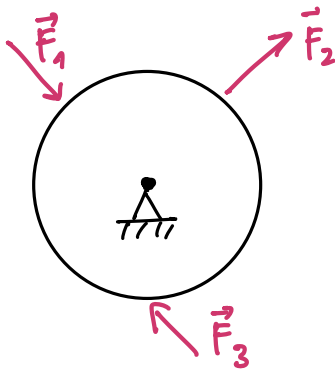
Doch was folgt daraus?

Erinnerung: $P = \text{Gesamtleistung} = \vec{R} \cdot \vec{v}_B + \vec{M}_B \cdot \vec{\omega}$ ← Achtung das gilt nur bei SK (wir schauen uns jetzt nur SK an)
 $\vec{M}_B = \text{Gesamtmoment bezüglich } B = \sum_i \vec{M}_B^i = \sum_i \vec{r}_{Bi} \times \vec{F}_i$
 $\vec{R} = \text{Resultierende} = \sum_i \vec{F}_i$
 $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\} = \text{Kinematik}$

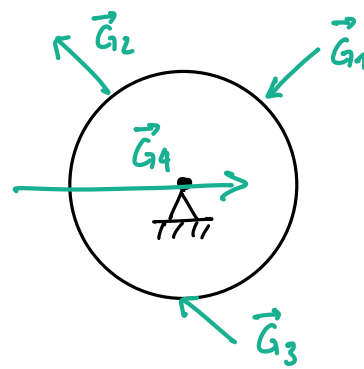
aus $P = \vec{R} \cdot \vec{v}_B + \vec{M}_B \cdot \vec{\omega}$ erhalten wir, dass 2 Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\}$ & $\{\vec{G}_j\}$ statisch äquivalent sind, wenn $\vec{R}_{\{\vec{F}_i\}} = \vec{R}_{\{\vec{G}_j\}}$ und $\vec{M}_P\{\vec{F}_i\} = \vec{M}_P\{\vec{G}_j\}$
D.h. in Kürze:

⚠ Wenn 2 Kräftegruppen in einem beliebigen Punkt die gleiche Dynamik $\{\vec{R}, \vec{M}_P\}$ haben, sind sie statisch äquivalent.

Bsp:



$$\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$$



$$\{\vec{G}_i\} = \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3, \vec{G}_4\}$$

$\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_i\}$ sind verschiedene Kräftegruppen, die auf denselben SK wirken.

Falls $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{R}_2 = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \vec{G}_4$ und

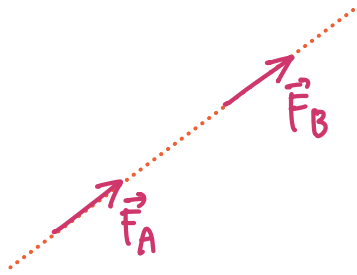
$\vec{M}_P\{\vec{F}_i\} = \vec{M}_P\{\vec{G}_i\}$, dann sind $\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_i\}$ statisch äquivalent.

Statische Äquivalenz von 2 Kräften:

2 Kräfte $\vec{F}$ und $\vec{G}$ sind statisch äquivalent wenn:

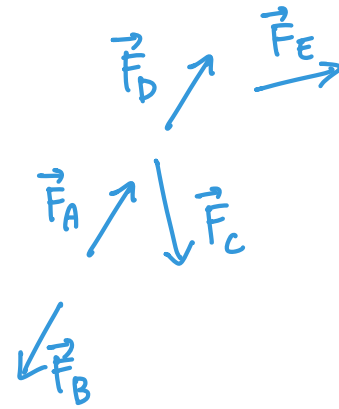
$$\vec{F} = \vec{G} \quad \underline{\text{und}} \quad \text{Wirkungslinie von } \vec{F} = \text{Wirkungslinie von } \vec{G}$$

Bsp:



$\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ sind statisch äquivalent

Quiz: Welche Kräfte sind statisch äquivalent?



Zusammenfassung:

Charakterisierung einer Kräftegruppe mittels der Invarianten der Dynamik:

Kräftepaar ($\hat{=}$ Moment): $\vec{R} = 0$ und $\vec{M}_P \neq 0$

Einzelkraft: $\vec{R} \neq 0$ und $I_2 = 0$

Nullsystem: $\vec{R} = 0$ und $\vec{M}_P = 0$

Schraube: $I_2 \neq 0$

Für 2 Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_i\}$: statisch äquivalent wenn

$$\vec{R}\{\vec{F}_i\} = \vec{R}\{\vec{G}_i\} \quad \text{und} \quad \vec{M}_P\{\vec{F}_i\} = \vec{M}_P\{\vec{G}_i\}$$

↑ beliebig, aber gleicher Pkt.

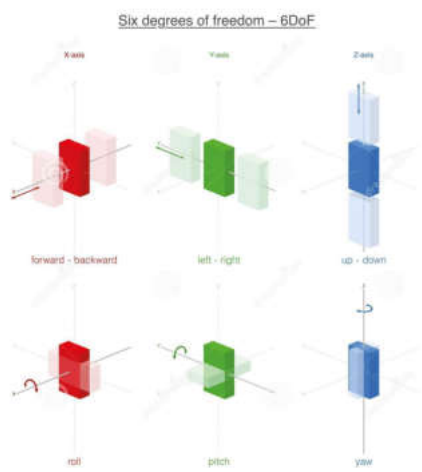
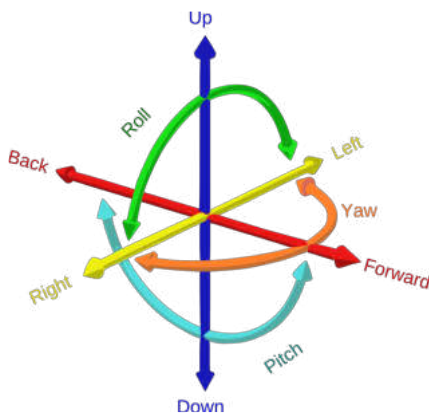
2. Der Freiheitsgrad:

Der Freiheitsgrad ist die Anzahl unabhängiger Bewegungen, welcher ein Körper oder System machen kann.

Um den Freiheitsgrad eines Systems zu bestimmen, muss man salopp gesagt sich überlegen, in welche Richtungen sich das System unabhängig bewegen kann.
(Keine Angst es gibt auch eine Formel dafür :))

Schauen wir uns zuerst einfach ein einzelner freier Körper im Raum an:

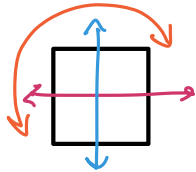
Freier Körper in 3D:



Freiheitsgrad = 6

↑ kann sich in all diese Richtungen bewegen! Bzw. alle Bewegungen sind Kombinationen von diesen 6!

Freier Körper in 2D:



→ kann sich in 3 "Richtungen" (x,y, Rotation) bewegen

Freiheitsgrad = 3

Nun wollen wir uns anschauen, wie man den Freiheitsgrad eines Systems (aus mehreren SK & Bindungen) bestimmen kann. Dafür haben wir eine nützliche Formel:

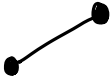
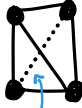
$$f = n - b$$

n = Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Körper

b = Anzahl der linear unabhängigen Bindungsgleichungen

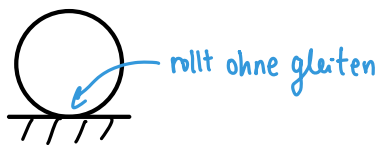
↳ Bindungen reduzieren den Freiheitsgrad eines Systems!

Beispiele:

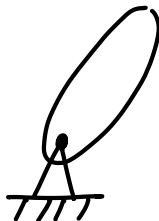
	2D	3D
• (ein Punkt)	$n=2$	$n=3$
	$n=2 \cdot 2 = 4$ $b=1$ $\Rightarrow f=4-1=3$	$n=2 \cdot 3 = 6$ $b=1$ $\Rightarrow f=6-1=5$
	$n=3 \cdot 2 = 6$ $b=3$ $\Rightarrow f=6-3=3$	$n=3 \cdot 3 = 9$ $b=3$ $\Rightarrow f=9-3=6$
 <i>diese Bindung schränkt in 2D den Freiheitsgrad nicht weiter ein $\rightarrow$ nicht mitzählen!</i>	$n=4 \cdot 2 = 8$ $b=5$ $\Rightarrow f=8-5=3$	$n=4 \cdot 3 = 12$ $b=6$ $\Rightarrow f=12-6=6$

$\hookrightarrow$ wir haben hier eigentlich bewiesen, dass ein SK in 2D den Freiheitsgrad 3, in 3D den Freiheitsgrad 6 hat! (ein SK ist eine Ansammlung von zusammengeordneten materiellen Punkten)

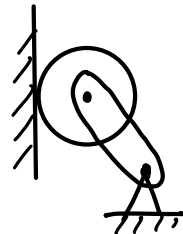
Beispiel: mehrere SK in 2D:



$$\begin{aligned}
 n &= 3 \\
 b &= 2 \\
 \Rightarrow f &= 3 - 2 = 1
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 n &= 3 \\
 b &= 2 \\
 \Rightarrow f &= 3 - 2 = 1
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 n &= 2 \cdot 3 = 6 \\
 b &= 2 + 2 + 2 = 6 \\
 \Rightarrow f &= 6 - 6 = 0
 \end{aligned}$$

Tipp: b bestimmen: überlege, in welche Richtungen der Körper sich nicht mehr bewegen kann.

Die wichtigsten Bindungen (für die Serie 5):



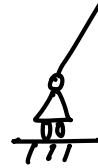
$$b = 2$$

unabhängige Bewegungen
in x- und y-Richtung
nicht möglich



$$b = 2$$

unabhängige Bewegungen
in x- und y-Richtung
nicht möglich



$$b = 1$$

unabhängige Bewegungen
in y-Richtung nicht möglich

Theorie dieser Woche:

1. Parallele Kräfte:

1.1 Dipolmoment & Kräftemittelpunkt

2. Schwerpunkt

2.1 allgemeine Formel für die Schwerpunktberechnung

2.2 Schwerpunkt & Flächen einiger simplen Körper

3. Statik:

3.1 Hauptsatz der Statik

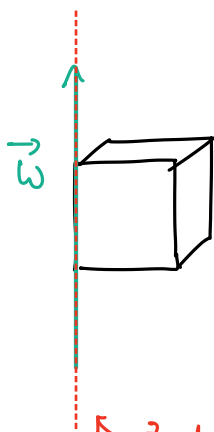
3.2 Freischneiden

3.3 Lagerkräfte

3.4 Seilkräfte

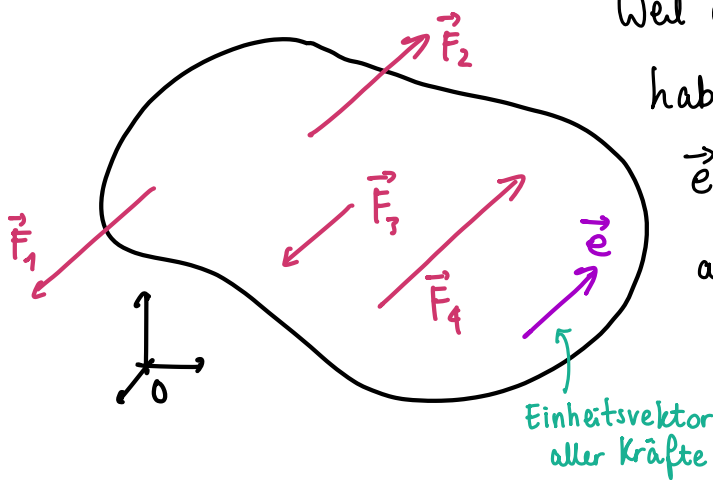
auch: Kochrezept Statikaufgaben!

Bem: Serie 5, letzte Aufgabe:

Zentralachse = die Rotationsachse bei der Schraubung. Sie bewegt sich in Richtung von $\vec{\omega}$.← Zentralachse → alle Pkte auf der Zentralachse haben die gleiche Geschwindigkeit (in $\vec{\omega}$ -Richtung)!

1. Parallele Kräfte: $\leftarrow$ kommt nicht in der Serie, ich möchte es jedoch trotzdem kurz besprechen.

Hier betrachten wir Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\}$, wobei alle Kräfte parallel aufeinander sind:



Weil alle Kräfte parallel aufeinander sind, haben alle den gleichen Richtungsvektor $\vec{e}$. Somit können wir die Kräfte aufschreiben als: $\vec{F}_i = F_i \vec{e}$

Die Resultante ist dann $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_i \vec{e} = R \vec{e}$ und

das Moment bezüglich 0: $\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i \times \vec{e} = \vec{N} \times \vec{e}$
 $\vec{F}_i = F_i \vec{e}$

wobei $\vec{N} = \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i$ Das Dipolmoment der Kräftegruppe ist. SP von 2 Vektoren

Bem: Bei parallelen Kräften ist die 2. Invariante null: $I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R \vec{e} \cdot (\vec{N} \times \vec{e}) \stackrel{\text{Dreifachprodukt}}{=} 0$

1.1 Dipolmoment & Kräftemittelpunkt

Das Dipolmoment einer Kräftegruppe ($\exists$ nur wenn alle Kräfte parallel aufeinander)

ist definiert als: $\vec{N} = \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i$

wobei: F_i : Richtungsbehafteter Betrag der einzelnen Kräfte
 $\uparrow$
d.h. es kann auch negativ sein je nach Richtung von $\vec{e}$

$\vec{r}_i$: Ortsvektor des Angriffspkts. der jeweiligen Kraft

Fallunterscheidung:

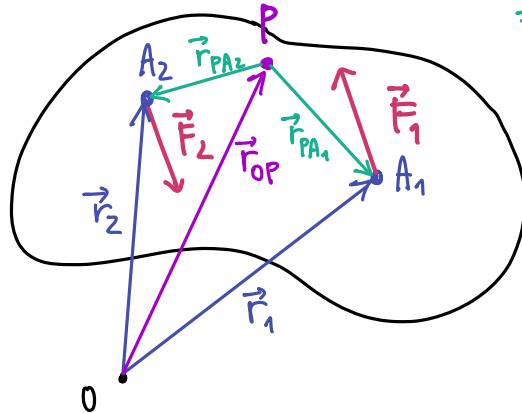
$\vec{R}=0$: Dann ist das Dipolmoment unabhängig vom Punkt O.

Why? $\vec{N} = \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i = \sum_i F_i (\vec{r}_{OP} + \vec{r}_{PA_i}) = \underbrace{\sum_i F_i \vec{r}_{OP}}_{=0} + \sum_i F_i \vec{r}_{PA_i} = \sum_i F_i \vec{r}_{PA_i}$

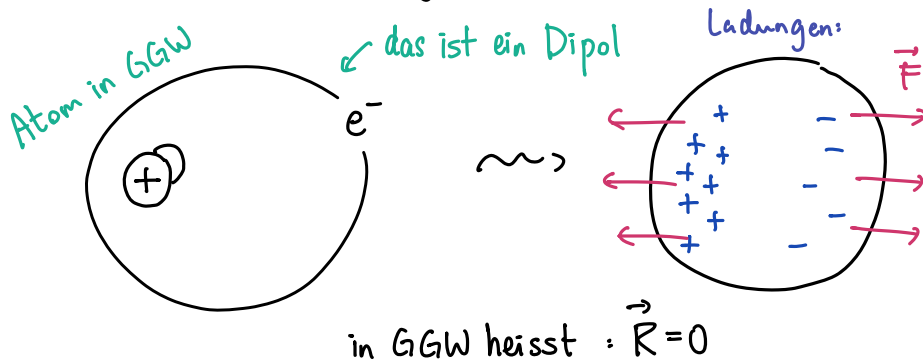
Ortsvektor
(von O aus)

weil: $\sum_i F_i \vec{r}_{OP} = \vec{r}_{OP} \cdot \sum_i F_i = \vec{r}_{OP} \cdot \vec{R} = 0$

unabhängig von
wo aus die "Ortsvektoren"
kommen → unabhängig vom
Bezugssystem

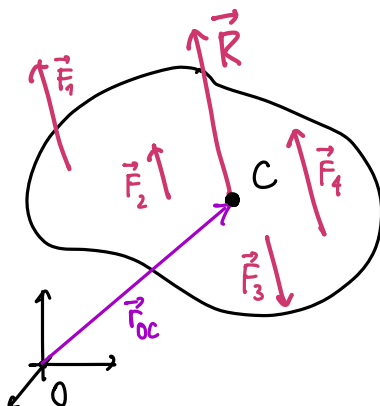


Warum ist das wichtig für uns? → in Elektrostatik passiert genau das!



Dipolmoment
ist unabhängig
vom Bezugssystem

$\vec{R} \neq 0$: Dann ist das Dipolmoment abhängig vom Bezugspunkt & es interessiert uns auch, wo der Kräftemittelpunkt C ($\hat{=}$ dort wo $\vec{R}$ angreift) ist:



Kräftemittelpunkt:

$$\vec{r}_{oc} = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i}$$

↳ Herleitung in den VL-Slides (nicht wichtig)

2. Schwerpunkt (auch: Massenmittelpunkt) ← in TechMech nur in 2D :)

⇒ hier greift die Gewichtskraft eines Körpers an.

2.1 allgemeine Formel für die Schwerpunktberechnung:

Die x - und y -Koordinate des Schwerpunkts werden so berechnet:

$$x_s = \frac{\int_{\Delta A} x dA}{A} \quad \textcircled{*} = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i}$$

$$y_s = \frac{\int_{\Delta A} y dA}{A} \quad \textcircled{*} = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i}$$

Der Schwerpunkt ist dann:

$$\vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}$$

↑
Ortsvektor vom Schwerpunkt

Wobei $\sum_i x_i A_i$ = "Summe der x -Komponenten der Schwerpunkts Ortsvektoren aller Teilkörper"
mal "Fläche der jeweiligen Teilkörper"

und $\sum_i A_i$ = Summe aller Flächen der Teilkörper ($\hat{=}$ Gesamtfläche)

↑
analog für y

⊗ Wenn der Körper homogen ist & wir einfache Geometrien haben

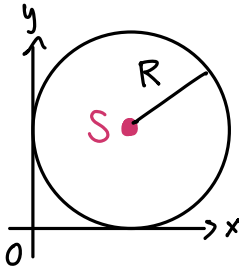
→ in TechMech immer der Fall. d.h. Integral-formel ist für uns nicht wichtig :)

Doch um diese Formel anwenden zu können, brauchen wir die Schwerpunkte einiger simplen Körper!

2.2 Schwerpunkte & Flächen einiger simplen Körper:

! Achte wo das Koordinatensystem ist!

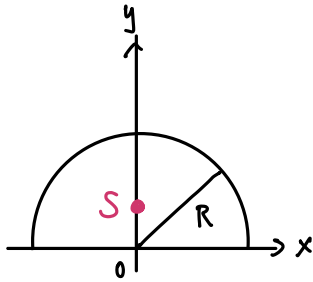
Kreis:



$$\vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}$$

$$A = \pi r^2$$

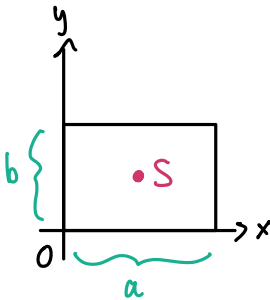
Halbkreis:



$$\vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4R}{3\pi} \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \pi r^2$$

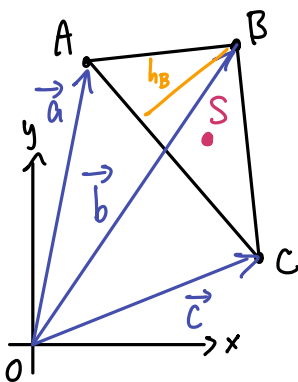
Rechteck:



$$\vec{r}_{os} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = a \cdot b$$

Dreieck:



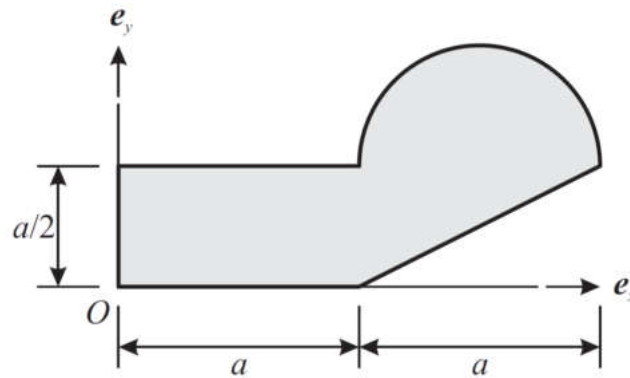
$$\vec{r}_{os} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} AC \underline{h_B}$$

↳ hier sind alle Körper homogen.

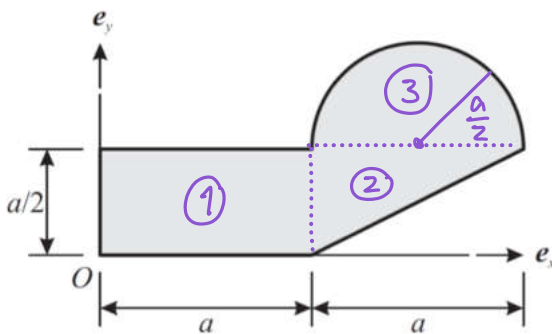
Beispiel: Serie 6, Aufgabe 4

4. ⁴ Finden Sie den Schwerpunkt des unten skizzierten, homogenen, ebenen Körpers.

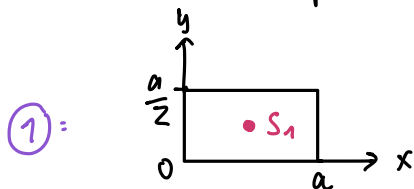


Annahme: Der Körper ist eben und hat eine homogene Massenverteilung.

Schritt 1: Körper in einfachere Körper zerteilen:



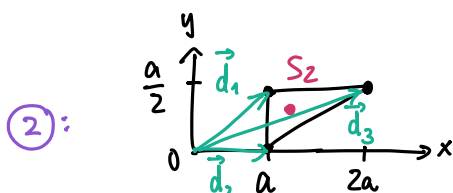
Schritt 2: Schwerpunkte und Flächen der einzelnen Körper bestimmen:



$$\vec{r}_{OS_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{4}a \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$

rosa: später für Formel

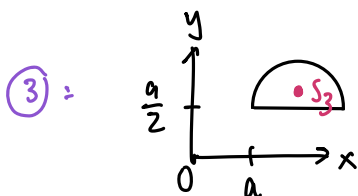
$$A_1 = \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2}$$



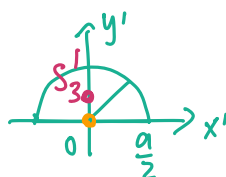
$$\vec{r}_{OS_2} = \frac{\vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3}{3} = \frac{\begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 4a \\ a \end{pmatrix}}{3}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}a \\ \frac{1}{3}a \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{4}$$



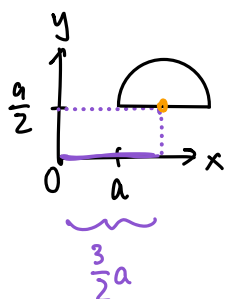
Zwischenschritt machen:



$$\vec{r}_{OS_3}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3\pi} \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3\pi} a \end{pmatrix}$$

↑ Koordinaten so setzen

Dann verschieben s.d. wir die richtigen Koordinaten haben:



$$\rightarrow \vec{r}_{OS_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3\pi} a \end{pmatrix}}_{\vec{r}_{OS_3}'} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} a \\ \frac{1}{2} a \end{pmatrix}}_{\text{Verschiebung der Koordinatenachse}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} a \\ (\frac{2}{3\pi} + \frac{1}{2}) a \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_3 \\ \leftarrow y_3 \end{matrix}$$

$$A_3 = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi}{2} = \frac{a^2}{8} \pi$$

Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} \pi = \left(\frac{3}{4} + \frac{\pi}{8}\right) a^2$

Ortsvektor vom Schwerpunkt

$\Rightarrow \vec{r}_{OS}$ bestimmen:

x-Koordinate von $\vec{r}_{OS}$ $\rightarrow x_s = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A} = \frac{\frac{1}{2} a \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{4} + \frac{3}{2} a \cdot \frac{a^2}{8} \pi}{\left(\frac{3}{4} + \frac{\pi}{8}\right) a^2} =$

$$= \frac{\frac{1}{4} a + \frac{1}{3} a + \frac{3}{16} \pi a}{\frac{3}{4} + \frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{7}{12} a + \frac{3}{16} \pi a}{\frac{b + \pi}{8}} \cdot \frac{48}{48} = \frac{(28 + 9\pi) a}{b \cdot (b + \pi)}$$

$\stackrel{=-1}{\sim} \frac{48}{48}$

y-Koordinate von $\vec{r}_{OS}$ $\rightarrow y_s = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A} = \frac{\frac{1}{4} a \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{3} a \cdot \frac{a^2}{4} + \left(\frac{2}{3\pi} + \frac{1}{2}\right) a \cdot \frac{a^2}{8} \pi}{\left(\frac{3}{4} + \frac{\pi}{8}\right) a^2} =$

$$= \frac{\frac{1}{8} a + \frac{1}{12} a + \frac{1}{12} a + \frac{1}{16} \pi a}{\frac{3}{4} + \frac{\pi}{8}} = \frac{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} \pi\right) a}{\frac{b + \pi}{8}} \cdot \frac{48}{48} = \frac{(b + 8 + 3\pi) a}{b \cdot (b + \pi)}$$

$$= \frac{(14+3\pi)a}{b \cdot (b+\pi)}$$

$$\text{Somit ist } \vec{r}_{OS} = \begin{pmatrix} \frac{(28+9\pi)a}{b \cdot (b+\pi)} \\ \frac{(14+3\pi)a}{b \cdot (b+\pi)} \end{pmatrix} = \frac{a}{b \cdot (b+\pi)} \cdot \begin{pmatrix} 28+9\pi \\ 14+3\pi \end{pmatrix}$$

3. Statik: - Ziel: Bindungskräfte eines Systems bestimmen:

3.1 Hauptsatz der Statik:

Damit ein System in Ruhe ist, gilt $\vec{R} = 0$ & $\vec{M} = 0$

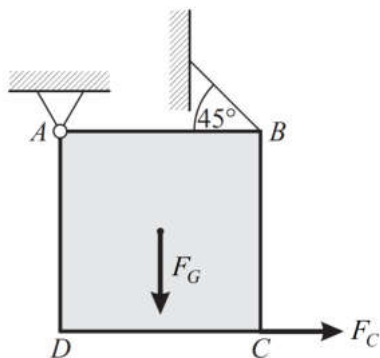
Bem: Moment ist unabhängig vom Bezugspunkt wegen $\vec{R} = 0$

Good to know: der Hauptsatz der Statik wird vom Prinzip der virtuellen Leistungen impliziert
↳ werden wir uns nächste Woche genauer anschauen.

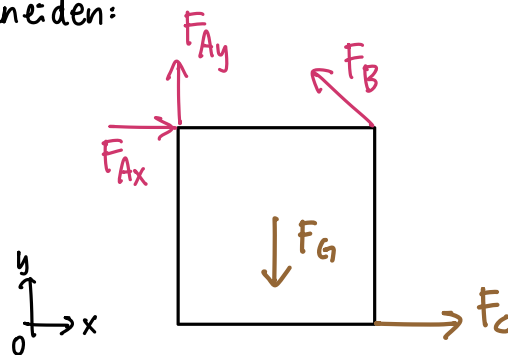
3.2 Freischneiden:

Beim analysieren eines Systems (d.h. Bindungskräfte bestimmen usw.) muss man immer als allererster Schritt alle Starrkörper freischneiden. Dabei zeichnet man alle Kräfte (auch Bindungskräfte!) ein, die auf das System wirken.

Bsp: (aus Serie 6, A1)



freischneiden:



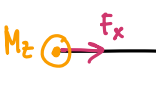
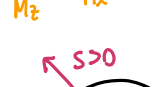
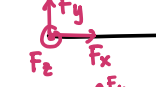
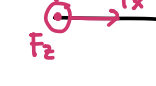
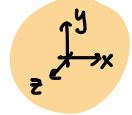
3.3 Lagerkräfte: Beim freischnitten muss man die Lagerkräfte so einzeichnen:

Lager vor dem Freischnitt

nach Freischnitt

Auflager (einseitig)		
Auflager (einseitig) <i>Loslager</i>		
Auflager (beidseitig) <i>Loslager</i>		
Auflager (beidseitig) <i>Kurzes Querlager</i> <i>Loslager</i>		
Gelenk <i>Festlager</i>		
Gelenk		
Gelenk (zwei gelenkig verbundene Balken)		
Einspannung		
Faden / Seil		
Pendelstütze (Modellannahme: äussere Kräfte nur in den Gelenken)		
Parallelführung		
Langes Querlager, Schiebehülse		
Längs- und kurzes Querlager		

3D:



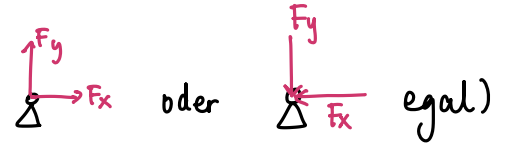
Seilkraft

↳ aus Skript S.54~55

Good to know: Man zeichnet die Kräfte / Momente dort ein, wo die Bewegung / Rotation in diese Richtung vom Lager aufgehalten wird. D.h. dort wo die Bewegung wegen dem Lager nicht zugelassen ist.

Wichtig: Es ist egal, ob ihr die Kräfte / Momente in plus oder minus

Richtung einzeichnet (d.h. z.B.



⇒ Bei den Aufgaben / an der Prüfung wird die Skizze berücksichtigt!
(Deswegen auch: zeichnet die Kräfte sauber ein beim freischneiden)



Seilkräfte: Seile können nur auf Zug belastet werden. Das heisst:

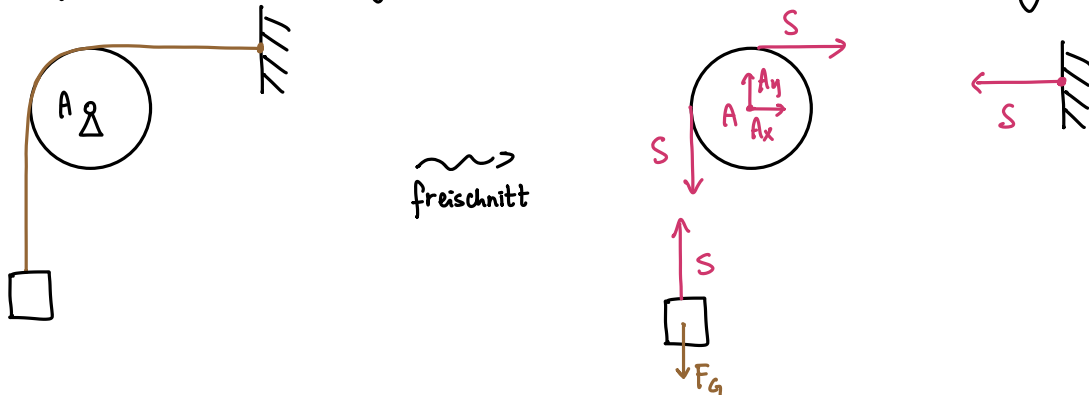
- Seilkräfte immer auf Zug (weg vom Körper) & in Seilrichtung zeichnen
- Bedingung: $S \geq 0$ s: Seilkraft

Bsp:



Wichtig: Reibungsfreie Umlenkungen: Seilkraft ist an beiden Enden gleich gross

Bsp:



So weit so gut, aber wofür brauchen wir das Ganze jetzt?

Kochrezept für Statikaufgaben:

1) Koordinatensystem einführen & Freischnittskizze erstellen.

wie ihr wollt! aber macht euer
Leben nicht unnötig schwer...

- Lager ersetzen durch Lagerkräfte gemäss Tabelle (Seile auch)
- Alle äusseren Kräfte & Momente eintragen
- Falls nicht masselos $\rightarrow$ Gewichtskräfte eintragen

2) Gleichgewichtsbedingungen formulieren:

$$3D: \quad R = R_x = R_y = R_z = 0 \quad M = M_x = M_y = M_z = 0 \quad 6 \text{ Gleichungen pro SK}$$

$$2D: \quad R = R_x = R_y = 0 \quad M = M_z = 0 \quad 3 \text{ Gleichungen pro SK}$$

& nach gesuchten Kräften / Momenten auflösen

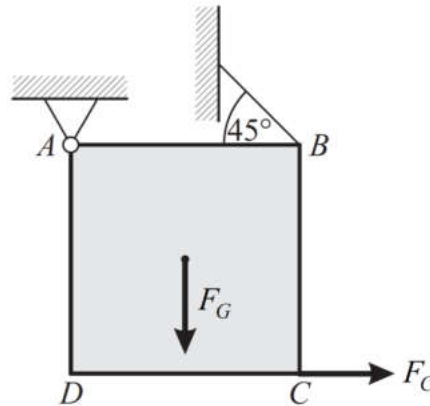
3) Diskussion über Ruhe:

- Seilkräfte nur auf Zug belastet $\rightarrow S > 0$
- Auflager hebt nicht ab $\rightarrow F_y > 0 \quad \forall \text{ Auflager}$

$\hookrightarrow$ Schauen wir uns das ganze anhand eines Beispiels an!

Seite 6, Aufgabe 1.

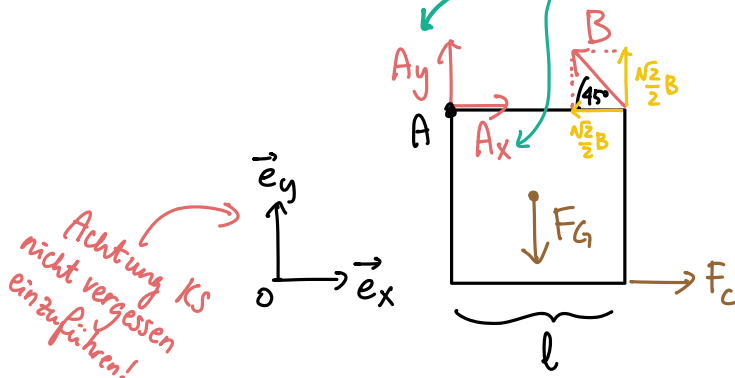
1. Eine homogene Quadratplatte ist durch ihr Eigengewicht F_G sowie durch eine horizontale Kraft vom Betrag F_C belastet. Die Platte ist in der Ecke A gelenkig reibungsfrei gelagert sowie mit einem gewichtslosen Faden an der Ecke B gestützt.



1. Ermitteln Sie alle an der Platte angreifenden Bindungskräfte.
2. Wie gross darf F_C höchstens sein, damit die Platte noch ruht?

1) Schritt 1: Freischnitt:

ich benenne meine Kräfte gerne so, damit ich nicht unnötig oft "F" schreiben muss.



Schritt 2: Gleichungen aufstellen:

Merke: - Statikaufgabe! $\rightarrow \vec{R} = 0, \vec{M} = 0$
 - 2D $\rightarrow$ 3 Gleichungen pro SK

$$\text{KB}(x): 0 = A_x + F_C - \frac{\sqrt{2}}{2} B \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{KB}(y): 0 = A_y - F_G + \frac{\sqrt{2}}{2} B \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{M}(A, z): 0 = l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} B - \frac{l}{2} F_G + l F_C \quad \dots \textcircled{3}$$

lineares Gleichungssystem!

Tipp: nummeriert eure Gleichungen, um den Überblick zu erhalten

Bezugspkt. beliebig!
 (Moment ist unabhängig vom Bezugspkt. wegen $\vec{R} = 0$)
 Moment hat in 2D nur 1 Komponente (hier z weil Körper auf xy-Ebene)

Schritt 3: Gleichungen auflösen:

Tipp: schreibt am Anfang auf, welche Kräfte gesucht sind, um den Überblick zu erhalten!

$$\textcircled{3} \Rightarrow l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} B - \frac{l}{2} F_G + l F_C = 0 \quad | :l, \cdot 2$$

$$\Rightarrow \textcircled{?}: A_x, A_y, B$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} B - F_G + 2 F_C = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} B = F_G - 2 F_C$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow A_y - F_G + \frac{\sqrt{2}}{2} B = 0 \quad | \quad \textcircled{4} \Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C$$

$$\Leftrightarrow A_y = F_G - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C \right) = F_G - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} F_G}_{\frac{1}{2} F_G} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} F_C$$

$$\Rightarrow A_y = \frac{1}{2} F_G + F_C \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow A_x + F_C - \frac{\sqrt{2}}{2} B = 0 \quad | \quad \textcircled{4} \Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C$$

$$\Leftrightarrow A_x = -F_C + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C \right) = -F_C + \frac{1}{2} F_G - F_C$$

$$\Rightarrow A_x = \frac{1}{2} F_G - 2 F_C$$

2) F_C max., s.d. Platte ruht?

$\Rightarrow$ Platte ruht, solange das Seil gespannt ist $\Rightarrow B \geq 0$

$$\textcircled{4} \Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{2} F_G - \sqrt{2} F_C \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} F_C \leq \frac{\sqrt{2}}{2} F_G \quad | : \sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{F_C \leq \frac{1}{2} F_G}}$$

Theorie dieser Woche:

1. Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)
 - 1.1 PdvL (Satz)
 - 1.2 Virtuelle Bewegungszustände
 - 1.3 Recap Leistung
 - 1.4 Stabkräfte
 - 1.5 Kochrezept PdvL
 - 1.6 Beispiel aufgabe PdvL

1. Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

1.1 PdvL (Satz):

→ Skript S.48

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):

Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet (und die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen).

$$\text{d.h. } \boxed{\tilde{P} = \tilde{P}^{(i)} + \tilde{P}^{(a)} = 0} \quad \forall \{\tilde{v}\}$$

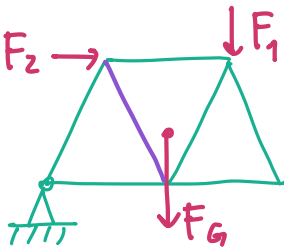
~ heisst virtuell.

Wir benutzen den PdvL, um Bewegungsgleichungen von mechanischen Systemen mit Zwangsbedingungen (z.B. Bindungen) aufzustellen.

Doch was nützt uns eigentlich der PdvL? → 2 Sachen:

Wir werden es hauptsächlich benutzen um Stabkräfte zu bestimmen.

Bsp:



Wir wollen wissen, mit welcher Kraft der violette Stab gedrückt bzw. gezogen wird. Bei einer solchen Aufgabe wird uns der PdvL sehr nützlich sein!

Ausserdem impliziert der PdvL den Hauptsatz der Statik

(System ist in Ruhe wenn $\vec{R}=0$ und $\vec{M}=0$) → haben wir letzte Woche gesehen :)

Und! Bisher kam an der Prüfung zu 100% eine PdvL-Aufgabe

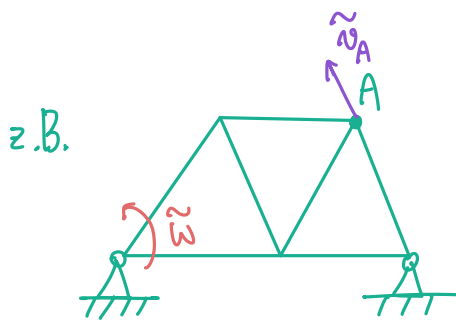
Wir sehen, dass der PdvL recht nützlich ist :)

Doch was bedeutet eigentlich "virtuell"?

1.2 Virtuelle Bewegungszustände:

Ein virtueller Bewegungszustand ist irgendein gedachter Bewegungszustand, der keinen Bezug zu wirklich möglichen Bewegungszuständen haben muss.

Virtuell heißt also, dass wir uns diese Bewegungen einfach nur vorstellen!



Dieses System kann sich eigentlich gar nicht bewegen. Aber wir könnten z.B. eine virtuelle Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ einführen um zu schauen was dann die Geschwindigkeit im Punkt A wäre, wenn sich das System tatsächlich ein solches $\tilde{\omega}$ hätte.

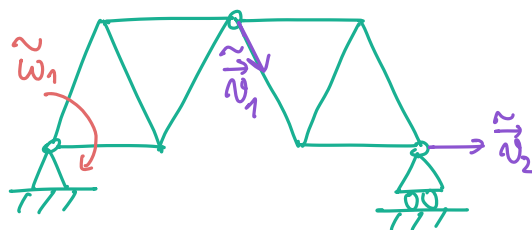
Um virtuelle Bewegungen von wirklichen Bewegungen zu unterscheiden, bezeichnen wir sie mit einer Tilde " $\sim$ ".

Die Kinate $\{\tilde{v}, \tilde{\omega}\}$ ist dann ein virtueller SK-Zustand.

Wir unterscheiden zwischen zulässigen und unzulässigen Bewegungszuständen:

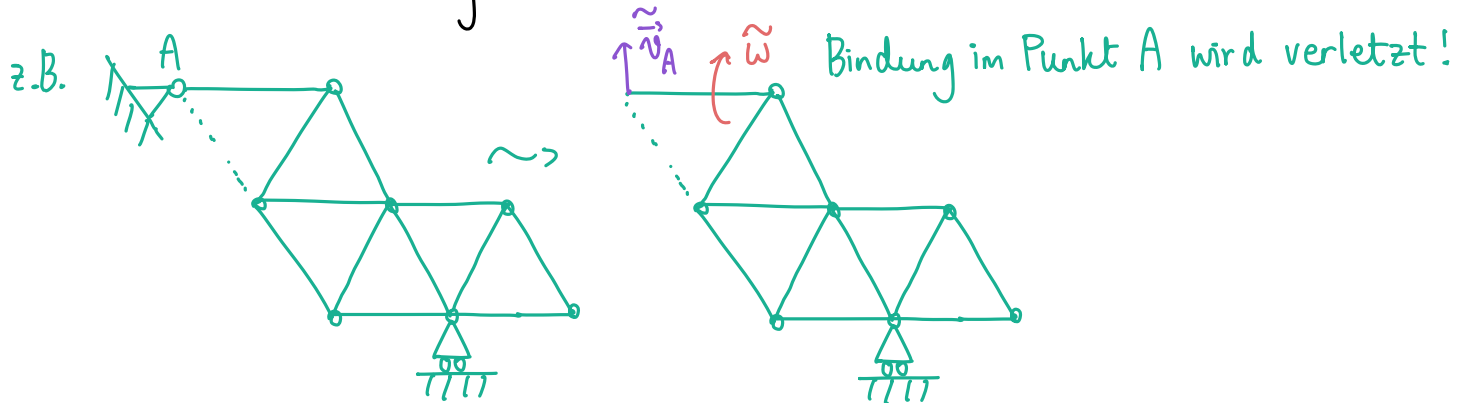
Zulässiger Bewegungszustand: Wenn der virtuelle Bewegungszustand keine Bindungen verletzt.

z.B.



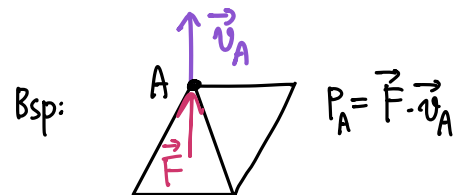
! Wir werden uns v.a. mit zulässigen Bewegungszuständen beschäftigen!

Unzulässiger Bewegungszustand: Wenn der virtuelle Bewegungszustand mindestens 1 Bindung verletzt.

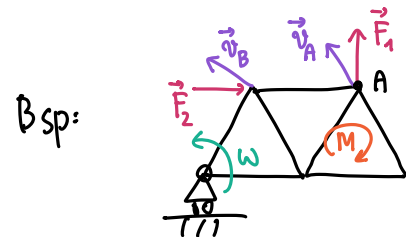


1.3 Recap Leistung:

$$P_{\text{Einzelkraft}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos(\alpha)$$

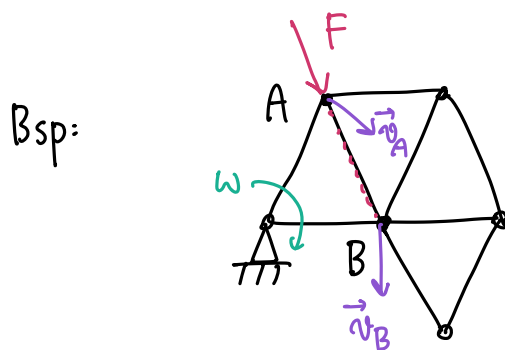


Gesamtleistung: $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_i \vec{M}_i \cdot \vec{\omega}_i$



$$P = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_A + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_B + M \cdot \omega$$

don't forget: Bei der Berechnung der Leistung dürfen die Kräfte entlang ihrer Wirkungsline verschoben werden.



$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_A = \vec{F} \cdot \vec{v}_B$$

1.4 Stabkräfte (bzw. Pendelstäbe):

Pendelstab: • ist an beiden Enden gelenkig gelagert

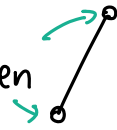
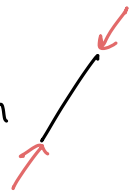
• kann nur Kräfte in Stabrichtung aufnehmen

↳ Zug- / Druckkräfte

↳ keine Querkräfte & Biegemomente!

• externe Kräfte greifen nur an Knotenpunkten an.

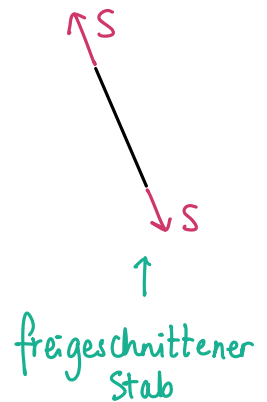
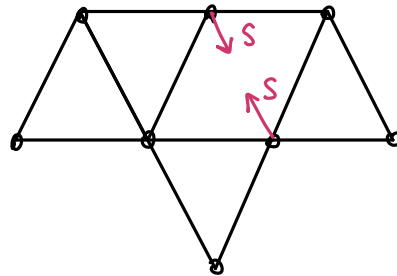
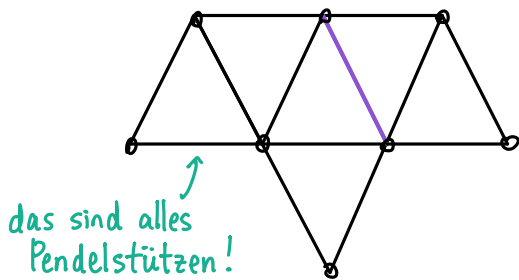
↑
Wir werden uns
nur mit solchen
Stäben beschäftigen



⚠ Ein Fachwerk besteht aus lauter Pendelstäben!

d.h. der Freischnitt ist recht einfach!

Bsp: Wir wollen den **violetten Stab** wegnehmen & mit den entsprechenden Stabkräften ersetzen:



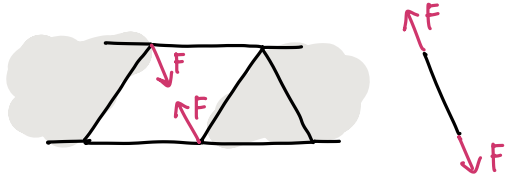
Bem: Wegen dem Reaktionsprinzip (Newton) ist:

• Beim Stab die Kraft "oben" gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet zu der Kraft "unten", da der Stab ein SK ist und sich somit nicht verformen darf. → gilt $\forall$ Stäbe in TechMech!

• Die Stabkräfte, die wir im Fachwerk einzeichnen, sind gleich gross & entgegengesetzt gerichtet zu den Kräften, die wir beim Stab einzeichnen.

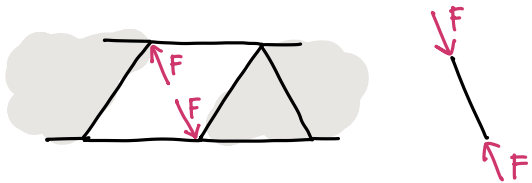
Zug- / Druckstab: Beim bestimmen ob ein Stab ein Zug- oder Druckstab ist, muss man aufpassen denn je nach dem, wie man die Stabkraft beim freischnitt einzeichnet sind die Vorzeichen anders:

Wenn man die Stabkraft so eingezeichnet hat:



falls $F \geq 0 \Rightarrow$ Zugstab
falls $F < 0 \Rightarrow$ Druckstab

Wenn man sie so eingezeichnet hat:



falls $F \geq 0 \Rightarrow$ Druckstab
falls $F < 0 \Rightarrow$ Zugstab

So merke ich es mir: Die Kräfte, die wir einzeichnen, sind die Kräfte, welche auf das System wirken. D.h. ich sage mir im Kopf:

"Der Stab / das Fachwerk wird": $\begin{cases} \text{gezogen} \rightarrow \text{Zugstab} \\ \text{gedrückt} \rightarrow \text{Druckstab} \end{cases}$

Wenn Vorzeichen negativ ist, einfach sich vorstellen, dass die Pfeile in die andere Richtung wie eingezeichnet zeigen & genau dasselbe Gedankenexperiment machen.

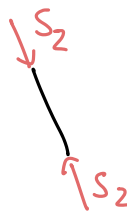
Bsp:



$$S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} F \rightsquigarrow \text{Zugstab}$$

$$S_2 = -\frac{1}{2} F$$

$\rightsquigarrow$



$$S_2 = \frac{1}{2} F$$

$\rightsquigarrow$ Druckstab

↑ So muss man nicht immer überlegen mit den Vorzeichen :)

1.5 Kochrezept PdvL:

1.3 Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

1. Stab mit der gesuchten Stabkraft entfernen und an seiner Stelle Stabkraft einführen. Externe Kräfte und Momente in Skizze übernehmen.
2. Bewegung einführen, die möglich ist. In der Regel eine Rotation um ein Festlager
3. Starre Körper identifizieren, Momentanzentren und Winkelgeschwindigkeiten bestimmen, Geschwindigkeit an den Knoten berechnen, an denen Kräfte angreifen
4. Gesamtleistung der Bewegung berechnen und gleich null setzen.

$$P_{tot} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{\tilde{v}}_i + \sum_i \underline{M}_i \cdot \underline{\tilde{w}}_i = 0$$

Beachte: $\underline{F}_i \cdot \underline{v}_i = F_i \cdot v_i \cdot \cos(\alpha)$

5. Nach gesuchter Stabkraft auflösen. Das eingeführte w kürzt sich heraus.



Beachte: Lager nicht durch Lagerkräfte ersetzen sondern als Lager lassen.

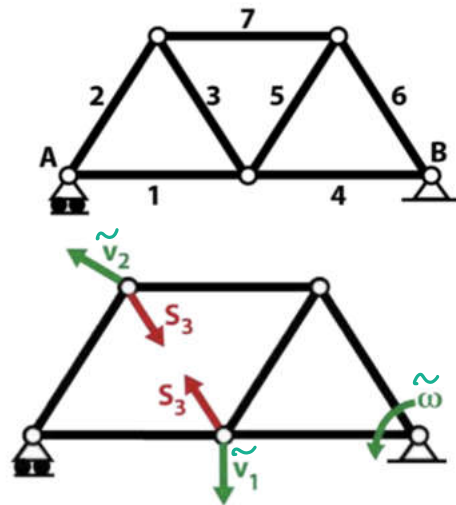


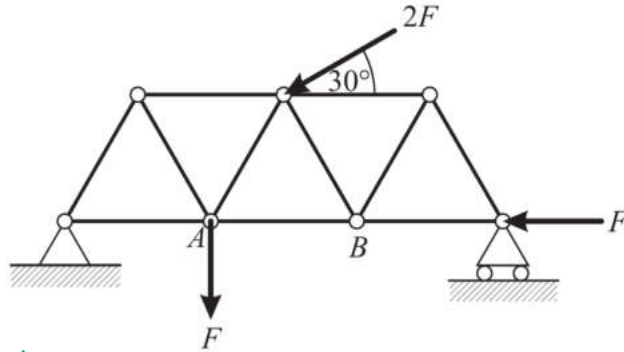
Abbildung 2: PdvL

Notation: $\sim$: $\tilde{P}, \tilde{w}, \tilde{v}$: steht für virtuell

↳ Schauen wir uns das anhand eines Beispiels an!

Beispielaufgabe: Serie 7, Aufgabe 1, Teilaufgabe 2 & 3

1. ¹Das skizzierte ideale Fachwerk ist durch die drei eingezeichneten Kräfte belastet. Alle Stäbe haben die Länge l .

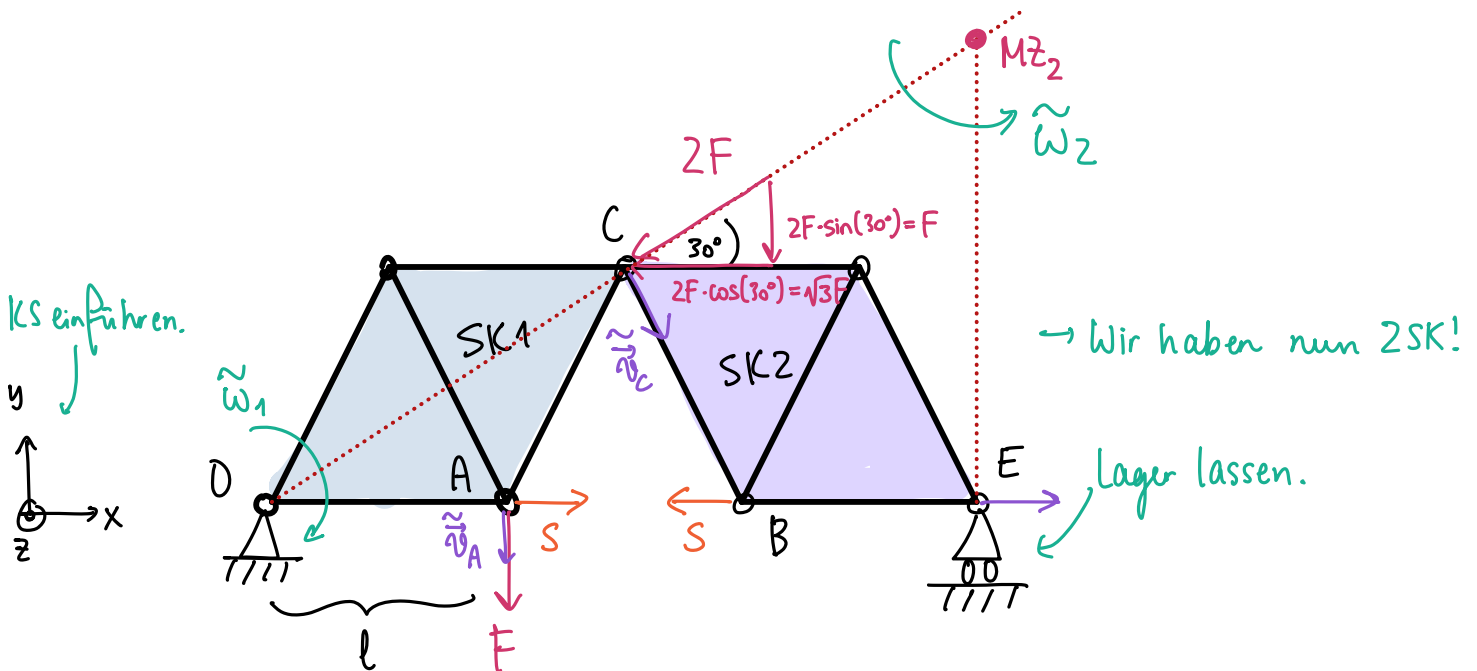


Statikaufgabe

- PdVL {
1. Bestimmen Sie die Bindungskräfte in den Lagern.
 2. Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen (PdVL) die Stabkraft im Stab AB.
 3. Ist es ein Zug- oder Druckstab?

2) Wir müssen die Stabkraft im Stab AB bestimmen

→ Stab entfernen & durch Stabkräfte ersetzen:



SK identifizieren: SK1 und SK2

Mz von SK1 ist sofort ersichtlich: Pkt. 0 → hier eine Virtuelle Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}_1$ einführen.

Dann alle Geschwindigkeiten von den Pkten, an welche eine Kraft angreift, bestimmen $\rightarrow$ why? Weil wir sie für die Leistungsberechnung brauchen! ($P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, dort wo $\vec{F} = 0$ ist brauchen wir deswegen keine $\vec{v}$.)

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{\omega}_1 l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\omega}_1 l$$

2D-Aufgabe

$\rightarrow$ in Skizze*

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{2}l \\ \frac{\sqrt{3}}{2}l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}l\tilde{\omega}_1 \\ -\frac{3}{2}l\tilde{\omega}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1$$

*Tipp: zeichnet alles sofort in die Skizze rein, damit ihr den Überblick nicht verliert.

MZ von SK2 finden über senkrechten zu $\vec{v}_C$ und $\vec{v}_E \rightarrow$ in Skizze

aus Symmetrie können wir sofort sehen, dass $|\vec{\omega}_1| = \tilde{\omega}_1 = |\vec{\omega}_2| = \tilde{\omega}_2$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{MZ_2B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -l \\ -\sqrt{3}l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}l\tilde{\omega}_2 \\ -l\tilde{\omega}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_2$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1$$

$\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_1$

2D-Aufgabe & $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$

$$\vec{v}_D = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{MZ_2D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}l\tilde{\omega}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1$$

PdVl anwenden: $\vec{P}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{P}_i \stackrel{!}{=} 0$

erinnerung: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{P}_{\text{tot}} = \vec{v}_A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \vec{v}_A \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{v}_B \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{v}_C \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}F \\ -F \end{pmatrix} + \vec{v}_D \cdot \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} l\tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}F \\ -F \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \tilde{\omega}_1 \cdot \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad / : \tilde{\omega}_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}F \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow F - \sqrt{3}S - \cancel{\frac{3}{2}F} + \cancel{\frac{3}{2}F} - \sqrt{3}F = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}S + (1 - \sqrt{3})F = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}S = (1 - \sqrt{3})F$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{S = \frac{(1 - \sqrt{3})F}{\sqrt{3}}}}$$

virtuelle Rotations-
geschwindigkeit, willkürlich
eingeführt!

Merke, dass sich l und $\tilde{\omega}_1$
rausgekürzt haben! :) $\downarrow$

3) Druck- oder Zugstab?

Wir haben die Stabkräfte so eingeführt:



und haben berechnet, dass $S = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot F$.

Wir sehen, dass $\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot F < 0$

d.h. der Stab AB ist ein Druckstab.

Bem: Wenn eine Kraft negativ ist, heißt es einfach dass sie eigentlich in die andere Richtung wie eingezeichnet wirkt. D.h. in diesem Fall:

also eigentlich sind die Kräfte so gerichtet:



Theorie dieser Woche:

1. Statische & Kinematische Bestimmtheit
2. (nicht) Kippen

1. Statische und Kinematische Bestimmtheit:

Mithilfe der statischen / kinematischen Bestimmtheit kann man prüfen, ob sich ein System im mechanischen / kinematischen Gleichgewicht befindet. Das heißt: Inwiefern das vorhandene System in seiner Beweglichkeit aufgrund von Lagern oder Gelenken eingeschränkt ist.

Für Maschinenbauer / Bauingenieure usw. wird es dann verwendet, um zu entscheiden welche Berechnungsmethoden angewandt werden können

↑ Wir werden das nicht machen :)

Systeme werden bezüglich statischer Bestimmtheit in 3 Kategorien eingeordnet:

Statisch Bestimmt:

Ein System ist statisch bestimmt, wenn jede Starrkörper-Bewegungsmöglichkeit genau durch ein Lager- oder Verbindungsreaktion unterbunden wird. Das heißt: Wenn ein System statisch bestimmt ist, gilt:

$$f = n - b = 0$$

Erinnerung: f : Freiheitsgrad

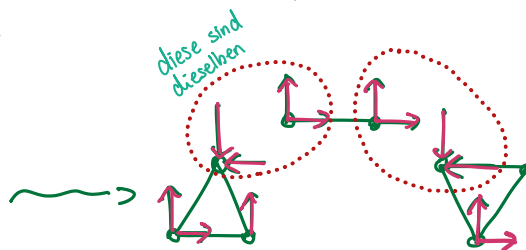
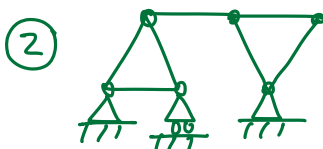
n : Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Starrkörper

b : Anzahl Bindungen

Beispiele:



$$n=3 \quad b=3 \quad f=3-3=0$$



$$n=9 \quad b=9 \quad f=9-9=0$$

Statisch Unbestimmt:

Ein System ist statisch unbestimmt, wenn die Anzahl der unbekannten Reaktionskräfte (Lagerkräfte, Verbindungskräfte usw.) grösser ist als die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen. $\rightarrow$ $KB(x): 0 = \dots$
 $KB(y): 0 = \dots$
 $\vdots$ usw.
(das was wir in Statikaufgaben aufstellen)

D.h. wenn

$$f = n - b < 0$$

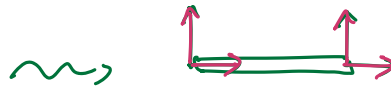
Tipp: Intuitiv: Wenn man irgendwo eine Bindungskraft (in einer Richtung) wegnehmen kann ohne dass das System deswegen zusammenfällt, ist das System statisch unbestimmt.

Good to know: In diesem Fall ist es nicht möglich, die unbekannten Reaktionskräfte mittels der Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen.

Good to know: $b - n$ ist der Grad der statischen Unbestimmtheit.

Beispiele:

①



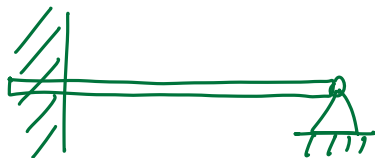
$$n = 3$$

$$b = 4$$

$$\rightarrow f = 3 - 4 = -1$$

und: $b - n = 4 - 3 = 1 \rightarrow$ einfach statisch unbestimmt

②



$$n = 3$$

$$b = 5$$

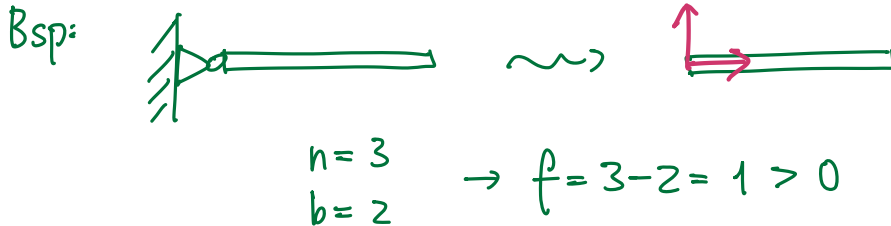
$$\rightarrow f = 5 - 3 = -2$$

und: $b - n = 5 - 3 = 2 \rightarrow$ zweifach statisch unbestimmt

Mechanismus:

Ein System kann weder statisch bestimmt noch statisch unbestimmt sein, und zwar wenn $f = n - b > 0$.

Dann ist das System ein Mechanismus (bzw. statisch überbestimmt).



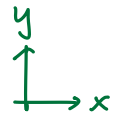
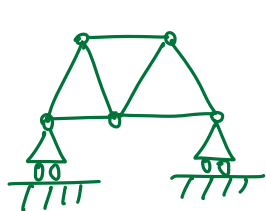
Es interessiert uns auch noch, wie sich das System kinematisch verhält:

Kinematisch unbestimmt:

Ein System ist kinematisch unbestimmt, falls zulässige momentane Bewegungszustände möglich sind.

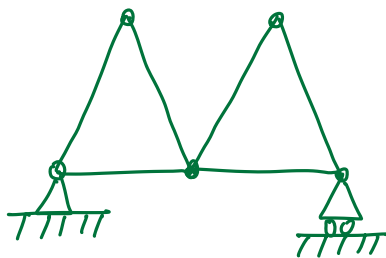
Beispiele:

①

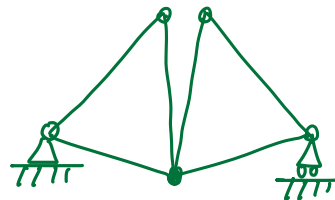


System kann sich in x-Richtung bewegen
 $\Rightarrow$ kinematisch unbestimmt

②



System kann sich z.B. so bewegen:



$\Rightarrow$ kinematisch unbestimmt

Good to know: Falls eine Gleichung trivial ist (z.B. $\sum F_x = 0$) ist es oft ein Indiz für kinematische Unbestimmtheit.

Wichtig: statisch überbestimmt ($f > 0$) ^{impliziert} kinematisch unbestimmt,
 Doch es ist keine notwendige Bedingung, um das System kinematisch unbestimmt zu machen. D.h. die umgekehrte Aussage gilt nicht:
 kin.-unbestimmt $\nRightarrow f > 0$ und insbesondere:
 $f \neq 0 \nRightarrow$ nicht kinematisch unbestimmt.

Warum?

↳ Es gibt Systeme, die gleichzeitig statisch unbestimmt (d.h. $f < 0$) und kinematisch unbestimmt sind.

Ich weiss es ist ein bisschen verwirrend :') aber man muss einfach aufpassen.

Bsp:

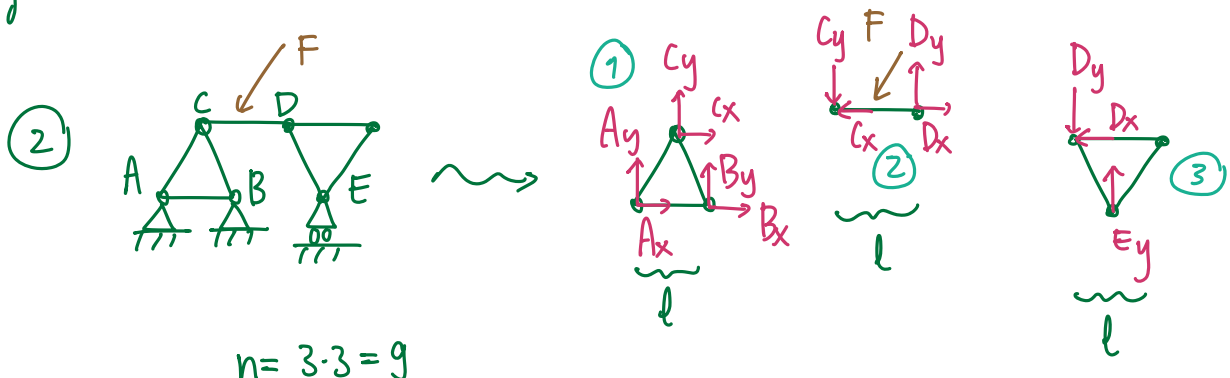


→ genauer: Skript S.57

→ der Balken kann sich in x-Richtung bewegen $\Rightarrow$ kinematisch unbestimmt

→ 2 Gleichungen, 3 Unbekannte $\Rightarrow$ statisch unbestimmt

Achtung bei solchen Fällen:



$$n = 3 \cdot 3 = 9$$

$$f = 9 - 9 = 0 \rightarrow \text{statisch bestimmt? Nein!}$$

Warum? → Das System ist kinematisch unbestimmt. $\Rightarrow$ kann nicht statisch bestimmt sein!

Für diejenigen die es interessiert: Doch was ist es dann?

Schauen wir uns die GGW-Gleichungen an:

SK ①: $KB(x): 0 = A_x + B_x + C_x$

$KB(y): 0 = A_y + B_y + C_y$

$MB(A, z): 0 = l B_y + \frac{l}{2} C_y - \frac{l}{2} C_x$

SK ② $KB(x): 0 = -C_x + D_x - \frac{\sqrt{2}}{2} F$

$KB(y): 0 = D_y + C_y - \frac{\sqrt{2}}{2} F$

$MB(C, z): 0 = -\frac{l}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} F + l D_y$

6 Gleichungen, 6 Unbekannte:
sieht gut aus, aber... *

SK ③ $KB(x): 0 = D_x$

$KB(y): 0 = D_y$

$MB(D, z): 0 = \frac{l}{2} E_y$

$D_x = D_y = E_y = 0$

* diese Gleichungen sind nicht linear unabhängig! In Matrixform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ B_x \\ C_x \\ A_y \\ B_y \\ C_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} F \\ \frac{\sqrt{2}}{2} F \\ \frac{\sqrt{2}}{4} F \end{bmatrix}$$

→ 5 linear unabhängige
Gleichungen, 6 Unbekannte!
 $f = 5 - 6 = -1 < 0$
⇒ statisch unbestimmt.

↳ Wenn man diese Matrix gaussiert sieht man, dass sie
nur 5 Pivots hat → d.h. nur 5 linear unabhängige Gleichungen
(versucht es selber auf z.B. Matlab falls es euch interessiert)

Statische & Kinematische Bestimmtheit, zusammengefasst:

$$f = n - b = 0 \quad (\Rightarrow) \text{ statisch bestimmt}$$

$$f = n - b < 0 \quad (\Rightarrow) \text{ statisch unbestimmt}$$

$$f = n - b > 0 \quad (\Rightarrow) \text{ statisch überbestimmt}$$

System kann sich bewegen $(\Rightarrow)$ kinematisch unbestimmt

wobei $n = \# \text{ GGW-Bedingungen}$
($\hat{=}$ $\sum$ der Freiheitsgrade
der einzelnen SK)

$b = \# \text{ Unbekannte}$
($\hat{=}$ $\#$ Lager- und
Bindungskräfte)

Erinnerung: In 2D hat ein SK 3 GGW-Gleichungen,
In 3D hat ein SK 6 GGW-Gleichungen

Warum?
 $\hookrightarrow$ siehe Notes Ü 6

Wichtige Zusammenhänge:

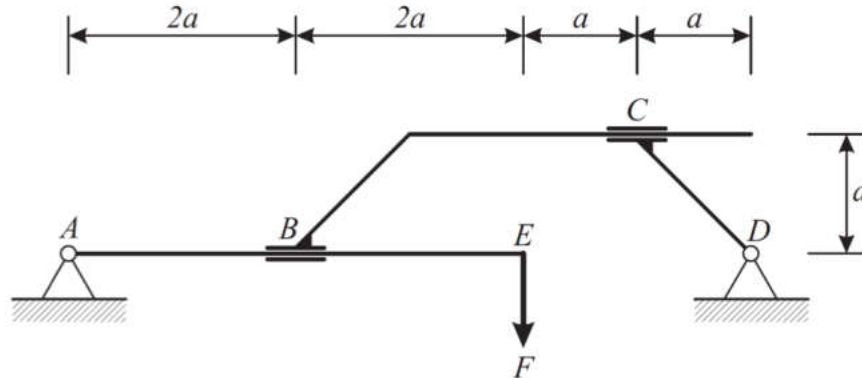
- "Ein System aus starren Teilen ist genau dann statisch bestimmt, wenn es [...] weder statisch unbestimmt noch kinematisch unbestimmt ist."
 $\hookrightarrow$ aus Skript S.57
- Ein kinematisch unbestimmtes System kann nicht statisch bestimmt sein.
- Ein System kann gleichzeitig kinematisch und statisch unbestimmt sein.
- Aufpassen: nicht statisch bestimmt $\nleftrightarrow$ statisch unbestimmt
- Statisch überbestimmt (d.h. $f > 0$) $\Rightarrow$ kinematisch Unbestimmt.

impliziert
Achtung $\uparrow$ nicht $\Leftrightarrow$!

d.h. insbesondere: $f = n - b \neq 0 \nleftrightarrow$ nicht kinematisch unbestimmt

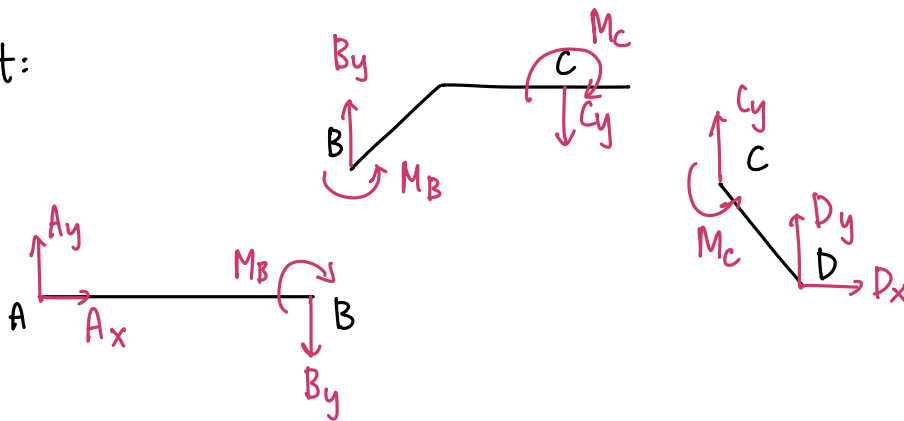
Beispielaufgabe 1: Serie 8, Aufgabe 1:

1. ¹ Das abgebildete ebene System besteht aus drei starren, gewichtslosen Balken. In den Punkten A und D sind die jeweiligen Balken reibungsfrei gelenkig gelagert. In den Punkten B und C befindet sich je ein langes Querlager. Balken BC ist fest mit dem langen Querlager in B verbunden und Balken CD ist fest mit dem langen Querlager in C verbunden. Im Punkt E greift die eingezeichnete Kraft vom Betrag F an.



1. Berechnen Sie die Lagerreaktionen in den Punkten A , B , C und D . Schneiden Sie dazu die drei starren Körper einzeln frei und stellen Sie die notwendigen Gleichgewichtsbedingungen auf.
2. Ist das System statisch unbestimmt? Geben Sie eine Begründung an.
3. Ist das System kinematisch unbestimmt? Geben Sie eine Begründung an.

Freischnitt:



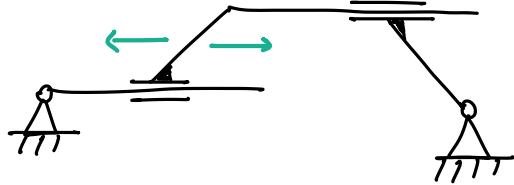
2) # GGW-Gleichungen: $n = 3 \cdot 3 = 9$

Bindungskräfte ($\hat{=}$ Unbekannte): $b = 8$

$f = 9 - 8 = 1 > 0 \rightarrow$ nicht statisch unbestimmt.

3) kann sich das System irgendwie bewegen? → Ja!

z.B. so:

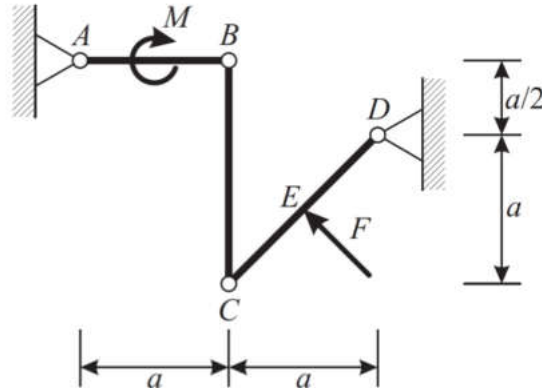


⇒ das System ist kinematisch unbestimmt.

Beispielaufgabe 2: Serie 8, Aufgabe 3

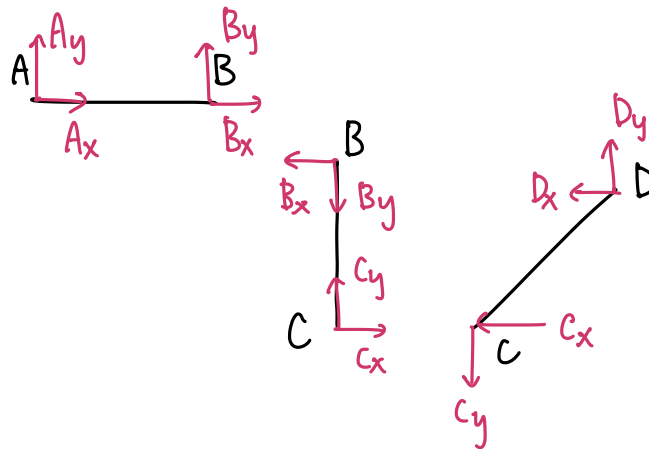
3. ³ Das skizzierte System besteht aus drei gewichtslosen Stäben AB , BC , CD . In A und D ist das System reibungslos gelenkig gelagert. In B und C sind die Stäbe reibungslos gelenkig miteinander verbunden. Am Stab AB greift ein Kräftepaar vom Betrag M an. Senkrecht in der Mitte E des Stabes CD greift eine Kraft vom Betrag F an. Der Betrag M des Kräftepaares sei gegeben und der Betrag F der Kraft sei unbekannt. Das System sei in Ruhe.

Annahmen: Ebenes System, Stäbe starr und gewichtslos, Lager reibungsfrei.



1. Ist das System statisch unbestimmt?
2. Ist das System kinematisch unbestimmt?
3. Bestimmen Sie die Lagerkräfte in D .
4. Bestimmen Sie den Betrag der Kraft F , sodass das System sich in Ruhe befindet.

Freischnitt:



1) # GGW-Bedingungen: $n = 3 \cdot 3 = 9$

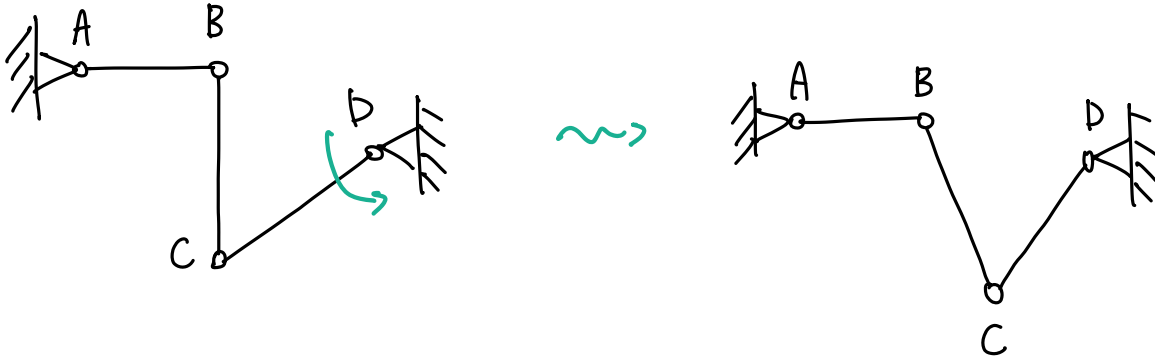
Unbekannte ($\hat{=}$ Bindungskräfte): $b = 8$

$$\rightarrow f = 9 - 8 = 1 > 0$$

$\Rightarrow$ Nein, das System ist nicht statisch unbestimmt.

2) kann sich das System irgendwie bewegen? $\rightarrow$ Ja!

z.B. so:

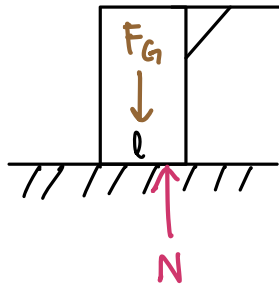


$\rightarrow$ Ja, das System ist kinematisch unbestimmt.

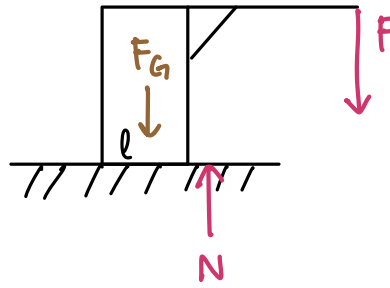
2. (nicht) Kippen:

Um zu prüfen, in welchem Fall ein Körper kippt, muss die Normalkraft mit der Ebene, auf die der Körper steht, eingeführt werden.

Damit der Körper nicht kippt, muss die Kraft innerhalb der Kontaktfläche / Standfläche angreifen:

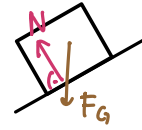
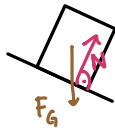
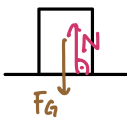


kippt nicht



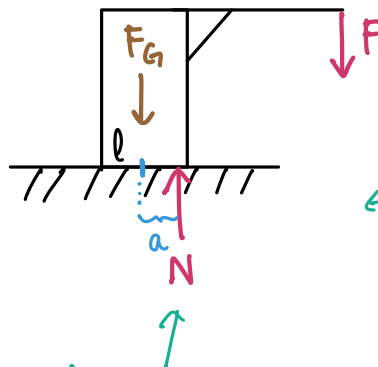
kippt !

Bem: Die Normalkraft N muss man immer senkrecht zur Auflagefläche einführen!



Doch wie können wir das (nicht) kippen berechnen?

Wir führen eine Abstandsvariable für N ein:



← Wir wissen effektiv (noch) nicht, wo genau N angreift!

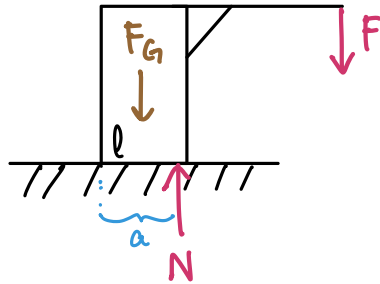
Dieses N wird auch auf eine bestimmte Weise eingeführt (wenn nicht schon gegeben)
→ werden wir im Bsp. sehen:)

Und wir stellen eine Bedingung für diese Abstandsvariable auf:

nicht kippen: $|a| \leq \frac{l}{2}$ wenn a wie oben eingeführt wurde*

* Wir dürfen die Variable beliebig einführen, doch dann muss man die Gleichung für (nicht) kippen entsprechend anpassen.

z.B. wenn wir es so einführen:



Dann ist die Bedingung für nicht kippen: $a \in [0, l]$

Zusatz: nützliche mathematische Eigenschaften für den Betrag:

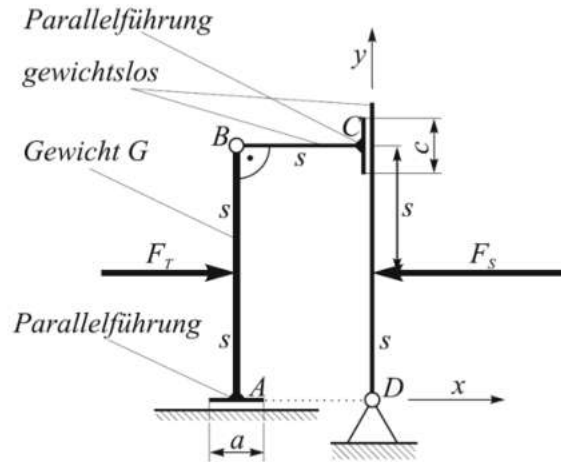
(wirst du evtl. brauchen bei nicht-kippen-Aufgaben)

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ (und $|a^n| = |a|^n$)
- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ (und $\left| \frac{1}{a^n} \right| = \frac{1}{|a|^n}$)
- $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
- $|a| \leq c \cdot |b| \Leftrightarrow a \in [-1, 1] \cdot c \cdot b$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

Beispielaufgabe: Serie 8, Aufgabe 4:

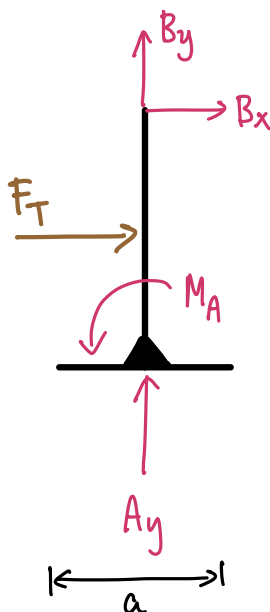
4. ⁴ Betrachten Sie das abgebildete System, das aus einem vertikal aufgestellten Balken AB (Länge $2s$) besteht, welcher im Punkt A über eine Parallelführung mit dem Boden verbunden ist. Im Punkt B wird der Balken BC reibungsfrei gelenkig mit AB verbunden. Die Konstruktion stützt sich im Punkt C auch über eine Parallelführung gegen den Balken CD ab. CD ist im Punkt D gelenkig gelagert. Alle Winkel der Konstruktion betragen 90° . Die Kräfte F_T bzw. F_S zeigen in bzw. parallel zur x -Richtung. Am Balken AB greift zusätzlich die Gewichtskraft in negative y -Richtung mit Betrag G an. BC und CD werden gewichtslos modelliert.



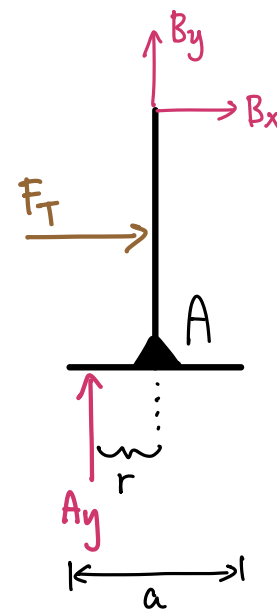
1. Ist das System statisch unbestimmt? Ist das System kinematisch unbestimmt?
2. Berechnen Sie die Lagerreaktionen in den Punkten A , B , C und D .
3. Wie muss das Verhältnis zwischen F_S und F_T gewählt werden, damit das System in Ruhe bleibt?
4. Wie gross sind die Längen a und c zu wählen, damit die Parallelführungen nicht kippen?

4) aus den vorherigen Teilaufgaben wissen wir:

$$M_A = -sF_T, \quad A_y = G, \quad M_C = 0$$



A_y und M_A durch
eine statisch
äquivalente Kraft
ersetzen
↳ Abstandvariable
einführen!



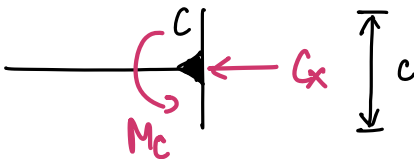
Das Moment im Punkt A ist nun: $M_A = -rA_y = -rG \stackrel{!}{=} -sF_T$

$$\Rightarrow r = \frac{sF_T}{G}$$

Bedingung für nicht kippen: $|r| \leq \frac{a}{2}$

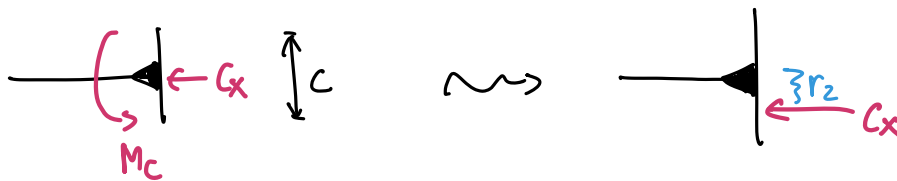
(A_y muss innerhalb vom Lager  angreifen, sonst kippt es!)

$$\Rightarrow \left| \frac{sF_T}{G} \right| \leq \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 2 \cdot \left| \frac{sF_T}{G} \right| \stackrel{\substack{\uparrow \\ F_T, G \geq 0}}{=} \underline{\underline{\frac{2sF_T}{G}}}$$

Lager bei C: 

$M_C = 0 \Rightarrow c$ darf beliebig klein gewählt werden

Warum? machen wir dasselbe wie für A:



$$M_C = -r_2 C_x = 0 \quad \rightarrow \quad r_2 = 0 \quad (\text{da } C_x \neq 0)$$


C_x greift genau in der Mitte an

$\hookrightarrow$ d.h. Lager kippt nicht, egal wie klein c ist :)

Heute werden wir keine neue Theorie besprechen, sondern wir werden uns hauptsächlich auf die Zwischenprüfung von nächster Woche vorbereiten.

Aufbau der heutigen Stunde:

1. kurze Besprechung / Tipps Serie 9
2. Informationen & Tipps zur Zwischenprüfung
3. Überblick des bisher behandelten Stoffs
4. Aufgaben aus alten Prüfungen lösen
5. Q & A session für weitere Fragen

1. Kurze Besprechung / Tipps Serie 9

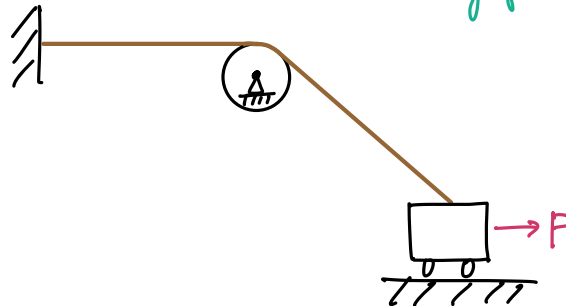
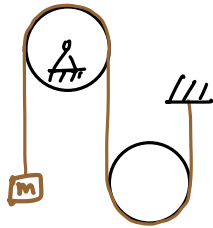
Reibungsfreie Umlenkungen:

In real-life:



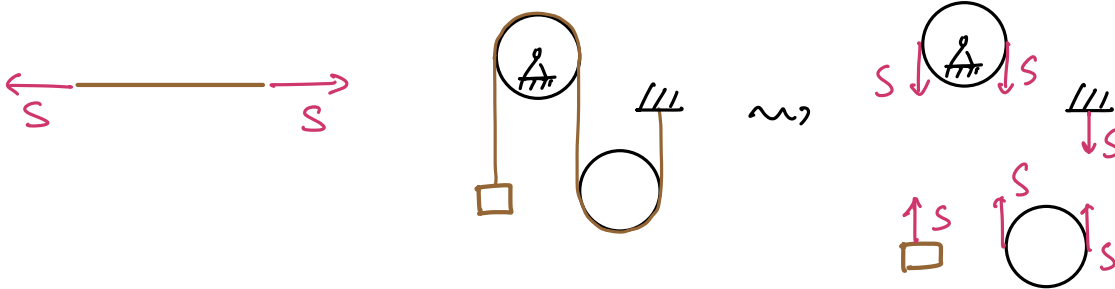
rollt reibungsfrei

in den Aufgaben:



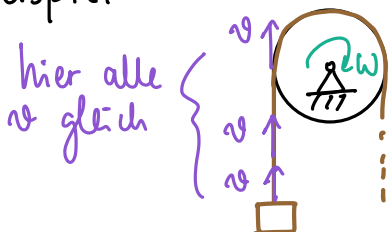
Seil:

- Seilkräfte sind an beiden Enden gleich gross:



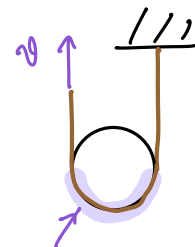
- Wenn das Seil gespannt & unverformt bleibt, dann sind dort die Geschwindigkeiten aller Punkte gleich.

Beispiel:



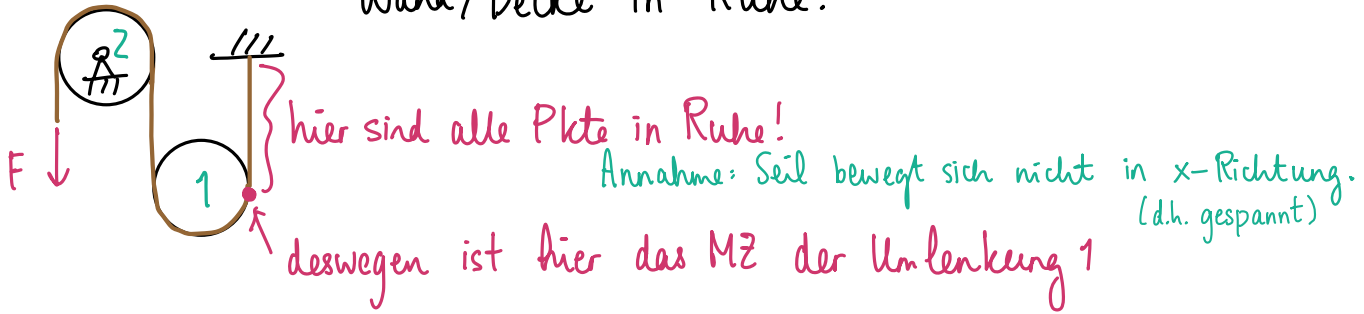
Annahme: keine Bewegung in x-Richtung

Gegenbeispiel:



die Geschwindigkeiten hier sind nicht alle gleich! (Seil biegt sich im Prozess)

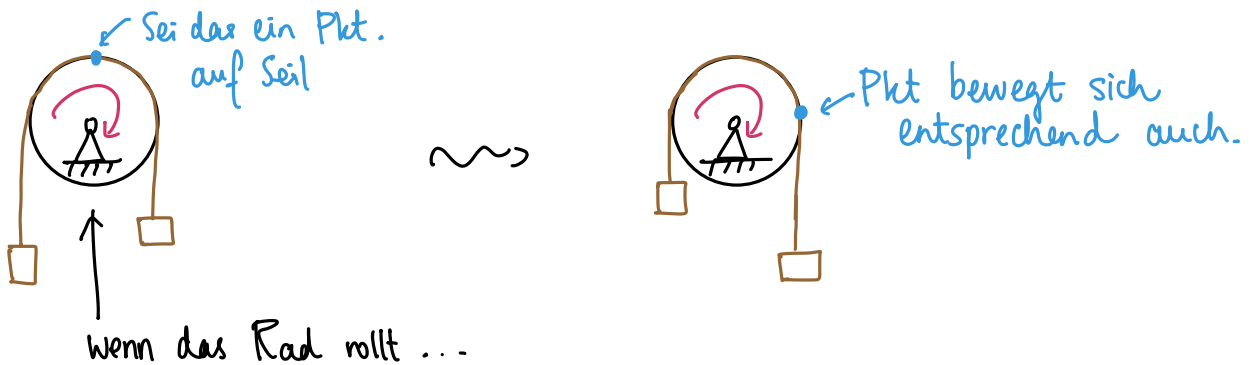
- Wenn ein Seil an der Wand / an die Decke angehängt ist, dann sind alle Pkte des Seils die direkt in Verbindung stehen mit der Wand / Decke in Ruhe.



⇒ so kann man z.B. das Momentanzentrum einer Umlenkung finden

Quiz: Wo ist das MZ der Umlenkung 2?

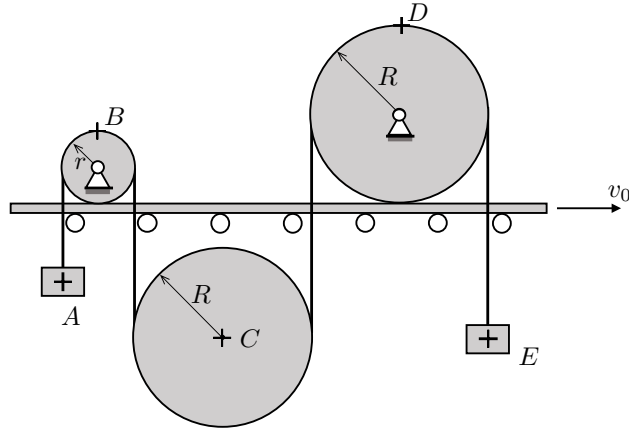
- Wenn ein Rad / eine Umlenkung rollt, dann "rollt" das Seil auch mit, d.h.



→ Weitere, Aufgabenspezifische Tipps auf Webseite "Tipps Serie 9"

Beispielaufgabe: Aufgabe 2 Serie 9

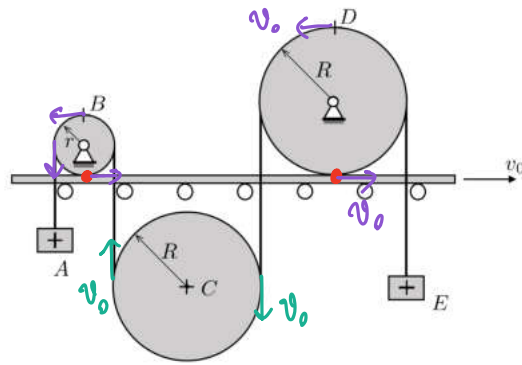
2. Zwei kreisförmige Scheiben mit den Radien r und R rollen ohne zu gleiten auf einem starren Band, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 bewegt. Um die beiden Scheiben sowohl um eine dritte Scheibe vom Mittelpunkt C und Radius R , ist ein undeformbares Seil gewickelt. Diese dritte Scheibe ist freitragend und frei beweglich. Jedes Ende des Seils ist, wie gezeigt, mit einem Teilchen verbunden.



Welche Aussage über die Schnelligkeiten der Punkte A bis E ist richtig?

Hinweis: Die Bedingung des Rollens ohne Gleiten setzt voraus, dass die Geschwindigkeiten der Körper im Behrührungspunkt gleich sein müssen.

- (a) $v_D = 2v_C$ und $v_B > v_D$
- (b) $v_A = v_B = v_C = v_D = v_E$
- ☒ (c) $v_A = v_B = v_D = v_E$ und $v_C = 0$
- (d) $v_B > v_C > v_A$ und $v_A = v_D$
- (e) $v_A = v_E$ und $v_B = v_D = v_C$



Rollen ohne gleiten $\rightarrow$ die roten Punkte müssen die gleiche Geschwindigkeit wie das Band haben (Kontaktpkt. Band & Rolle) $\rightarrow v_0$

Die Festlager sind Momentanzentren $\rightarrow$ SVM impliziert, dass $v_D = v_0$
und $v_B = v_0$

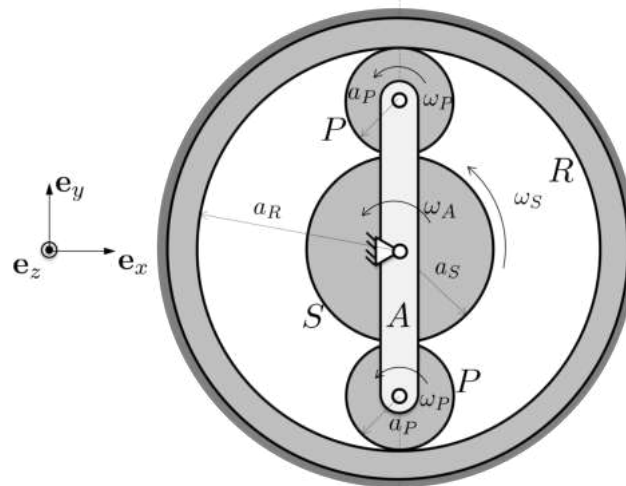
Da das Seil undeformierbar ist, gilt $v_A = v_0$ und $v_E = v_0$.

Außerdem erfordert /// , dass C das Momentanzentrum der freien Rolle ist
 $\rightarrow v_C = 0$

Somit ist $v_A = v_B = v_D = v_E = v_0$ und $v_C = 0 \Rightarrow c)$

Recap Kinematik: Aufgabe 1 Serie 9

1. Betrachten Sie das in der Abbildung skizzierte Planetengetriebe. Die Sonnen-, Planeten- und Hohlräder haben die Radien a_S , a_P bzw. a_R . Der Stab A verbindet die Mittelpunkte der beiden Planetenräder P . Das Hohlräder R ist feststehend, während das Sonnenrad S sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_S dreht.



1. Wie gross ist das Verhältnis $\frac{\omega_P}{\omega_S}$ zwischen den Winkelgeschwindigkeiten der Planetenräder und des Sonnenrades?

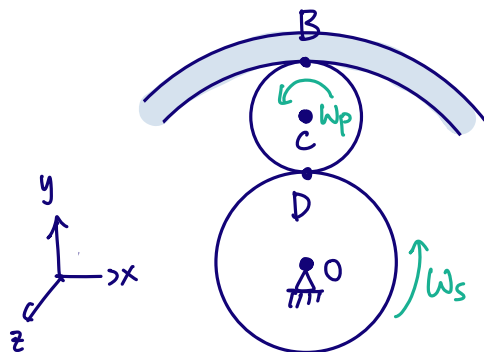
- (a) $\frac{\omega_P}{\omega_S} = -\frac{a_S}{2a_P}$
- (b) $\frac{\omega_P}{\omega_S} = \frac{2a_R}{a_P}$
- (c) $\frac{\omega_P}{\omega_S} = \frac{a_P}{2a_S}$
- (d) $\frac{\omega_P}{\omega_S} = \frac{a_S}{4a_P}$
- (e) $\frac{\omega_P}{\omega_S} = -\frac{a_S}{a_R + a_P}$

2. Wie gross ist das Verhältnis $\frac{\omega_P}{\omega_A}$ zwischen den Winkelgeschwindigkeiten der Planetenräder und des Stabes?

- (a) $\frac{\omega_P}{\omega_A} = 2$
- (b) $\frac{\omega_P}{\omega_A} = -1$
- (c) $\frac{\omega_P}{\omega_A} = -\frac{a_P}{a_P + a_S}$
- (d) $\frac{\omega_P}{\omega_A} = -\frac{a_P + a_S}{a_P}$
- (e) $\frac{\omega_P}{\omega_A} = \frac{2a_P}{a_P + a_S}$

Wegen Symmetrie: Betrachte nur (Die ω 's vom oberen & unteren Rad sind gleich)

1)



$$\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{\omega}_P \times \vec{r}_{DB} \quad (1) \quad \text{mit} \quad \vec{v}_D = \vec{\omega}_S \times \vec{r}_{OD} \quad (2)$$

Da das **Hohlrad** ist fest! $\rightarrow \vec{v}_B = \vec{0}$

$$\Rightarrow (2) \text{ in } (1) \text{ einsetzen: } \vec{v}_B = \vec{\omega}_S \times \vec{r}_{OD} + \vec{\omega}_P \times \vec{r}_{DB}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \omega_S \cdot \vec{e}_z \times r_{OD} \vec{e}_y + \omega_P \cdot \vec{e}_z \times r_{DB} \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x \quad \Leftrightarrow 0 = \omega_S \cdot r_{OD} \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_y) + \omega_P \cdot r_{DB} \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_y)$$

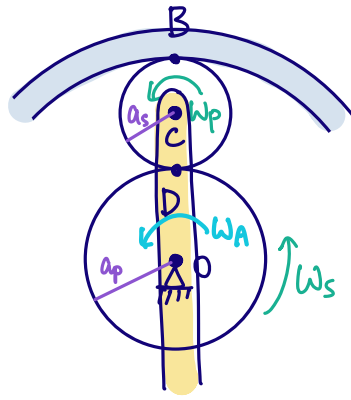
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow 0 = -\omega_S \cdot r_{OD} \vec{e}_x - \omega_P r_{DB} \vec{e}_x \quad / : \vec{e}_x$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\omega_S r_{OD} - \omega_P r_{DB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_S}{\omega_P} = -\frac{r_{DB}}{r_{OD}} = -\frac{2a_P}{\underline{\underline{a_S}}} \quad \Rightarrow \quad a)$$

2) Betrachte:

$$\frac{\omega_p}{\omega_A}?$$



MZ vom Balken = 0

SK-Formel

$$\Rightarrow \vec{v}_C = \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{OC} \quad (1) \quad \text{und} \quad \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_p \times \vec{r}_{BC} \quad / \vec{v}_B = 0 \text{ (MZ)}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}_C = \vec{\omega}_p \times \vec{r}_{BC} \quad (2)$$

(2) in (1) einsetzen

$$\Rightarrow \vec{\omega}_p \times \vec{r}_{BC} = \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{OC}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{OC} - \vec{\omega}_p \times \vec{r}_{BC} = \omega_A \vec{e}_z \times r_{OC} \vec{e}_y - \omega_p \vec{e}_z \times r_{BC} (-\vec{e}_y)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \omega_A r_{OC} (\vec{e}_z \times \vec{e}_y) + \omega_p r_{BC} (\vec{e}_z \times \vec{e}_y)$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\omega_A r_{OC} \vec{e}_x - \omega_p r_{BC} \vec{e}_x$$

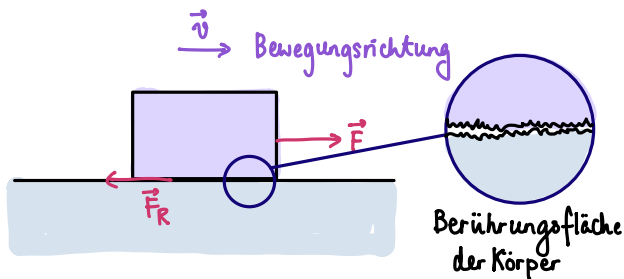
$$\Leftrightarrow \frac{\omega_p}{\omega_A} = -\frac{r_{OC}}{r_{BC}} = -\frac{a_s + a_p}{a_p} \Rightarrow d)$$

Theorie dieser Woche:

1. Reibung
 - 1.1 Haftreibung
 - 1.2 Gleitreibung
 - 1.3 Rollwiderstand ($\hat{=}$ Rollreibung)

1. Reibung:

Körper sind in der Realität nicht reibungsfrei, sondern es treten Reibungskräfte auf.



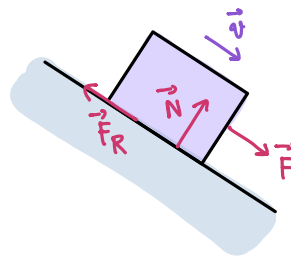
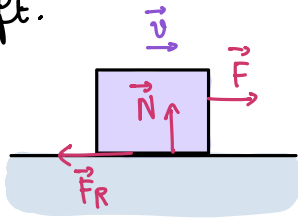
$\vec{F}$: Kraft, die die Bewegung hervorruft
 $\vec{F}_R$: Reibungskraft

Intuitiv: je grösser F_R , desto schwieriger ist es, den Klotz zu bewegen.

Was bedeutet das für uns?

→ Wenn in einer Aufgabe angegeben wird, dass Reibung stattfindet, müssen wir einfach auch die Reibungskräfte im Freischnitt einzeichnen & in den Berechnungen berücksichtigen.

Die Reibungskraft wirkt entgegen der Bewegungsrichtung und ist immer senkrecht zur Normalkraft.

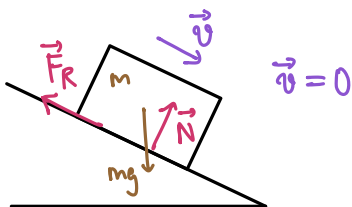


Wir unterscheiden zwischen Haftreibung, Gleitreibung und Rollreibung.

Bem: Reibungskräfte treten zw. 2 Körper auf.

1.1 Haftreibung:

Bei der Haftreibung findet keine Bewegung der Körper zueinander statt.



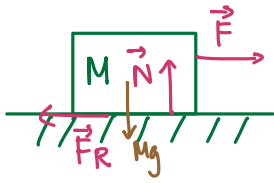
$$|\vec{F}_R| \leq \mu_0 |\vec{N}|$$

← Das ist die Bedingung, s.d. der Körper haftet!

μ_0 heisst Haftreibungskoeffizient.

Bem: Haften liefert uns eine zusätzliche Bedingung!

Bsp:

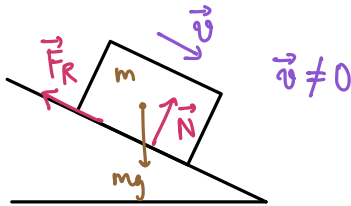


Sei $\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ Mg \end{pmatrix}$, $\vec{F}_R = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix}$. Wie gross muss μ_0 mind. sein, s.d. der Quader haftet?

Lö: haften: $|\vec{F}_R| \leq \mu_0 |\vec{N}| \Leftrightarrow F \leq \mu_0 Mg \Leftrightarrow \underline{\underline{\mu_0 \geq \frac{F}{Mg}}}$

1.2 Gleitreibung:

Bei der Gleitreibung bewegen sich die Oberflächen der Körper relativ zueinander. Dabei gleitet der Körper und erfährt eine konstante Reibungskraft.



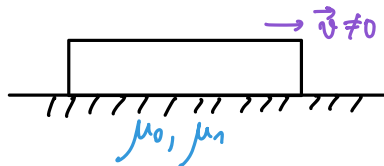
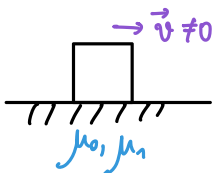
$$|\vec{F}_R| = \mu_1 |\vec{N}|$$

μ_1 heisst Gleitreibungskoeffizient.

Bem: Gleiten liefert eine zusätzliche Gleichung!

Zusatzinfos zu μ_0, μ_1 :

μ_0, μ_1 sind Materialeigenschaften. Sie sind unabhängig von $\vec{N}$ und der Grösse der Berührungsfläche. Es gilt $\mu_0, \mu_1 > 0$.



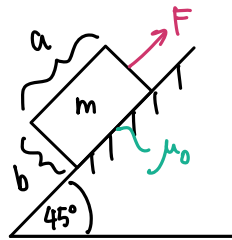
μ_0, μ_1 bleiben gleich!

Bsp. einige Haft- (μ_0) und Gleitreibungskoeffizienten (μ_1): (nicht prüfungsrelevant)

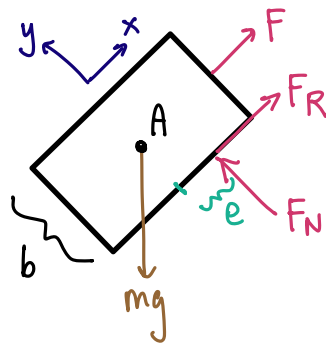
	μ_0	μ_1
Stahl - Stahl	0,1 ~ 0,5	0,1 ~ 0,4
Holz - Metall	0,5 ~ 0,65	0,2 ~ 0,5
Ski - Schnee	0,1 ~ 0,3	0,04 ~ 0,2

Beispielaufgabe 1: (von mir erstellt :))

Ein Quader liegt wie skizziert auf einer schiefen Ebene. Zwischen dem Quader und der Ebene herrscht Haftreibung mit Gleitreibungskoeffizient μ_0 . Eine Kraft F greift auf den Quader wie skizziert:



Schneide den Quader frei & führe alle an ihn angreifende Kräfte ein:



Stelle die Gleichgewichtsbedingungen auf:

$$\begin{cases} \text{KB}(x): 0 = F_R - \frac{\sqrt{2}}{2}mg + F & \dots \textcircled{1} \\ \text{KB}(y): 0 = F_N - \frac{\sqrt{2}}{2}mg & \dots \textcircled{2} \\ \text{MB}(A, z): 0 = eF_N + \frac{b}{2}F_R & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\text{und } |\vec{F}_R| \leq \mu_0 \cdot |\vec{F}_N|$$

Welche Bedingung muss F erfüllen, damit das System nicht zu gleiten beginnt?

Gleichungen auflösen: $\textcircled{1} \rightarrow F_R = \frac{\sqrt{2}}{2}mg - F$

$\textcircled{2} \Rightarrow F_N = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$ $\swarrow mg > 0$

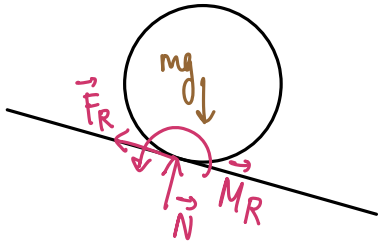
$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{2}}{2}mg - F \right| \leq \mu_0 \cdot \left| \frac{\sqrt{2}}{2}mg \right| \Leftrightarrow -\mu_0 \frac{\sqrt{2}}{2}mg \leq \frac{\sqrt{2}}{2}mg - F \leq \mu_0 \frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

$$\Leftrightarrow -\mu_0 \frac{\sqrt{2}}{2}mg - \frac{\sqrt{2}}{2}mg \leq -F \leq \mu_0 \frac{\sqrt{2}}{2}mg - \frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

$$\Leftrightarrow \mu_0 \frac{\sqrt{2}}{2}mg + \frac{\sqrt{2}}{2}mg \geq F \geq -\mu_0 \frac{\sqrt{2}}{2}mg + \frac{\sqrt{2}}{2}mg \Rightarrow F \in \frac{\sqrt{2}}{2}mg(1 + [-1, 1]\mu_0)$$

1.3 Rollwiderstand ($\hat{=}$ Rollreibung):

Rollreibung tritt auf, wenn ein Körper über einen anderen Körper rollt. Sie ist auch entgegen der Bewegung gerichtet. Wichtig: Rollreibung ist ein **Moment**!



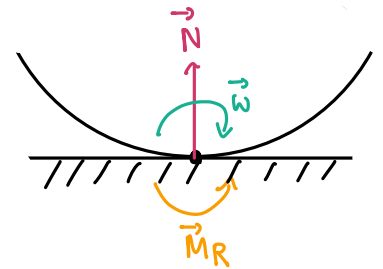
$\vec{M}_R$ beschreibt das Rollmoment.

Beim Rollen unterscheiden wir auch zw. Körper in Ruhe & in Bewegung (relativ zueinander.)

im Fall der Ruhe: $|\vec{M}_R| \leq \mu_2 \cdot |\vec{N}|$ (auch "Haftreibung")

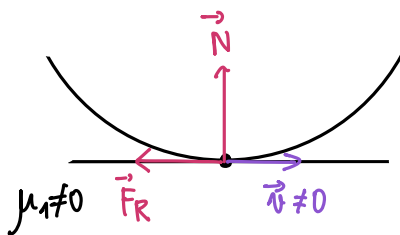
im Fall der Bewegung: $|\vec{M}_R| = \mu_2 \cdot |\vec{N}|$ (auch "Gleitreibung")

Vektoriell: $\vec{M}_R = -\mu_2 \cdot |\vec{N}| \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$



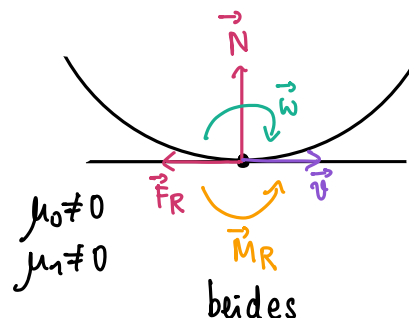
μ_2 heißt Rollwiderstandslänge / Rollreibungslänge

Achtung: Passt auf, Haften / Gleiten nicht mit Rollwiderstand $\textcircled{2}$ zu verwechseln! Lest die Aufgabenstellungen genau & schaut, was man einführen muss und was nicht.
V.a: tritt nur Reibung oder auch Rollwiderstand auf?



nur Reibung

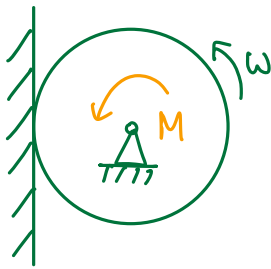
(Wenn das Rad nicht rollt oder wenn $\mu_2 = 0$)



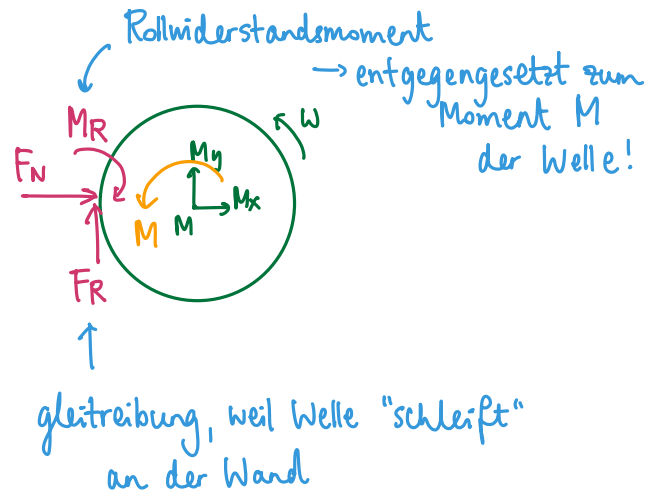
beides

(Rad rollt und hat $\mu_2 \neq 0$ und haftet / gleitet gleichzeitig.)

Bsp: Rotierende Welle an einer Wand:

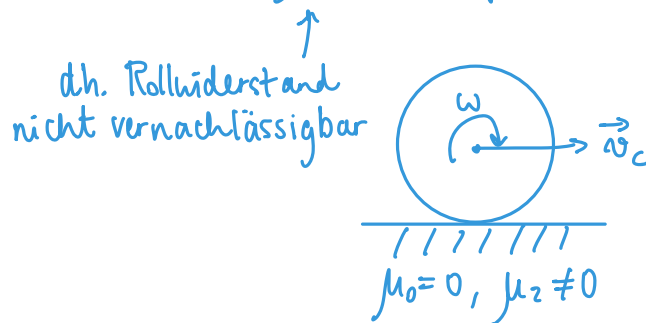


freischnitt



Good to know : Eine Berührung ist ideal rau, wenn $\mu_0 = \infty$, $\mu_z = 0$.

Quiz: Ist rollen (mit $\mu_z \neq 0$) ohne gleiten auf einer Oberfläche mit $\mu_0 = 0$ möglich?



=> Ja!

→ genauer: Bsp. im Skript S.71 unten ~ S.72 oben

Alles auf einen Blick:

kein Rollen:

Haften: $|\vec{F}_R| \leq \mu_0 |\vec{N}|$
 $\mu_0 = \text{Haftreibungskoeffizient}$

Gleiten: $|\vec{F}_R| = \mu_1 |\vec{N}|$
 $\mu_1 = \text{Gleitreibungskoeffizient}$

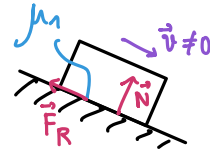
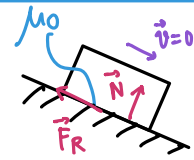
Rollen:

im Fall der Ruhe: $|\vec{M}_R| \leq \mu_2 |\vec{N}|$

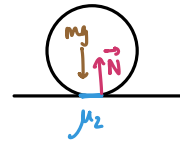
im Fall der Bewegung: $|\vec{M}_R| = \mu_2 |\vec{N}|$
 $\mu_2 = \text{Rollwiderstandslänge / Rollreibungslänge}$

zusätzliche Bedingung

zusätzliche Gleichung



$$\Delta \vec{F}_R \perp \vec{N}$$



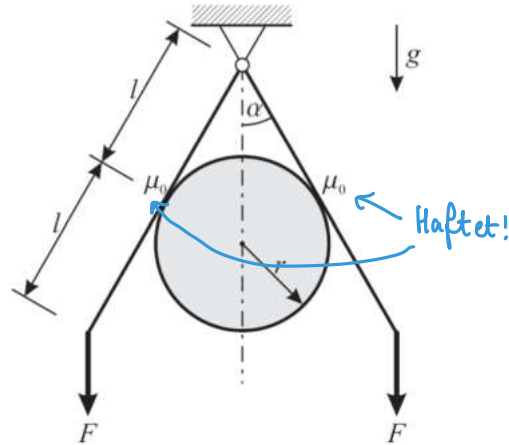
Kochrezept Aufgaben mit Reibungskräften:

1. System freischneiden & geeignetes Koordinatensystem einführen.
2. Lagerkräfte einzeichnen (inkl. Normalkräfte → Abstandsvariable nicht vergessen!)
3. Reibungs- & Rollwiderstandskräfte als unbekannte Größen einführen:
Entgegen der zur erwartenden Bewegungsrichtung (wenn nicht klar, dann egal) und Senkrecht zur Normalkraft.
4. Gleichgewichtsbedingungen aufstellen (Gleiten liefert zusätzliche Gleichungen!)
5. Diskussion (über Wertebereich von μ_0, μ_1, μ_2 , über gewisse Kräfte usw.)

↳ schauen wir uns das anhand eines Beispiels an! :)

Beispielaufgabe: Aufgabe 1 Serie 10

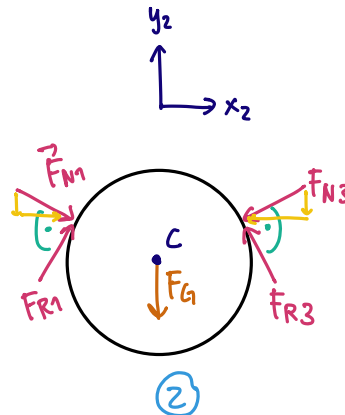
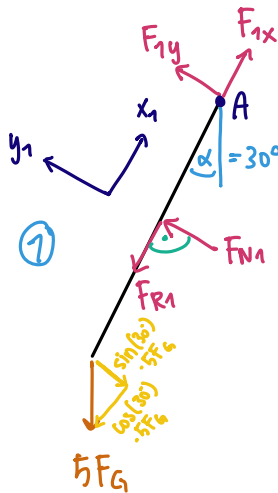
1. Eine Kugel mit dem Gewicht F_G wird von zwei um $\alpha = 30^\circ$ geneigten gewichtslosen Platten laut Abbildung festgehalten. Die dabei aufgewendeten Kräfte vom Betrag F seien $5F_G$.



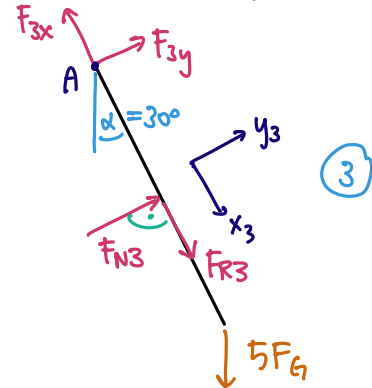
1. Wie gross muss der zwischen Platte und Kugel auftretende Haftreibungskoeffizient μ_0 mindestens sein, damit die Kugel nicht hinunterfällt?

Hinweis: Der Rollwiderstand ist vernachlässigbar.

1. freischneiden:



führt für jeden SK ein passendes Koordinatensystem ein!
→ macht das Leben einfacher :)



2. GGW- Bedingungen:

SK ①: $\sum \mathcal{M}_A(x): 0 = F_{1x} - \cos(30^\circ) \cdot 5F_G - F_{R1} = F_{1x} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5F_G - F_{R1} \quad \dots \textcircled{1}$

$\sum \mathcal{M}_A(y): 0 = F_{1y} + F_{N1} - \sin(30^\circ) \cdot 5F_G = F_{1y} + F_{N1} - \frac{5}{2} F_G \quad \dots \textcircled{2}$

$\sum \mathcal{M}_A(z): 0 = -l \cdot F_{N1} - l \cdot \sin(30^\circ) \cdot 5F_G = -l F_{N1} + 2l \cdot \frac{5}{2} F_G \quad \dots \textcircled{3}$

$$\text{SK ②: } \text{KB}(x): 0 = -F_{3x} + F_{R3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5F_G \quad \dots ④$$

$$\text{KB}(y): 0 = F_{3y} + F_{N3} - \frac{5}{2} F_G \quad \dots ⑤$$

$$\text{MB}(C, z): 0 = l \cdot F_{N3} - 2l \cdot \frac{5}{2} F_G \quad \dots ⑥$$

$$\text{SK ③: } \text{KB}(x): 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} F_{N1} + \frac{1}{2} F_{R1} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{N3} - \frac{1}{2} F_{R3} \quad \dots ⑦$$

$$\text{KB}(y): 0 = -\frac{1}{2} F_{N1} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R1} - \frac{1}{2} F_{N3} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R3} - F_G \quad \dots ⑧$$

$$\text{MB}(A, z): 0 = r F_{R3} - r F_{R1} \quad \dots ⑨$$

3. nach F_{R1} und F_{N1} auflösen:

$$\text{③} \Rightarrow l F_{N1} = 2l \cdot \frac{5}{2} F_G \quad / : l$$

$$F_{N1} = 5F_G$$

$$\text{⑨} \Rightarrow F_{R3} = F_{R1}$$

$$\text{⑦} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} F_{N1} + \frac{1}{2} F_{R1} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{N3} - \frac{1}{2} F_{R3} = 0 \quad / \quad F_{R3} = F_{R1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} F_{N1} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{N3} = 0$$

$$\Leftrightarrow F_{N1} = F_{N3}$$

$$\text{⑧} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} F_{N1} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R1} - \frac{1}{2} F_{N3} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R3} - F_G \quad / \quad F_{R3} = F_{R1}, \quad F_{N3} = F_{N1}$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2} F_{N1} - \frac{1}{2} F_{N1} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R1} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{R1} - F_G \quad / \quad F_{N1} = 5F_G$$

$$\Leftrightarrow 0 = -5F_G + \sqrt{3} F_{R1} - F_G \quad \Leftrightarrow \sqrt{3} F_{R1} = 6F_G \quad \Leftrightarrow F_{R1} = 2\sqrt{3} F_G$$

4. Bedingung für Haften aufstellen:

$$|F_{R1}| \leq \mu_0 |F_{N1}| \quad (= |F_{R3}| \leq \mu_0 |F_{N3}| \text{ aus Symmetriegründen})$$

$$|2\sqrt{3} F_G| \leq \mu_0 |5F_G| \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ F_G \text{ ist } > 0 \text{ (Betrag)}}}{2\sqrt{3} F_G} \leq \mu_0 5F_G \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mu_0 \geq \frac{2\sqrt{3}}{5}}}$$

Theorie dieser Woche:

Dynamik:

1. Beschleunigung
2. kinematische Relationen
3. Feder
4. Impuls
5. Newton'sches Bewegungsgesetz ($\hat{=}$ Impulssatz)
6. Differenzialgleichungen

Bemerkung zum Begriff "Dynamik"

Dynamik:

Definition in Physik:

Dynamik (Physik)

Die **Dynamik** (*altgriechisch* δύναμις „Kraft“) ist das Teilgebiet der **Mechanik**, das sich mit der Wirkung von **Kräften** befasst. In der **Physik** wird unter Dynamik die Beschreibung der **Bewegung** von Körpern in ihrer Abhängigkeit von den einwirkenden Kräften verstanden.

Im allgemeineren Sinn bezeichnet Dynamik in der Physik das (zeitliche) Verhalten eines **dynamischen Systems** und der **Bewegungsgleichungen**, die ihm zugrunde liegen.

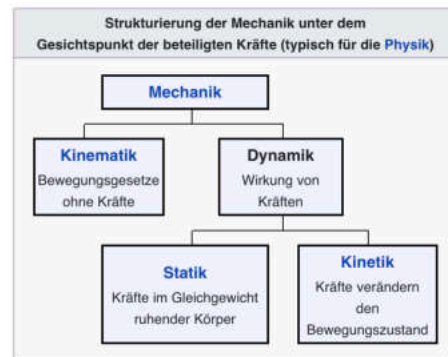
Es existieren unterschiedliche Einteilungen der Dynamik.

Inhaltsverzeichnis [Verbergen]

- 1 Physik
- 2 Technische Mechanik
- 3 Begriffsgeschichte
- 4 Weblinks
- 5 Einzelnachweise

Physik [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

In der Physik wird die Dynamik eingeteilt in die **Statik**, die den Fall des **Kräftegleichgewichts** behandelt (unbeschleunigte Körper) und in die **Kinetik**, die sich mit beschleunigten Körpern befasst. Im Unterschied dazu beschränkt sich die **Kinematik** als weiteres Gebiet der Mechanik auf eine geometrische Beschreibung der Bewegungen, ohne dabei Kräfte zu berücksichtigen.



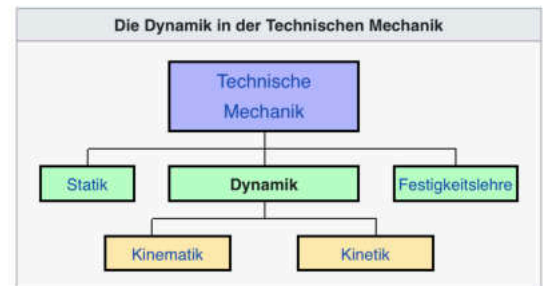
Definition in TechMech:

Technische Mechanik [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

In der **Technischen Mechanik** wird die Dynamik als Lehre von den Bewegungen fester Körper verstanden. Mit Gasen und Flüssigkeiten befasst sich dagegen die **Fluidodynamik**. In der Technischen Mechanik wird die Dynamik meist eingeteilt in^{[1][2][3]}

- die **Kinematik**, die keine Kräfte berücksichtigt, sondern nur geometrisch die Bahnen der bewegten Körper beschreibt und
- die **Kinetik**, die auch Kräfte berücksichtigt.

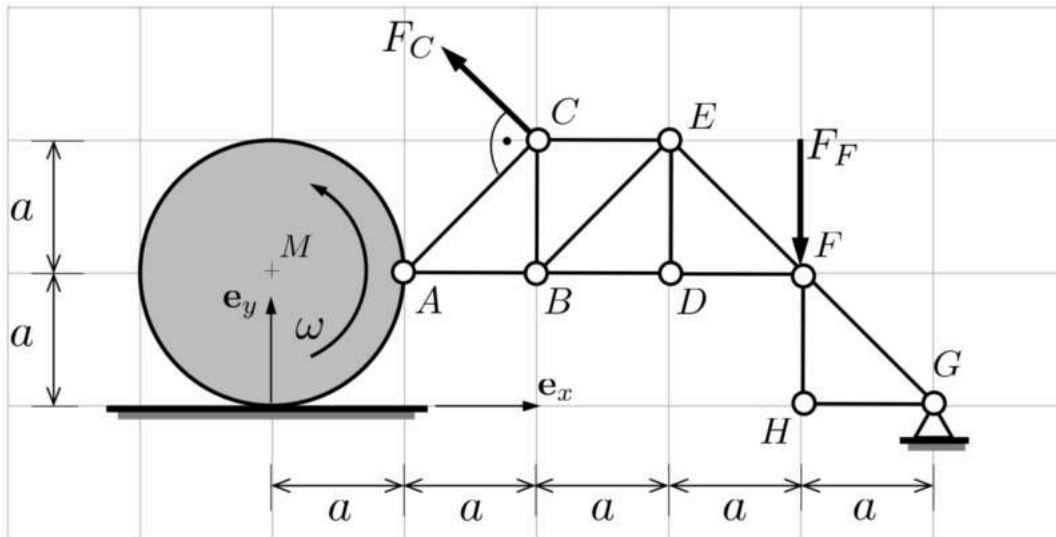
Die Dynamik ist somit neben der Statik und der **Festigkeitslehre** eines der drei Hauptgebiete der Technischen Mechanik. Zum Teil wird auch die Auffassung vertreten, dass die Dynamik aus den beiden Gebieten der Statik und der Kinetik besteht,^{[4][5][6]} die entsprechenden Werke sind jedoch bei allen Autoren in drei Bände oder Kapitel unterteilt, von denen je eines die Statik und die Festigkeitslehre behandeln und ein weiteres Kinetik und Kinematik. Zum Teil werden diese Bände als *Dynamik* bezeichnet, teils auch als *Kinetik* und *Kinematik*^[7] oder nur *Kinetik*^[8] bezeichnet. Zu den Inhalten zählen die Kinematik und Kinetik von einzelnen Punktmassen, von mehreren Punktmassen und von starren Körpern sowie **Schwingungen**. Wenn in Problemstellungen die **Trägheitskräfte** mit einbezogen werden, lassen sie sich mit Methoden der Statik lösen. Insofern baut die Dynamik methodisch auf der Statik auf und wird daher erst nach der Statik gelehrt.^{[9][10]}



↳ D.h. also: In der Dynamik sind die Körper im Gegensatz zur Statik nicht in Ruhe, sondern bewegen sich!

Ab Heute bis Ende Semester: Dynamik! :)

Das System sei nun wie in der Figur belastet, wobei die Kraft $\mathbf{F}_F = -F\mathbf{e}_y$ gegeben ist.



MuLö:

6. Finden Sie die Kraft $\mathbf{F}_C$, die senkrecht auf dem Stab AC gerichtet ist, so dass sich das System in Ruhe befindet. [2 Punkte]

Wir finden die Geschwindigkeit im Punkt F als

$$\mathbf{v}_F = \sqrt{2}a\omega \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_C = F_C \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Nun können wir den PdVL anwenden:

$$\tilde{P} = \mathbf{F}_C \cdot \mathbf{v}_C + \mathbf{F}_F \cdot \mathbf{v}_F = 0 \quad (10)$$

$$F_C \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}a\omega \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \omega a\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

$$F_C \frac{\sqrt{2}}{3}a\omega + F\omega a = 0 \quad (12)$$

$$\Rightarrow F_C = -\frac{3}{\sqrt{2}}F \Rightarrow \mathbf{F}_C = \frac{3}{\sqrt{2}}F \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}F \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Viele haben die Aufgabe so gelöst:

für die Ruhelage muss gelten: $\vec{R} = 0, \vec{M} = 0$. $\vec{F}_c = \begin{pmatrix} F_{cx} \\ F_{cy} \end{pmatrix}$, $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} F$

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{F}_c + \vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_{cx} \\ F_{cy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} F_{cx} \\ F_{cy} - F \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_{cx} = 0, F_{cy} = F \Rightarrow \vec{F}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

Warum ist das falsch?

Hauptsatz der Statik:

In einer Ruhelage eines Systems müssen alle (äusseren) Kräfte im Gleichgewicht sein:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{M}_O = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

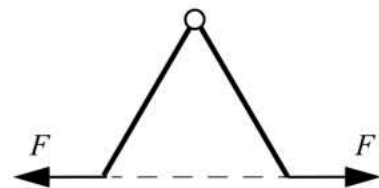
Beweis:

Wir betrachten virtuelle Starrkörperbewegungen mit Kinematiken der Form $\{\tilde{\mathbf{v}}_O, \tilde{\omega}\}$. Aus dem PdvL (2.15) schliessen wir, dass in einer Ruhelage

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_O + \mathbf{M}_O \cdot \tilde{\omega} = 0, \forall \{\tilde{\mathbf{v}}_O, \tilde{\omega}\}$$

gelten muss. Dabei können $\tilde{\mathbf{v}}_O$ und $\tilde{\omega}$ unabhängig voneinander frei gewählt werden. Wenn jeweils nur eine Komponente verschieden von null gesetzt wird, so kann auf das Verschwinden der entsprechenden Komponente von $\mathbf{R}$ und $\mathbf{M}_O$ geschlossen werden. ■

! **Achtung:** Dieser Satz ist für Systeme (und deformierbare Körper) nur eine *notwendige* Bedingung, d.h.: die Bedingung kann erfüllt sein, ohne dass das System in Ruhe sein muss. Die skizzierten Kräfte am «Zirkel» sind im Gleichgewicht, aber der Mechanismus wird sich bewegen.



Für einen *starrten Körper* gilt auch die Umkehrung des Hauptsatzes der Statik. Der Beweis dieses Satzes mit Hilfe des PdvL ist aber sehr aufwendig. Wir behelfen uns deshalb mit einem Zusatzpostulat zum PdvL, welches einen einfachen Beweis des Satzes erlaubt.

Warum wird es in der Mulö mit dem PdvL gelöst?

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):

Ein System befindet sich **genau dann** in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet (und die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen).

⇒ (d.h. diese Bedingung ist notwendig & hinreichend.)

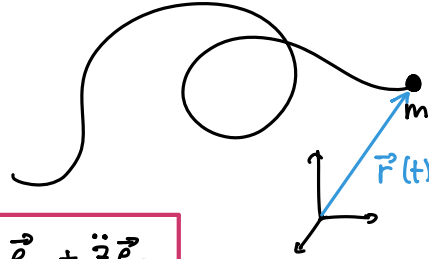
Man hätte auch die KB und MB für alle drei SK einzeln (d.h. insgesamt 9 Gleichungen) aufstellen & auflösen können. Doch das wäre hier sehr kompliziert geworden (man hätte auch alle Bindungskräfte berücksichtigen müssen usw.) & ehrlich gesagt fast unmöglich.

→ PdvL geht sehr schnell & einfach in diesem Fall! :)

1. Beschleunigung:

Die Beschleunigung gibt an, wie schnell sich die Geschwindigkeit eines Körpers ändert. Sie ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit (bzw. 2. Ableitung der Bewegungsfkt.)

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$



In kartesischen Koordinaten: $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z$

In ebenen Polarkoordinaten: $\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

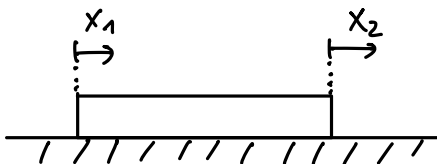
Falls r konstant ist:
(z.B. bei einem Pendel)

$$\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

$$\vec{a} = -\rho \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

2. kinematische Relationen

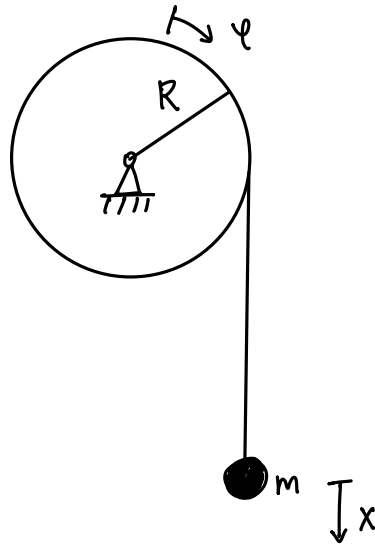
Wenn wir mehr Koordinaten haben als Freiheitsgrade, sind die Koordinaten voneinander abhängig. Man sagt, dass diese Koordinaten eine kinematische Relation haben. Unsere Aufgabe ist es, Gleichungen aufzustellen, welche diese Relationen beschreiben:



$$x_1 = x_2$$

Oft treten kinematische Relationen bei Rollen auf:

Allgemein:

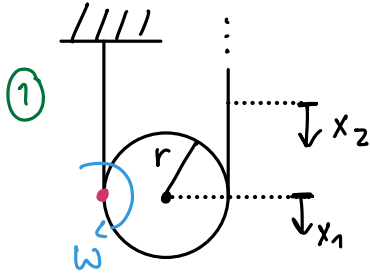


$$x = R \cdot \psi$$

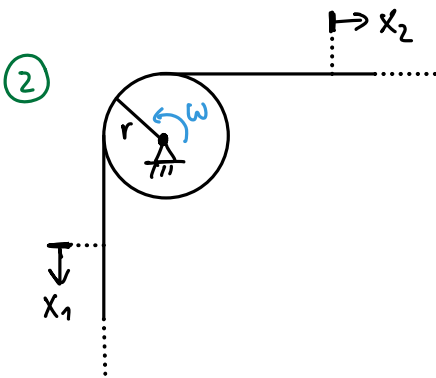
Bem: $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \omega$

$\omega = \text{Kreisfrequenz} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \dot{\psi}$
 $\hat{=}$ Rotationsgeschwindigkeit

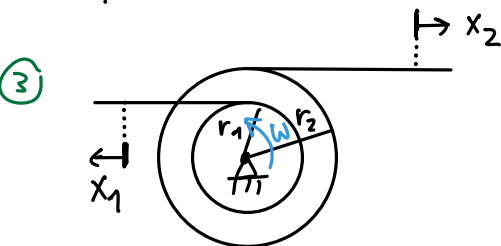
Beispiele: Bestimme die kinematischen Relationen:



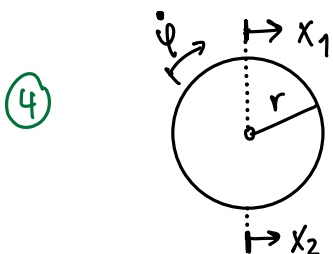
$$\omega = \frac{\dot{x}_1}{r} = \frac{\dot{x}_2}{2r} \Rightarrow \dot{x}_2 = 2\dot{x}_1$$



$$\omega = \frac{\dot{x}_1}{r} = -\frac{\dot{x}_2}{r} \Rightarrow \dot{x}_1 = -\dot{x}_2$$



$$\omega = \frac{\dot{x}_1}{r_1} = -\frac{\dot{x}_2}{r_2} \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{r_2}{r_1} \dot{x}_1$$



$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - r\dot{\psi}$$

3. Feder

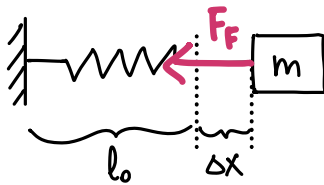
Wir zeichnen sie so



Eine Feder ist ein Bauteil, dass sich elastisch verformen lässt: 



Wenn sie gezogen / gedrückt wird, übt sie eine Kraft in die entgegengesetzte Richtung aus. ("Sie will in die ursprüngliche Lage zurück"). Diese Kraft kann man nach dem Hookeschen Gesetz bestimmen:

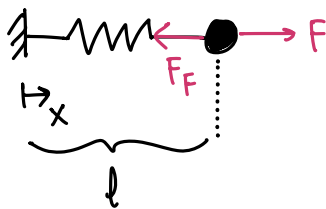


$$F_{\text{Feder}} = \pm k \cdot \Delta x$$

Vorzeichen: je nach dem in welche Richtung man das Pfeil eingezeichnet hat.

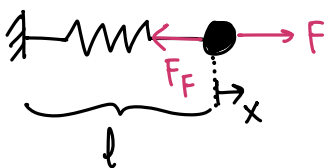
k : Federkonstante: gibt an, wie "steif" eine Feder ist (gegeben).
 Δx : Auslenkung

Aufpassen, wo die Ruhelage und wo die Koordinate ist:



Ruhelage bei $x=0 \rightarrow F_F = k \cdot x$

Ruhelage bei $x=l \rightarrow F_F = k \cdot (x - l)$

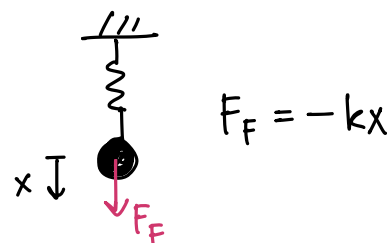
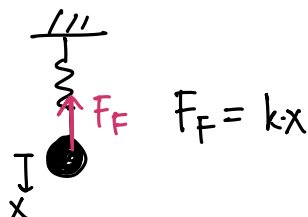


Ruhelage bei $x=-l \rightarrow F_F = k \cdot (l + x)$

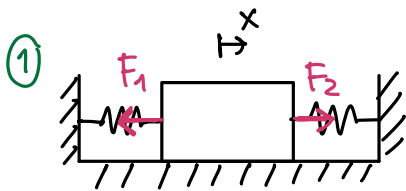
Ruhelage bei $x=0 \rightarrow F_F = k \cdot x$

Aufpassen mit dem Vorzeichen:

Ruhelage bei $x=0$:



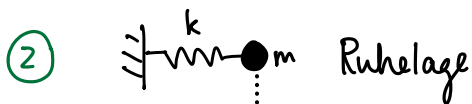
Beispiele: Im folgenden haben alle Feder die Federkonstante k .



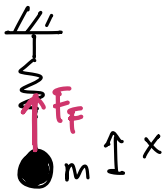
$$F_1 = kx$$

$$F_2 = -kx$$

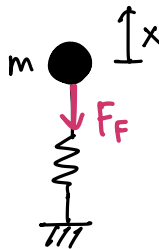
beide Feder sind in ihrer Ruhelage.



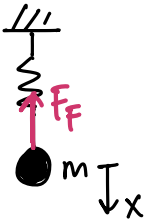
$$F_F = k \cdot (x_1 - x_0) = k \cdot l_0$$



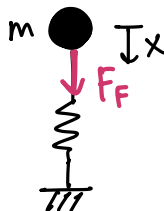
$$F_F = -kx$$



$$F_F = kx$$

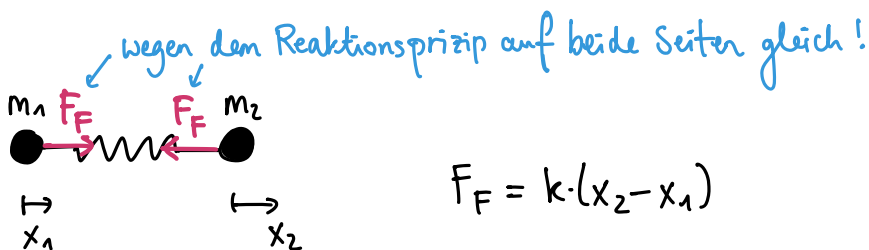


$$F_F = +kx$$



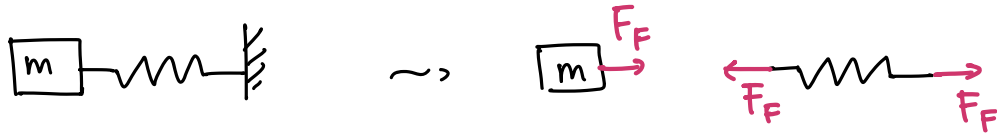
$$F_F = -kx$$

④



$$F_F = k \cdot (x_2 - x_1)$$

Wichtig!: Beim Freischneiden einer Feder sind die Kräfte auf ihre beiden Enden gleich gross (wegen dem Reaktionsprinzip von Newton)



Wichtig!: Federn verringern den Freiheitsgrad eines Systems nicht.

4. Impuls

Der Impuls ist folgendermassen definiert: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Sie beschreibt die "Wucht" oder der "Schwung" eines Körpers.

5. Das Newton'sche Bewegungsgesetz ($\hat{=}$ Impulssatz)

In der Dynamik sind die Körper im Gegensatz zur Statik nicht in Ruhe, sondern bewegen sich. Daher führen wir neue Gleichung ein:

$$m \vec{a} = \vec{R}$$

oder

$$\frac{d}{dt} m \vec{v} = \dot{\vec{p}} = \vec{R}$$

m = Masse

$\vec{a}$ = Beschleunigung

$\vec{R}$ = Resultierende, $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$

$\vec{p} = m \vec{v}$ = Impuls

und der Drallsatz: $\vec{M}_0 = \dot{\vec{L}}_0$ (nächste Woche genauer)

Diese Gleichungen heissen **Bewegungsgleichung** und es sind Differenzialgleichungen.

Da es sich um physikalische Systeme handelt, haben diese Gleichungen auch gewisse Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \quad (\hat{=} \text{Werte zum Zeitpunkt } t=0)$$

Diese werden wir auch brauchen, um die DGL's komplett lösen zu können.

Bem: Falls mehrere Körper/Massepunkte gegeben sind, muss man für jeden Massepunkt das Newton'sche Bewegungsgesetz und Anfangsbedingungen aufstellen.

6. Differenzialgleichungen → "Crash Course DGL" auf meine Webseite anschauen :)

Um diese DGL's zu lösen gibt es Lösungsansätze, die in der Prüfung meistens gegeben sind.

Der folgende Ansatz kommt sehr häufig vor:

Falls die DGL in diese Form umgeformt werden kann:

die Werte vor dem x einfach mit ω^2 ersetzen

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g \quad g \in \mathbb{R}$$

nichts vor der
2. Ableitung

⚠ ω ist die Kreisfrequenz

Dann löst dieser Ansatz die DGL:

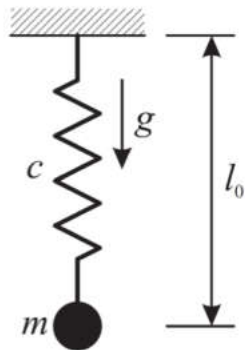
$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}$$

Wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind, die durch das Einsetzen der Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen. g und ω sind Konstanten, die durch die DGL bestimmt sind. Nach dem Bestimmen von c_1 und c_2 können wir die Werte für ω und g einsetzen und das ist unsere Lösung :)

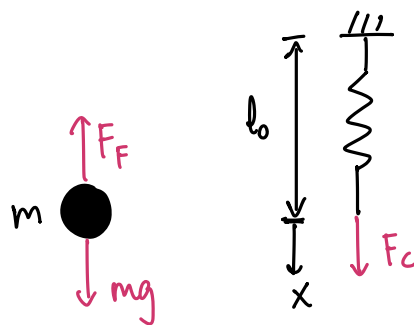
↳ Schauen wir uns das anhand eines Beispiels an !

Beispielaufgabe: Serie 11, Aufgabe 1

1. ¹ Ein Massenpunkt (Masse m) hängt an einer Feder. Diese ist in vertikaler Lage am oberen Ende befestigt. Die Federkonstante ist c und die Feder besitzt die ungespannte Länge l_0 . Finde die Bewegung des Massenpunktes, wenn dieser bei ungespannter Feder aus der Ruhe losgelassen wird.



1. Nehmen Sie an, dass die Feder während der Bewegung vertikal bleibe und führen Sie in einer allgemeinen Lage die Kräfte am Massenpunkt ein.



l_0 : Länge der ungespannten Feder

2. Formulieren Sie das Newtonsche Bewegungsgesetz und finden Sie die Bewegungsdifferentialgleichung.

$$m\ddot{x} = mg - F_F$$

$$\text{mit } F_F = cx \quad (\text{Feder ist ungespannt wenn } x=0)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = mg - cx$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + cx = mg \quad / \div m$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = g$$

Tipp: die höchste Ableitung Koeffizientenfrei machen.

3. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für die Bewegung des Massenpunktes.

$$\text{DGL: } \ddot{x} + \frac{c}{m}x = g$$

$$\text{Anfangswerte: } \begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{wird aus der Ruhe losgelassen (Ruhe = Geschwindigkeit 0)})$$

4. Bestimmen Sie die Bewegung des Massenpunktes. Dieser führt eine Schwingung aus. Wie gross sind die Amplitude und die Kreisfrequenz dieser Schwingung?

Schnelle Methode:

$$\text{DGL: } m\ddot{x} + cx = mg \quad / \div m$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = g \quad / \text{definiere } \boxed{\omega^2 = \frac{c}{m}}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g \quad / \text{DGL hat die Form wie oben gezeigt!}$$

Wir wenden den Ansatz $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}$ an:

$$\text{Anfangsbedingungen einsetzen: } x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) + \frac{g}{\omega^2} = c_1 + \frac{g}{\omega^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow c_1 = -\frac{g}{\omega^2}$$

$$\dot{x}(0) = -\omega c_1 \sin(0) + \omega c_2 \cos(0) = \omega c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\text{Unsere Lösung ist also } x(t) = -\frac{g}{\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t)) \quad / \text{wir setzen wieder} \\ &= \frac{mg}{c} (1 - \cos(\sqrt{\frac{c}{m}} t)) \quad \omega^2 = \frac{c}{m} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \\ &\quad \text{ein (Bem: } \omega \geq 0) \end{aligned}$$

$$\text{Amplitude: } \underline{\underline{-\frac{mg}{c}}}$$

$$\text{Kreisfrequenz: } \underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}}}$$

Bem: $x(t) = A \cos(\omega t)$

↑
Amplitude

↖ Kreisfrequenz

kann man aus der Gleichung ablesen.

Ausserdem: i.A. ist $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ die Kreisfrequenz bei einem Federschwinger.

Ausführliche Methode:

unser AWP: $\begin{cases} \ddot{x}(t) + \frac{c}{m}x(t) = g & \leftarrow \text{DGL} \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 & \leftarrow \text{Anfangsbedingungen} \end{cases}$

1) als erstes schauen wir uns die entsprechende homogene Gleichung an:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$ in DGL einsetzen:

$$(e^{\lambda t})'' + \frac{c}{m}e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{c}{m}e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2 + \frac{c}{m}\right)e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Char}(\lambda): \lambda^2 + \frac{c}{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -\omega^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{\underbrace{-\omega^2}_{<0!}} = \pm i\sqrt{\omega^2} = \pm i\omega \quad \rightarrow \lambda \text{ ist komplex.}$$

Schwingungsfrequenz



$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

werdet ihr in Physik 1 genauer sehen warum

Das Fundamentalsystem ist also: $Ae^{+i\omega t}, Be^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow x_h(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

$$= A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + B(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$$

$$= (A+B)\cos(\omega t) + i(A-B)\sin(\omega t) \quad / \text{ definiere } \begin{matrix} \tilde{A} = A+B \\ \tilde{B} = i(A-B) \end{matrix} \text{ beide } \in \mathbb{R}$$

$$= \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t)$$

(weil wir sind nur an reelle Lösungen interessiert (es beschreibt ein physikalisches System!))

2) partikuläre Lösung bestimmen

$$\text{Inhomogenität} = g \quad \rightarrow \text{Ansatz} = x_p(t) = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{in DGL einsetzen: } (\alpha)'' + \frac{c}{m}\alpha = g$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{m}\alpha = g \quad \Rightarrow \alpha = \frac{mg}{c}$$

$$3) \text{ allgemeine Lösung: } x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t) + \frac{mg}{c}$$

4) Mittels AB die Koeffizienten $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ bestimmen:

$$x(0) = \tilde{A} + \frac{mg}{c} = 0 \quad \Rightarrow \tilde{A} = -\frac{mg}{c}$$

$$\dot{x}(0) = \tilde{B} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } x(t) = -\frac{mg}{c}\cos(\omega t) + \frac{mg}{c} = \frac{mg}{c} \cdot (1 - \cos(\omega t)) \quad / \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{mg}{c} \cdot (1 - \cos(\sqrt{\frac{c}{m}} t))}}$$

Theorie dieser Woche:

1. Massenmittelpunktsatz
2. Bewegungen von rotierenden Körpern beschreiben:
 - 2.1 Drall
 - 2.2 Drallsatz
 - 2.3 Drallsatz für ebene Rotationen von Starrkörpern
 - 2.4 Massenträgheitsmoment ($\hat{=}$ Inertialmoment)
3. Zusammenfassung der heutigen Theorie & allg. Vorgehen Dynamikaufgaben



Letzte Woche haben wir den Newton'schen Bewegungsgesetz kennengelernt:

$$\boxed{m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}} = \vec{R}} \quad (\hat{=} \text{Impulssatz, } \dot{\vec{p}} = \vec{R} \quad \text{wobei } \vec{p} = m\vec{v})$$

Diese Formel gilt für alle Massepunkte. ($\hat{=}$ materieller Punkt).

Nun wollen wir auch Bewegungssätze haben, welche für beliebige starre oder deformierbare Körper gelten: der **Massenmittelpunktsatz** und der **Drallsatz**.

1. Massenmittelpunktsatz: Um Bewegungen von Körpern zu beschreiben:

$$\boxed{m\vec{a}_c = \vec{R}}$$

$\vec{a}_c$: Die Beschleunigung vom Massenmittelpunkt c .

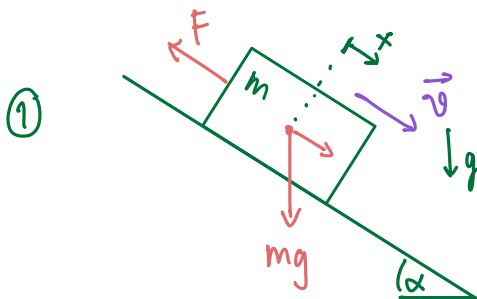
(Erinnerung: Massenmittelpunkt $\hat{=}$ geometrischer Schwerpunkt wenn Masse homogen)

↑
immer der Fall in TechMech :)

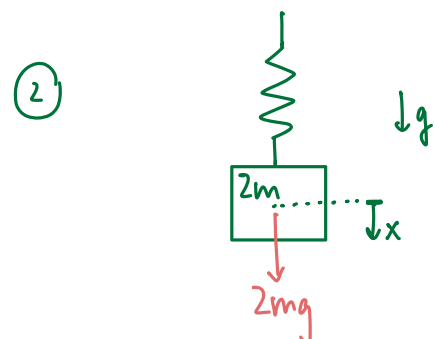
$\vec{R}$: Resultierende aller Kräfte (komponenten), die eine Auswirkung auf $\vec{a}_c$ haben.

Anwendung: In TechMech benutzen wir den Massenmittelpunktsatz gleich wie das Newton'sche Bewegungsgesetz. (Nur die Herleitung ist anders).

Beispiele:



$$m\vec{a}_c = m\ddot{\vec{x}} = mg \cdot \sin(\alpha) - F$$



$$m\vec{a}_c = m\ddot{\vec{x}} = 2mg - F_s$$

2. Drallsatz:

2.1 Drall:

Der Drall (bzw. Drehimpuls) ist eine physikalische Grösse, welche den Bewegungszustand eines rotierenden starren Körpers bestimmt. Sie beschreibt sozusagen den "Schwung" der Rotation. Den Drall kann man bezüglich eines inertialen Punktes (d.h. ein Punkt in Ruhe) O oder bezüglich des Massenmittelpunktes bestimmen:

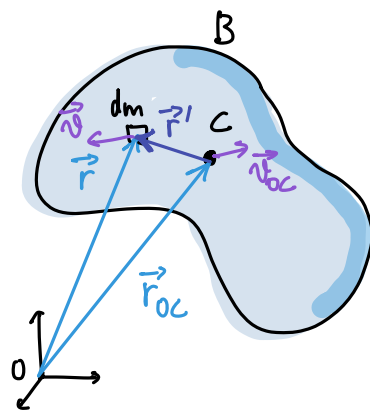
Bezüglich inertialer Punkt O :

$$\vec{L}_O = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v} \, dm$$

Bezüglich Massenmittelpunkt C :

$$\vec{L}_C = \iiint_B \vec{r}' \times \vec{v}' \, dm$$

keine Angst ihr müsst den Drall nie berechnen.
Es ist aber gut zu wissen wie sie definiert ist :)



$$\text{mit } \vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_{OC}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{OC}$$

Transformationsregel für den Drall:

Wie beim Moment gibt es für den Drall auch eine Transformationsregel:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times \vec{p} + \vec{L}_C$$

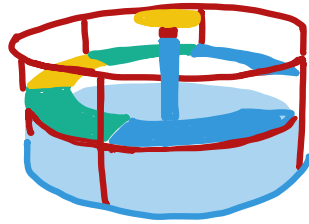
Drall bezüglich O
($\hat{=}$ Punkt in Ruhe)

Drall bezüglich Massenmittelpunkt

2.2 Drallsatz:

Der Drallsatz ist ein physikalisches Gesetz, das besagt, dass zur Änderung des Drehimpulses eines Körpers ein Drehmoment an ihm aufgebracht werden muss.

z.B. Wenn wir ein Spielplatzkarussell haben:



Um diesen Karussell in Drehung zu versetzen, muss man es anstossen ($\hat{=}$ ein Moment aufbringen, das dem Karussell Drehimpuls zuführt). Um die Drehung aufzuheben muss man wieder ein Moment in Gegenrichtung aufbringen, um den Drehimpuls zu verändern und es zum anhalten zu bringen. (Das machen in der realen Welt Reibungsmomente im Lager und der Luftwiderstand).

Die mathematische Formulierung dieses Gesetzes lautet wie folgt:

Drallsatz bezüglich des inertialen Punktes O:

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{\text{tot}}$$

zeitliche Ableitung!

Drallsatz bezüglich des Massenmittelpunktes C:

$$\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^{\text{tot}}$$

($\hat{=}$ relativer Drallsatz)

Bem: Den Drallsatz kann man "nur" bezüglich 2 Punkte aufstellen!

2.3 Drallsatz für ebene Rotationen von Starrkörpern:

Bei ebenen Rotationen kann der Drall und folglich auch der Drallsatz vereinfacht werden:

Drallsatz bezüglich O: $\dot{L}_O = I_O \dot{\omega} = I_O \ddot{\varphi} = M_O^{\text{tot}}$ (Drall: $L_O = I_O \omega$)

Drallsatz bezüglich C: $\dot{L}_C = I_C \dot{\omega} = I_C \ddot{\varphi} = M_C^{\text{tot}}$ (Drall: $L_C = I_C \omega$)

wobei I_O bzw. I_C der Massenträgheitsmoment ist.

⚠ Der Drall und das Moment müssen in dieselbe Richtung positiv gerechnet werden.

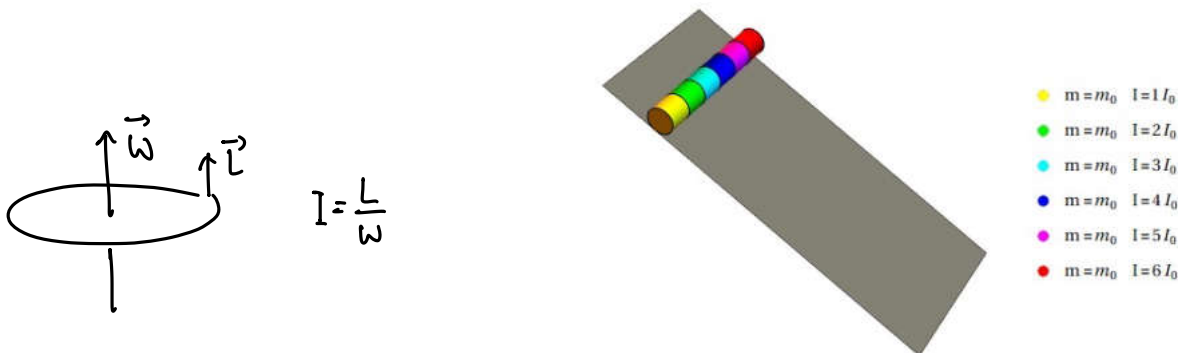
2.4 Massenträgheitsmoment ($\hat{=}$ Inertialmoment):

bezüglich O: $I_O = \iint_B r^2 dm$

bezüglich C: $I_C = \iint_B r'^2 dm$

keine Angst, müsst ihr nie berechnen in TechMech

Sie gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Rotationsgeschwindigkeit bei der Drehung um eine gegebene Achse an. Sie ist abhängig von der Geometrie und Masse des Körpers.

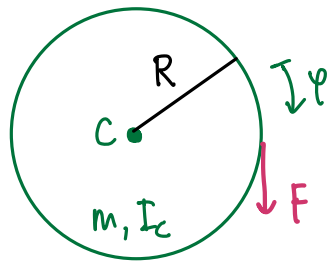


Bem: Das Massenträgheitsmoment ist bei einer ebenen SK-Bewegung konstant.

↳ Grund warum wir aus dem Drall $L_O = I_O \omega$ den Drallsatz $\dot{L}_O = I_O \dot{\omega}$ erhalten :)

Beispiele:

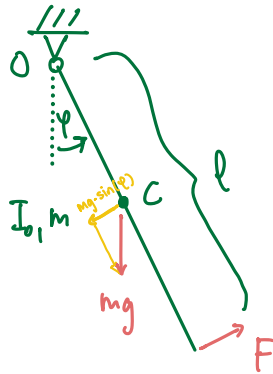
①



$$\dot{L}_c = I_c \ddot{\psi} = M_c = RF$$

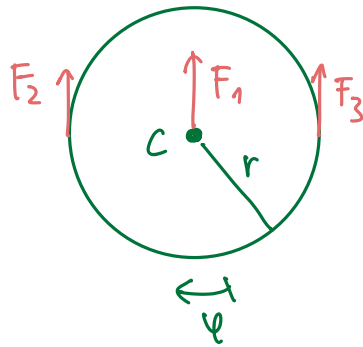
Drall und Moment in dieselbe Richtung positiv rechnen!

②



$$\dot{L}_0 = I_0 \ddot{\psi} = M_0 = lF - \frac{l}{2} mg \sin(\psi)$$

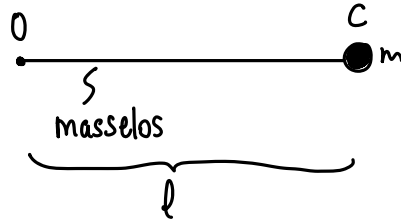
③



$$\dot{L}_c = I_c \ddot{\psi} = M_c = rF_2 - rF_3$$

Einige Massenträgheitsmomente: (in der Regel werden sie auch in der Aufgabe angegeben)

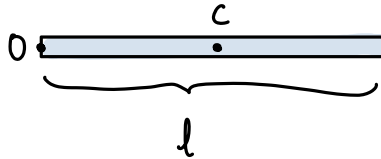
Massenpunkt:



$$I_C = 0$$

$$I_O = ml^2$$

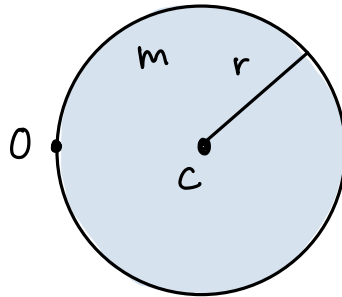
Balken:



$$I_C = \frac{1}{12} ml^2$$

$$I_O = \frac{1}{3} ml^2$$

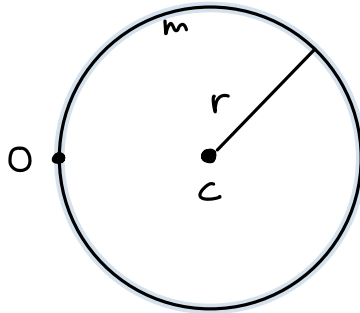
Kreisscheibe:



$$I_C = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I_O = \frac{3}{2} mr^2$$

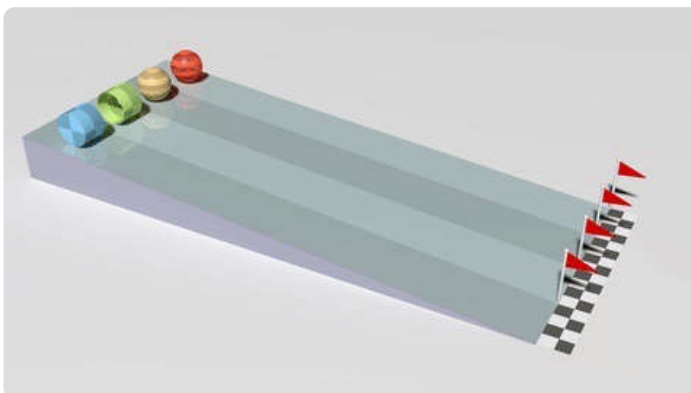
Infinitesimal
dünner Ring:



$$I_C = mr^2$$

$$I_O = 2mr^2$$

Bem: Der Massenträgheitsmoment eines aus homogenen Teilen zusammengesetzten Körpers ist die Addition der einzelnen Massenträgheitsmomente.



Four objects with identical masses and radii racing down a plane while rolling without slipping.

From back to front:

- spherical shell,
- solid sphere,
- cylindrical ring, and
- solid cylinder.

The time for each object to reach the finishing line depends on their moment of inertia. (OGV version)

3. Zusammenfassung der heutigen Theorie & allg. Vorgehen Dynamikaufgaben:

Massenpunkte: Newton'scher Bewegungsgesetz $m\vec{a} = \vec{R} = \dot{\vec{p}}$ auch: Impulssatz

Starre & deformierbare Körper:

Impulssatz: $\dot{\vec{p}} = \vec{R} \xrightarrow{m\vec{r}_c = \iiint_B \vec{r} dm}$ Massenmittelpunktsatz $m\vec{a}_c = \vec{R}$

Drallsatz:

bezüglich 0 $\dot{\vec{L}}_0 = \vec{M}_0$

bezüglich C $\dot{\vec{L}}_c = \vec{M}_c$

wobei $\vec{L}_0 = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v} dm$

wobei $\vec{L}_c = \iiint_B \vec{r}' \times \vec{v}' dm$

Ebene Rotationen von starren Körpern:

Drallsatz:

bezüglich 0: $\dot{L}_0 = I_0 \dot{\omega} = I_0 \ddot{\varphi} = M_0^{\text{tot}}$

Drall: $L_0 = I_0 \omega$

bezüglich C: $\dot{L}_c = I_c \dot{\omega} = I_c \ddot{\varphi} = M_c^{\text{tot}}$

Drall: $L_c = I_c \omega$

$\hookrightarrow$ in TechMech: Massenmittelpunkt = geom. Schwerpunkt

Wichtig: Der Drall und das Moment müssen in dieselbe Richtung positiv gerechnet werden.

wobei $I_0, I_c =$ Massenträgheitsmoment ($\hat{=}$ Inertialmoment):

bezüglich 0: $I_0 = \iint_B r^2 dm$

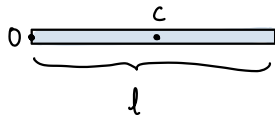
bezüglich C: $I_c = \iint_B r'^2 dm$

Beispiele Massenträgheitsmoment:



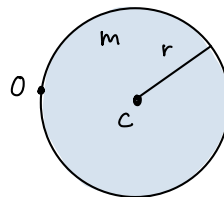
$$I_c = 0$$

$$I_0 = ml^2$$



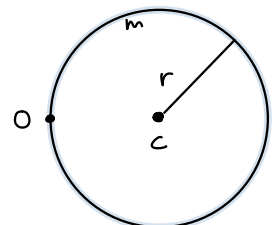
$$I_c = \frac{1}{12} ml^2$$

$$I_0 = \frac{1}{3} ml^2$$



$$I_c = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I_0 = \frac{3}{2} mr^2$$



$$I_c = mr^2$$

$$I_0 = 2mr^2$$

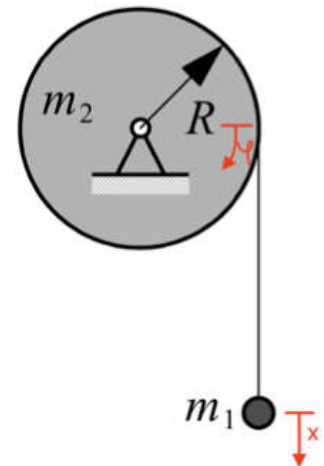
Vorgehen Dynamikaufgaben:

1. Identifiziere die allgemeine Lage, die unterschiedlichen Starrkörper und deren Verbindungen
2. Freischnittsskizze für die einzelnen Starrkörper (von der allgemeinen Lage) erstellen:
 - (a) Körper freischneiden und Verbindungskräfte (z.B. Seilkräfte) einführen
 - (b) alle externen Kräfte einführen
 - (c) geeignetes Koordinatensystem für jeden Körper einführen. Koordinaten sollten in die Richtung zeigen, in den sich der Körper bewegen wird. Der Ursprung dieser Koordinaten sollte in der Skizze deutlich erkennbar sein (wichtig für Anfangsbedingungen).
 - (d) Freiheitsgrad ermitteln, falls danach gefragt ist

3. Newtonsches Bewegungsgesetz für jeden Körper, Drallsatz für jeden *rotierenden* Körper aufstellen

$$\underline{R} = m \underline{a} \quad \& \quad M_O = \dot{L}_O = I_O \ddot{\varphi}$$

4. Bei System mit mehreren Körpern: Kinematische Relationen aufstellen → Zusammenhang zwischen den einzelnen Variablen der unterscheidlichen Körpern finden. Häufig gilt: $x = R\varphi$ (siehe Skizze rechts)



5. Anfangsbedingungen aufstellen (um später die Integrationskonstanten zu bestimmen)

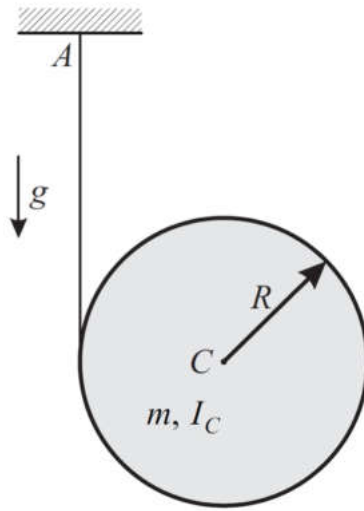
$$x(0) = \dots \quad \& \quad \dot{x}(0) = \dots \quad \text{oder} \quad \varphi(0) = \dots \quad \& \quad \dot{\varphi}(0) = \dots$$

6. DGL lösen - mithilfe von Lösungsansatz oder bei einfachen DGLs durch Integration
7. Anfangsbedingungen in Lösungen der DGL einsetzen und Integrationskonstanten bestimmen

↪ aus Theorieblätter von Felix Stadler

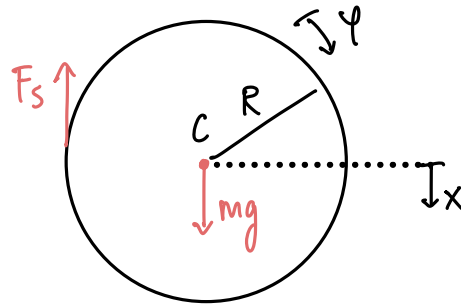
Beispielaufgabe: Serie 12 Aufgabe 1

1. ¹Eine Jo-Jo-Spule (Masse m , Radius R , Trägheitsmoment in Achsenrichtung im Massenmittelpunkt $I_C = mR^2/2$) ist mit einem vertikalen Faden in A aufgehängt und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe losgelassen. Die Spule ist mit genügend Faden umwickelt.



1. Stellen Sie alle zur Bestimmung der Bewegung und der Fadenkraft nötigen Gleichungen auf.

Freischnitt:



Koordinaten einführen!

Massenmittelpunktsatz: $ma_c = m\ddot{x} = R = mg - F_S \quad \text{--- (1)}$

Drallsatz bezüglich Massenmittelpunkt C (ebene Rotation): $\dot{L}_c = I_c \ddot{\psi} = M_c$
 $\Leftrightarrow I_c \ddot{\psi} = RF_S \quad \text{--- (2)}$

Kinematische Relationen: $x = R\psi$

Wir wollen (1) und (2) reduzieren in eine Gleichung (weil System hat Freiheitsgrad 1
 $\Rightarrow$ Bewegung kann durch 1 Gleichung beschrieben werden!)

$$\textcircled{1} + \frac{\textcircled{2}}{R} : m\ddot{x} + \frac{I_c \ddot{\varphi}}{R} = mg - F_s + F_s \quad / \text{ lin. Relation: } \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + \frac{I_c \ddot{x}}{R^2} = mg$$

$$\Leftrightarrow \left(m + \frac{I_c}{R^2}\right) \ddot{x} = mg \quad / \quad I_c = \frac{mR^2}{2} \text{ einsetzen}$$

$$\Leftrightarrow \left(m + \frac{m}{2}\right) \ddot{x} = mg$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} = mg \quad / \div m \quad / \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3} g$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } \begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

2. Bestimmen Sie die Bewegung und die Fadenkraft für die gegebenen Anfangsbedingungen.

$$\text{DGL: } \ddot{x} = \frac{2}{3} g$$

$$\Leftrightarrow \int \ddot{x} dt = \int \frac{2}{3} g dt$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = \frac{2}{3} gt + v_0$$

$$\Leftrightarrow \int \dot{x} dt = \int \frac{2}{3} gt + v_0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} gt^2 + v_0 t + x_0$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } \begin{aligned} x(0) &= x_0 \stackrel{!}{=} 0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = \frac{1}{3} gt^2}}$$

Fadenkraft: aus ①: $m\ddot{x} = mg - F_S$

$$\Leftrightarrow F_S = mg - m\ddot{x} \quad / \quad \ddot{x} = \left(\frac{1}{3}gt^2\right)'' = \left(\frac{2}{3}gt\right)' = \frac{2}{3}g$$

$$F_S = mg - \frac{2}{3}mg = \underline{\underline{\frac{1}{3}mg}}$$

3. Wie viel Zeit vergeht, bis die Spule um $10R$ gefallen ist?

Sei t_1 die Zeit, wenn die Spule um $10R$ gefallen ist.

$$\Rightarrow x(t_1) = \frac{1}{3}gt_1^2 \stackrel{!}{=} 10R$$

$$\Leftrightarrow t_1^2 = 10R \cdot \frac{3}{g}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{t_1 = \sqrt{\frac{30R}{g}}}}$$

4. Vergleichen Sie diese Zeit mit derjenigen für den freien Fall.

Freier Fall: $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$

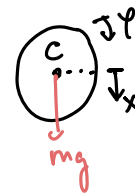
(Herleitung (freiwillig)):

Sei t_2 die Zeit, wenn die Spule um $10R$ gefallen ist im freien Fall:

$$x(t_2) = \frac{1}{2}gt_2^2 \stackrel{!}{=} 10R$$

$$\Leftrightarrow t_2^2 = \frac{20R}{g} \quad \Leftrightarrow t_2 = \sqrt{\frac{20R}{g}}$$

$$\text{Verhältnis } \frac{t_2}{t_1} = \frac{\sqrt{\frac{20R}{g}}}{\sqrt{\frac{30R}{g}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \underline{\underline{t_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} t_1}}$$



$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \\ \dot{L}_c &= I_0 \ddot{\psi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g \Leftrightarrow \int \ddot{x} dt = \int g dt \\ \Leftrightarrow \dot{x} &= gt + v_0 \\ \Leftrightarrow \int \dot{x} dt &= \int gt + v_0 dt \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingungen: } v_0 &= 0 \\ x_0 &= 0 \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$