Übung 1

27.09.2022
Lina De Windt

Themen von Heute:

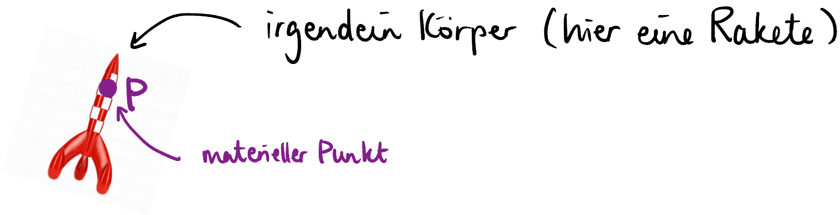
- Kleine Vorstellungsrunde
- Organisatorisches: Informationen zur Übungsstunde
- Teil 1: Recap der Theorie:
  1. materieller Punkt
  2. Geschwindigkeit & Schnelligkeit
  3. Starre Körper
- Teil 2: Übungsaufgaben lösen

Kleine Vorstellungsrunde

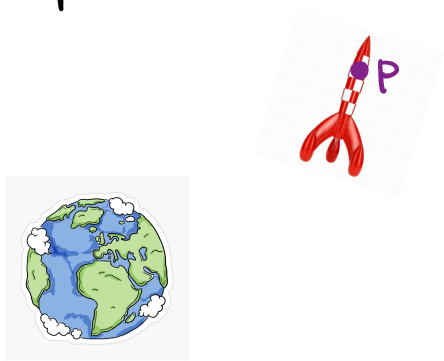
Teil 1: Recap der Theorie

1. materieller Punkt:

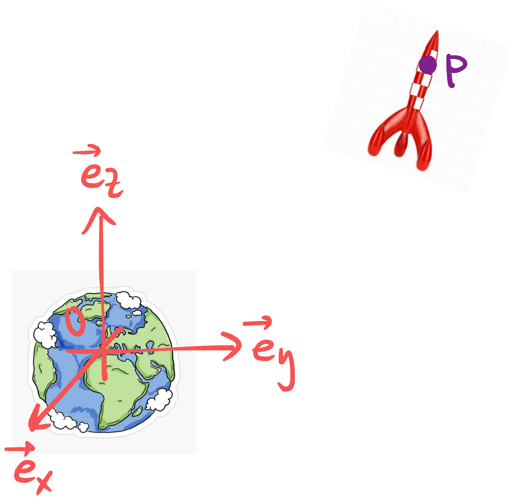
Ein materieller Punkt ist nichts anderes als ein Punkt eines Körpers.



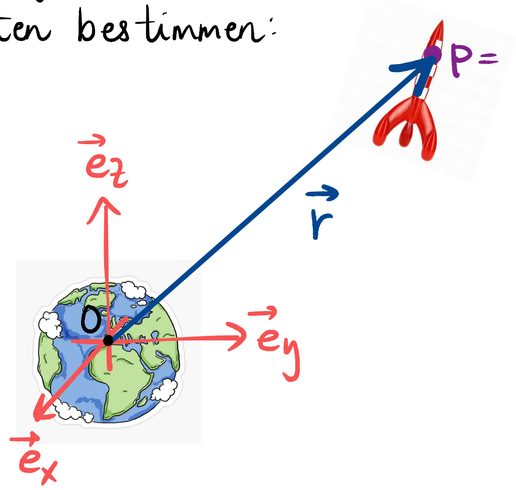
Doch mit nur einem Punkt im Raum können wir nichts anfangen. Deswegen führen wir Bezugsskörper ein. z.B. wäre die Erde ein guter Bezugskörper für die Rakete:



Bezugskörper haben Bezugssysteme: das ist ein fancy-Wort für Koordinaten-system:



Wo wir jetzt ein Bezugssystem haben, können wir die Lage des Punktes durch die Lagekoordinaten bestimmen:

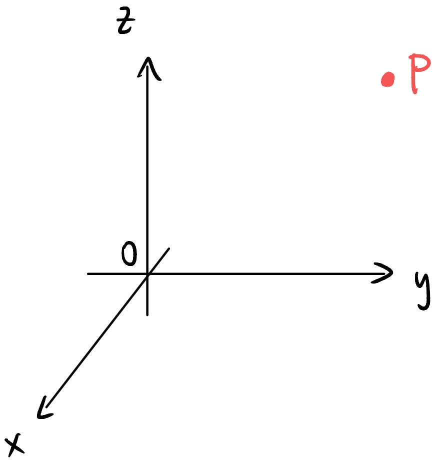


Ortsvektor:

Ein System:

2. Geschwindigkeit & Schnelligkeit:

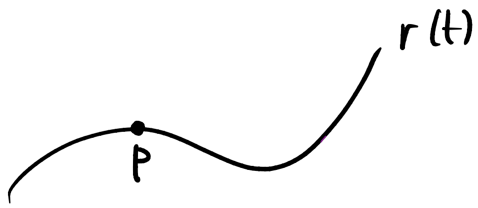
Ein Punkt im Raum, der sich bewegt, kann man durch eine Funktion beschreiben:



Eine solche Funktion könnte z.B. so aussehen

Quiz: Welche Bahnkurve beschreibt diese Funktion?

Geschwindigkeit: Die Geschwindigkeit ist definiert als die zeitliche Ableitung des (zeitlich abhängigen) Ortsvektors.



Good to know: der Geschwindigkeitsvektor eines Punktes ist tangential zur Bahnkurve des Punktes.

Schnelligkeit:

3D:

2D:

Geometrisch gesehen: die Schnelligkeit ist die Länge des Geschwindigkeitsvektors.

Das Ableiten ist in kartesischen Koordinaten recht straightforward, aber sobald wir andere Koordinaten nehmen, wird es ein bisschen komplizierter. Deswegen hier eine kleine Übersicht:

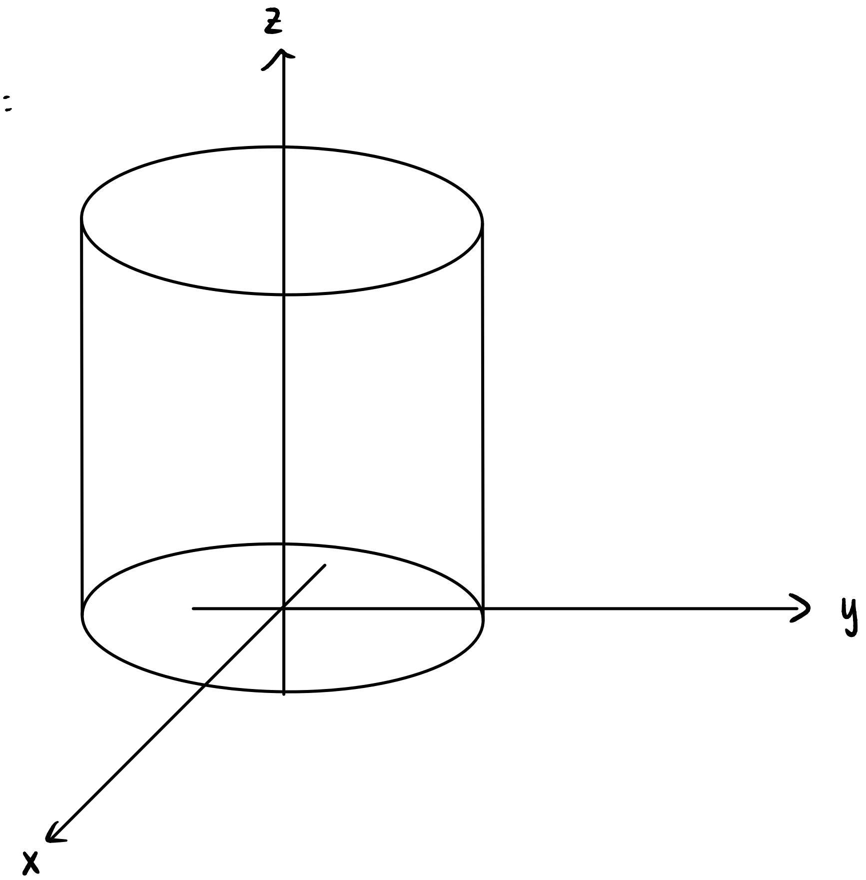
Tabelle Geschwindigkeit & Schnelligkeit in verschiedenen Koordinaten:

Koordinaten	Bewegungsgleichung	Geschwindigkeitsgleichung	Schnelligkeit
Kartesische	$\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$	$\underline{v} = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y + \dot{z}\underline{e}_z$	$s = \lvert\underline{v}\rvert = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$
Zylindrische	$\underline{r} = \rho\underline{e}_\rho + z\underline{e}_z$	$= \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\underline{e}}_\rho + \dot{z}\underline{e}_z$ $\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z$	$s = \lvert\underline{v}\rvert = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$
Polar:	$\underline{r} = \rho\underline{e}_\rho$	$\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\underline{e}}_\rho$	$s = \lvert\underline{v}\rvert = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2}$

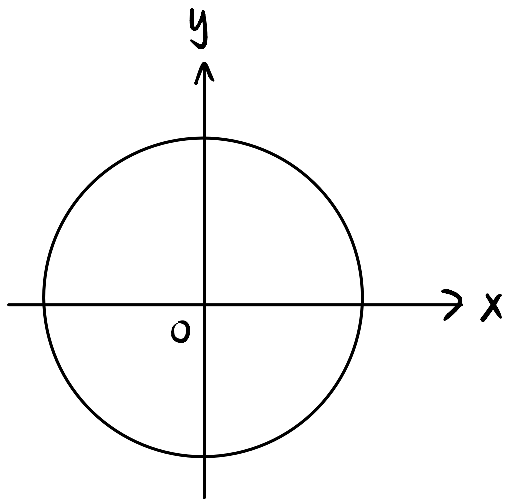
Beachte: Der Einheitsvektor $\underline{e}_\rho = \underline{e}_\rho(\varphi(t))$ ist abhängig von $\varphi(t)$, resp. $\psi(t)$ und $\theta(t)$. Dies muss beim Ableiten berücksichtigt werden.
Die zeitlichen Abhängigkeiten habe ich in der Tabelle weggelassen $x = x(t), y = y(t)$...

Exkurs: Koordinatensysteme

Zylinder:



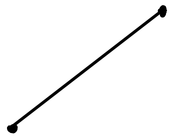
Polar ("Zylinder ohne z"):



→ genauer siehe "Zusatzmaterialien 1"

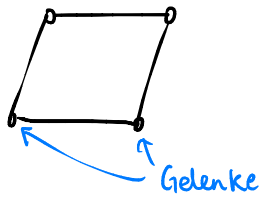
③ Starre Körper

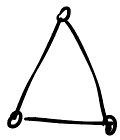
Starre Körper (SK) sind Körper, die sich nicht deformieren. z.B. ist ein Stab ein Starrkörper.

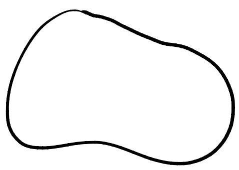


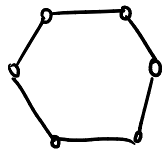
SK.

Quiz: Welche der folgenden Körper sind Starrkörper?

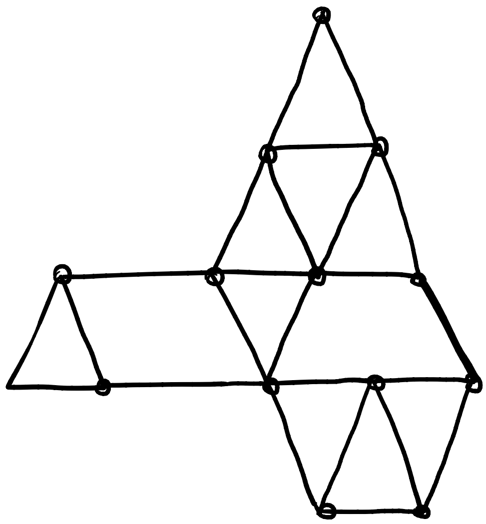
① 

② 

③ 

④ 

Bonus: Wie viele SK hat dieses System?:



Lösung:

Warum?

Teil 2: Übungsaufgaben:

1. [1] Ein materieller Punkt P hat die Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{r}_P(t) = \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4}\cos\pi t\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4}\sin\pi t\right)\mathbf{e}_y.$$

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_P$ des Punktes P als Funktion der Zeit.
2. Bestimmen Sie die Schnelligkeit v_P des Punktes P als Funktion der Zeit.
3. Welche Bahn beschreibt der Punkt P ?

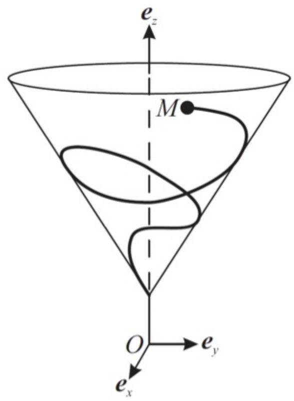
2. [2] Ein materieller Punkt M bewegt sich auf einer Kreiskegelfläche. Die Bewegung des Punktes wird in Zylinderkoordinaten durch die Gleichungen

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \cos \mu t)$$

$$\varphi = \sqrt{3}\mu t$$

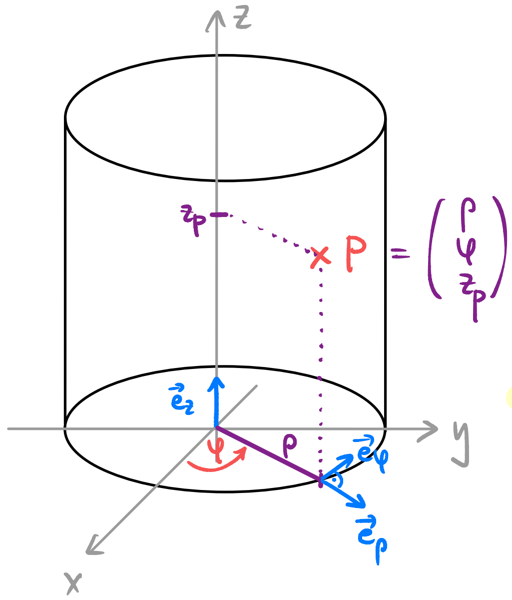
$$z = 3 - \cos \mu t$$

gegeben (t wird in Zeiteinheiten gemessen und μ ist eine dimensionslose Konstante).



1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von M in Zylinderkoordinaten.
2. Berechnen Sie die Schnelligkeit von M.
3. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von M in den kartesischen Koordinaten .

recap Zylinderkoordinaten:

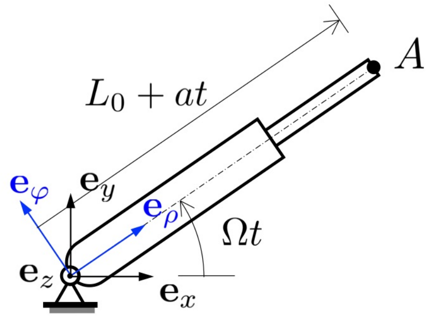


$$\vec{e}_\rho = \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \cos(\varphi)\,\vec{e}_y$$

Umrechnung:

Zylinder → kartesisch	kartesisch → Zylinder
$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$	$z = z$

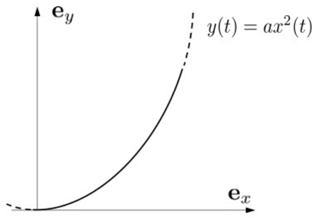
3. Ein Antrieb, der im Gelenk O drehbar gelagert wird, rotiert um die $\mathbf{e}_z$ Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω und verlängert sich gleichzeitig gemäss dem Ausdruck $L(t) = L_0 + at$, wie in der folgenden Skizze dargestellt.



1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ des Punktes A in Polar- und kartesischen Koordinaten.
2. Bestimmen Sie die Schnelligkeit v_A des Punktes A.

4. Gegeben sei die Bahnkurve $y(t) = ax^2(t)$. Zur Zeit $t_1 = 1$ $[s]$ sind $x(t_1)$ und $\dot{x}(t_1)$ gegeben als

$$x(t_1) = 1; \qquad \dot{x}(t_1) = 1.$$



Was ist die Schnelligkeit $v(t_1)$?

(a) $v(t_1) = \sqrt{1 + 4a^2}$

(b) $v(t_1) = \sqrt{2 - \frac{1}{2}a^2}$

(c) $v(t_1) = \sqrt{2 + \frac{1}{2}a^2}$

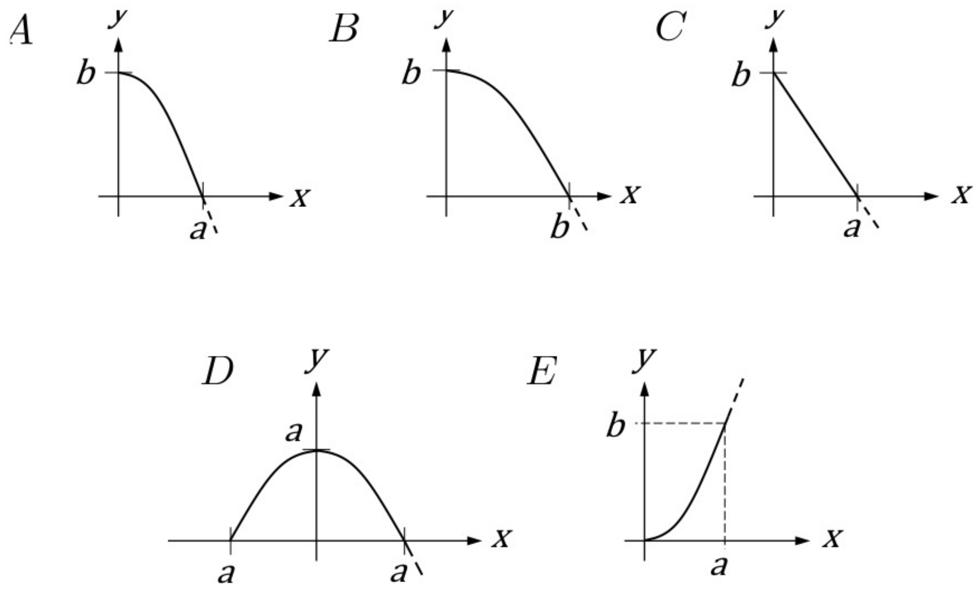
(d) $v(t_1) = -\sqrt{1 + 4a^2}$

(e) $v(t_1) = \sqrt{2 + 4a^2}$

5. Betrachten Sie die folgende Bahnkurve:

$$x(t) = at \qquad\qquad y(t) = b - \frac{a^2}{b}t^2$$

Wobei $a > 0$ und $b > 0$ gegebene Konstanten sind und die Zeit $t \geq 0$ als positiv betrachtet wird.



Welcher von der Graphen stellt die richtige Bahnkurve dar?

(a) A

(b) B

(c) C

(d) D

(e) E