Übung 11

13.12.2022
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen & Inputs zu Themen / Aufgaben von letzter Woche ?

> Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie:

1. Massenmittelpunktsatz
2. Differenzialgleichungen (DGL) (ein bisschen mehr im Detail besprechen :))
3. Beispielaufgaben (aus Serie 11)

> Teil 3: Übungsserie lösen (Serie 11)

Teil 1: Fragen & Inputs zu Themen/Aufgaben von letzter Woche?

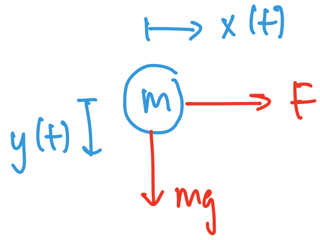
Teil 2: Recap der Theorie für die aktuelle Serie

Letzte Woche haben wir den **Newton'schen Bewegungsgesetz** kennengelernt:

($\hat{=}$ Impulssatz, $\dot{\vec{p}} = \vec{R}$ wobei $\vec{p} = m\vec{v}$)

⚠ Wenn ihr mit Beträgen arbeitet: R = Resultierende in Richtung der Koordinate!

D.h. also z.B.:



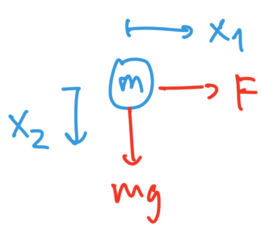
$$m\ddot{y}(t) = mg \qquad \& \qquad m\ddot{x}(t) = F$$

macht auch Sinn, da wenn wir z.B. $m\ddot{x} = mg$ nach x lösen:

$$m\ddot{y} = mg \quad / \div m$$
$$\Leftrightarrow \quad \ddot{y} = g$$
$$\Leftrightarrow \quad \int \ddot{y}\, dt = \int g\, dt$$
$$\Leftrightarrow \quad \dot{y} = gt$$
$$\Leftrightarrow \quad \int \dot{y}\, dt = \int gt\, dt$$
$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} gt^2$$

← Formel für den freien Fall ! :)

Doch warum? → Wenn der Körper mehr als 1 Freiheitsgrad hat, kann man den Newton'schen Bewegungssatz in Vektorform schreiben:



$$m\ddot{\vec{x}} = m\begin{pmatrix}\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2\end{pmatrix} = \vec{R} = \begin{pmatrix} F \\ mg \end{pmatrix}$$

ein bisschen verwirrend am Anfang, aber $\vec{x}$ beschreibt hier nicht die Koordinate x, sondern ist der Vektor, der alle Koordinaten enthält, die die Bewegung des Körpers beschreiben. → mehr dazu in späteren Semestern :)

→ so erhält man auch genau die zwei Gleichungen wie oben: $m\ddot{x}_1 = mg$ & $m\ddot{x}_2 = F$

Das Newton'sche Bewegungsgesetz gilt für alle Massepunkte. ($\hat{=}$ materielle Punkte)

Nun wollen wir auch Bewegungssätze haben, welche für beliebige starre oder deformierbare Körper gelten: der Massenmittelpunktsatz und der Drallsatz.

nächste Woche

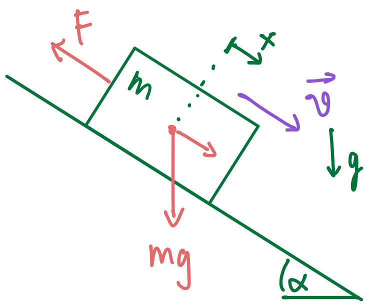
1. Massenmittelpunktsatz: Um Bewegungen von Körpern zu beschreiben:

Anwendung: In TechMech benutzen wir den Massenmittelpunktsatz gleich wie das Newton'sche Bewegungsgesetz. (Nur die Herleitung ist anders).

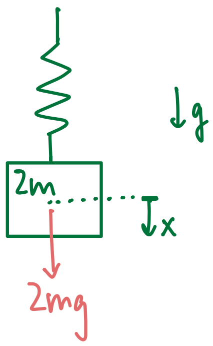
für uns egal :))

Beispiele:

①

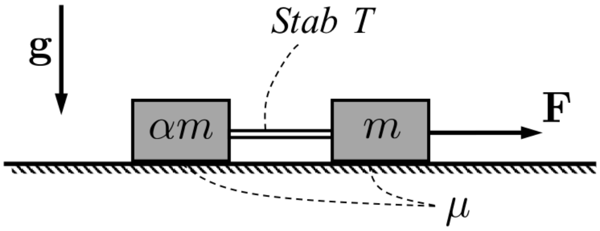


②



Beispielaufgabe zum Massenmittelpunktsatz: Serie 11 Aufgabe 5

5. Zwei Teilchen der Masse αm und m sind durch einen starren, masselosen Stab verbunden und werden durch eine konstante Kraft $\mathbf{F}$ aus der Ruhelage gezogen. Das System gleitet auf einer horizontalen, rauen Oberfläche mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ. Die Schwerkraft wirkt nach unten. Bezeichnen Sie den Betrag der Zugkraft im Stab während des Gleitens mit T.



Für welchen Wert von α gilt $T = \frac{1}{3} F$?

(a) $\alpha = \dfrac{1}{2}$

(b) $\alpha = \dfrac{2}{3}$

(c) $\alpha = 1$

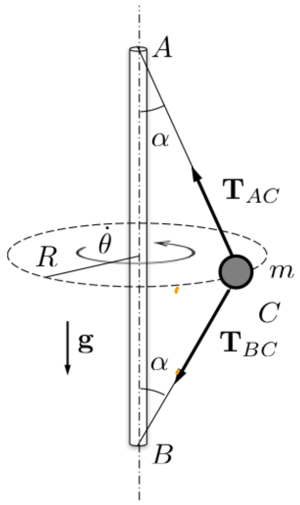
(d) $\alpha = \sqrt{2}$

(e) $\alpha = 3$

Beispielaufgabe 2 zum Massenmittelpunktsatz: Serie 11 Aufgabe 6

↳ in Zylinderkoordinaten!

6. Die Seile AC und BC verbinden eine Kugel der Masse m mit einer senkrechten Welle, wie gezeigt. Die Schwerkraft wirkt nach unten. Wenn die Welle mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ rotiert, bewegt sich die Kugel auf einem horizontalen Kreis, wobei die Seile unter einem Winkel α zur Welle geneigt sind. Die Kräfte in den Seilen werden mit $\mathbf{T}_{AC}$ und $\mathbf{T}_{BC}$ bezeichnet.



Was ist der minimale Wert von $\dot{\theta}$, so dass das Seil BC entspannt wird (das heisst $|\mathbf{T}_{BC}| = 0$)?

(a) $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{4g}{3R}\cos^2\alpha}$

(b) $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{R}\tan\alpha}$

(c) $\dot{\theta} = 0$

(d) $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}\sin\alpha}$

(e) $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{R}\cos\alpha}$

Geschwindigkeit (in Zylinderkoordinaten): $\vec{v} =$

Beschleunigung in Zylinderkoordinaten (aus Ü letzte Woche):

$\vec{a} =$

Resultierende bestimmen:

Wir stellen den Massenmittelpunktsatz auf:

2. Differenzialgleichungen

→ genauer im Dokument "Crash Course DGL" oder in Ana 2/3 :)

Eine Differenzialgleichung ist eine Gleichung, in welcher eine unbekannte Funktion (z.B. $x(t)$) einer oder mehrerer Variablen und ihre Ableitungen vorkommen.

Bsp.: $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = g$

$\ddot{y}(t) = t$

$\ddot{u}(x) + u(x) = 0$

→ Ziel: die unbekannte Funktion bestimmen!

Klassifizierung einer DGL:

(hier nur die wichtigsten Begriffe)

Ordnung Die Ordnung der höchsten Ableitung, die in der DGL vorkommt.

Linearität $x(t)$ und alle ihre Ableitungen kommen in der DGL linear vor.

Homogenität Wenn keine Terme in der DGL vorkommen, die rein von der Funktionsvariablen t abhängen oder Konstanten sind, sagt man dass die DGL homogen ist.

In TechMech: Nur lineare, gewöhnliche DGL max. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten :)

Bsp. $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$

Anfangswertproblem: DGL + Anfangsbedingungen

↳ gleich viele wie die Ordnung der DGL!

z.B. $\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 2t^2 & \text{2. Ordnung} \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$ $\Big\}$ 2 Anfangsbedingungen

Lineare DGL (bzw. AWP) 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen:

Grundprinzip:

Die allgemeine Lösung hat folgende Form: $\boxed{x(t) = x_{homogen}(t) + x_{partikulär}(t)}$

$x_{homogen}(t)$: ist die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Problems. (d.h. die DGL ohne den inhomogenen Term)

$x_{partikulär}(t)$: ist eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems. Sie muss schlicht die inhomogene Gleichung erfüllen.

D.h.: Allgemeine Prozedur zum lösen von linearen DGL:

überspringen falls DGL homogen ist

1) Lösen der homogenen Lösung
2) Bestimmung einer partikulären Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Gleichung
3) Die allgemeine Lösung ist dann: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

   $x_p(t) = 0$ falls DGL homogen

   falls Anfangswerte vorhanden:

4) Anfangswerte in $x(t)$ einsetzen um unbekannte Koeffizienten zu bestimmen

Schauen wir uns nun an, welche Techniken wir verwenden können, um $x_h(t)$ und $x_p(t)$ zu bestimmen:

1) Homogene DGL: $a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$ ← lineare, homogene DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

wobei $a_2, a_1, a_0, c \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$

Wir machen den Euler – Ansatz:

Euler

Wir nehmen an, dass $x(t)$ folgende Form hat:

mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ein zu bestimmender Parameter ist.

Wir setzen diesen Ansatz in die DGL ein:

Wir haben nun eine Gleichung für den unbekannten Parameter λ !

Diese Gleichung heisst Charakteristische Gleichung / Polynom ($Chp(\lambda)$). Wir haben nun also die DGL auf ein Nullstellenproblem überführt! :) Nun müssen wir das Charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerlegen:

$$Chp(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdot(\lambda - \lambda_2) = 0$$

wobei λ_1, λ_2 die Nullstellen von $Chp(\lambda)$ sind.

z.B.: $\ddot{x} + 6\dot{x} + 5 = 0 \Rightarrow Chp(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 5 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda+2) = 0$

Bei DGL's zweiter Ordnung können wir sogar die Mitternachtsformel verwenden, um λ_1 und λ_2 zu bestimmen:

Mit diesen Werten können wir das Fundamentalsystem der DGL aufschreiben:

Bem: Falls eine Nullstelle zwei Mal vorkommt (also $(\lambda-\lambda_1)^2=0$), dann hat diese Nullstelle die Vielfachheit 2. Das Fundamentalsystem sieht dann so aus: $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}$

Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination aller Lösungen im Fundamentalsystem:

bzw. $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t}$ falls λ_1 mit Vielfachheit 2

Die Koeffizienten der Linearkombination werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Die eindeutige Lösung, die man so bestimmt hat, heisst spezifische Lösung.

Beispiel:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad , \omega > 0 & \leftarrow \text{DGL} \\ x(0) = 0 & \\ \dot{x}(0) = v_0 & \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{matrix}\right\} \text{Anfangsbedingungen}$$

2) Inhomogene DGL

Bei inhomogenen DGL's müssen wir neben der homogenen Lösung auch die partikuläre Lösung finden. Das ist einfach eine Lösung, die die inhomogene DGL löst. Um diese zu bestimmen wenden wir die Methode des direkten Ansatzes an.

Das wichtigste hier ist:

$$\boxed{\text{Der Ansatz für } x_p(t) \text{ hat dieselbe Form wie der inhomogene Term } b(t).}$$

Die Ansatztabelle hilft uns, einen passenden Ansatz zu finden:

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
Polynom: $\sum_{i=0}^m b_i x^i$	$\sum_{i=0}^m A_i x^i$
Exp-term-Polynom $e^{\alpha x} \sum_{i=0}^m b_i x^i$	$e^{\alpha x} \sum_{i=0}^m A_i x^i$
$\sin(\omega x) \sum_{i=0}^m b_i x^i + \cos(\omega x) \sum_{i=0}^m c_i x^i$	$\sin(\omega x) \sum_{i=0}^m A_i x^i + \cos(\omega x) \sum_{i=0}^m B_i x^i$
$\sinh(\omega x) \sum_{i=0}^m b_i x^i + \cosh(\omega x) \sum_{i=0}^m c_i x^i$	$\sinh(\omega x) \sum_{i=0}^m A_i x^i + \cosh(\omega x) \sum_{i=0}^m B_i x^i$
$e^{\alpha x} \sin(\omega x) \sum_{i=0}^m b_i x^i + e^{\alpha x} \cos(\omega x) \sum_{i=0}^m c_i x^i$	$e^{\alpha x} \sin(\omega x) \sum_{i=0}^m A_i x^i + e^{\alpha x} \cos(\omega x) \sum_{i=0}^m B_i x^i$

Besonderer Fall: Wenn es vorkommt, dass ein Teil der für $y_p(x)$ zu wählenden Funktion bereits in der Lösung des homogenen Problems vorhanden ist (vgl. Beispiel 24.2.3), wird der Ansatz zusätzlich mit x multipliziert.

Wiederum müssen wir einfach den Ansatz in die DGL einsetzen und die Koeffizienten bestimmen.

Beispiel:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = \underline{g}, & \omega > 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Inhomogenität

physikalisches System hinter dieser DGL:

Wichtig für die Prüfung!!

- Wenn ein Ansatz angegeben ist, dann verwendet diesen!
  ↳ einfach noch mit den Anfangsbedingungen die Koeffizienten bestimmen.

- Bei Schwingungen ohne Dämpfung (d.h. die DGL hat die Form
  $\boxed{\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$) könnt ihr den Ansatz

  $$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + C}$$ verwenden,

  wobei $\boxed{\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}}$ die Kreisfrequenz ist.

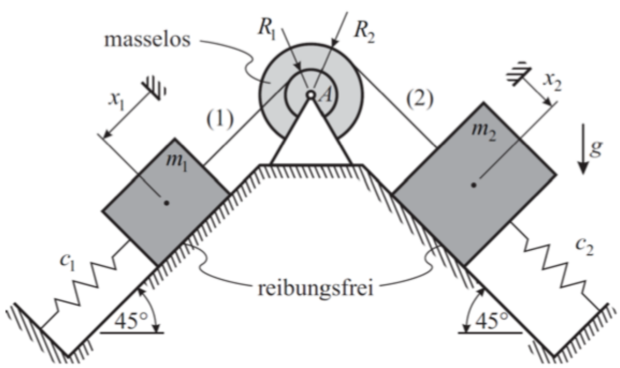
  Ihr müsst dann nur noch mit den Anfangsbedingungen die Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$ bestimmen.

Letztes Bsp.:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = -mg \\ y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_1(0) = v_0 \end{cases}$$

Beispielaufgabe: Serie 11 Aufgabe 3

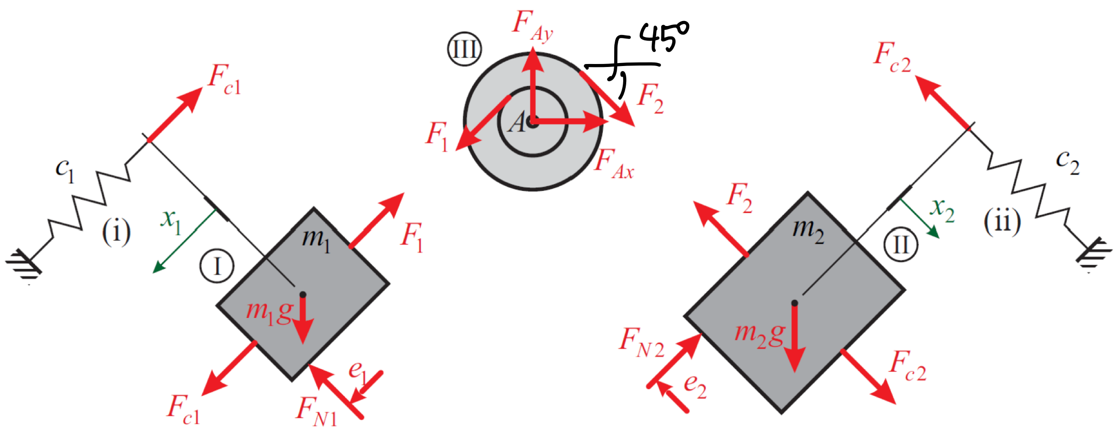
3. [3] Zwei Körper mit den Massen m_1 bzw. m_2 sind gemäss Skizze mit einem Seil über eine masselose Doppelrolle mit den Radien R_1 und R_2 verbunden. Beide Körper sind mittels zweier Federn mit den Federsteifigkeiten c_1 bzw. c_2 an einer Wand befestigt. Beide Körper gleiten reibungsfrei entlang zweier um 45° geneigter Ebenen. Die Federn seien im Anfangszustand ($x_1 = 0,\ x_2 = 0$) ungespannt.



1. Bestimmen Sie den Freiheitsgrad des Systems.
2. Schneiden Sie beide Körper und die Rolle frei und führen Sie alle wirkenden Kräfte ein.
3. Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für die Rolle auf und bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den Seilkräften in den Seilabschnitten (1) und (2).
4. Formulieren Sie die Beziehungen zwischen den Federkräften und den gegeben Koordinaten und stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen der beiden Körper bezüglich der gegebenen Koordinaten auf, ohne sie zu lösen.
5. Bestimmen Sie die kinematische Relation zwischen den Koordinaten x_1 und x_2.
6. Es gelten die Verhältnisse: $m_2/m_1 = 1/2$, $R_2/R_1 = 2$ und $c_2/c_1 = 2$. Eliminieren Sie alle unbekannten Kräfte aus den Gleichungen und reduzieren Sie das Gleichungssystem auf möglichst wenige Gleichungen.

1. Bestimmen Sie den Freiheitsgrad des Systems.

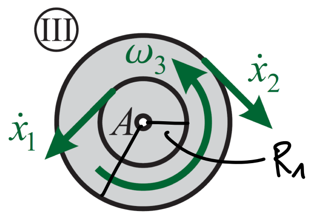
2. Schneiden Sie beide Körper und die Rolle frei und führen Sie alle wirkenden Kräfte ein.



3. Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für die Rolle auf und bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den Seilkräften in den Seilabschnitten (1) und (2).

4. Formulieren Sie die Beziehungen zwischen den Federkräften und den gegeben Koordinaten und stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen der beiden Körper bezüglich der gegebenen Koordinaten auf, ohne sie zu lösen.

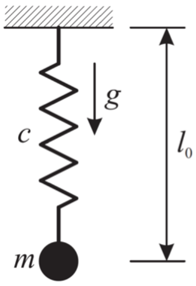
5. Bestimmen Sie die kinematische Relation zwischen den Koordinaten x_1 und x_2.



6. Es gelten die Verhältnisse: $m_2/m_1 = 1/2$, $R_2/R_1 = 2$ und $c_2/c_1 = 2$. Eliminieren Sie alle unbekannten Kräfte aus den Gleichungen und reduzieren Sie das Gleichungssystem auf möglichst wenige Gleichungen.

Teil 3: Übungsaufgaben lösen – Serie 11

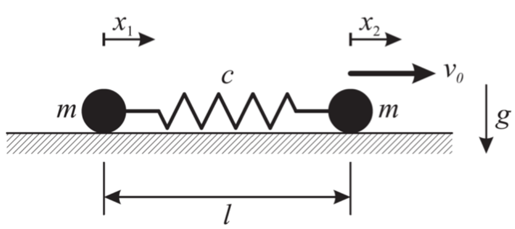
1. [1] Ein Massenpunkt (Masse m) hängt an einer Feder. Diese ist in vertikaler Lage am oberen Ende befestigt. Die Federkonstante ist c und die Feder besitzt die ungespannte Länge l_0 . Finde die Bewegung des Massenpunktes, wenn dieser bei ungespannter Feder aus der Ruhe losgelassen wird.



1. Nehmen Sie an, dass die Feder während der Bewegung vertikal bleibe und führen Sie in einer allgemeinen Lage die Kräfte am Massenpunkt ein.
2. Formulieren Sie das Newtonsche Bewegungsgesetz und finden Sie die Bewegungsdifferentialgleichung.
3. Formulieren Sie das Anfangswertproblem für die Bewegung des Massenpunktes.
4. Bestimmen Sie die Bewegung des Massenpunktes. Dieser führt eine Schwingung aus. Wie gross sind die Amplitude und die Kreisfrequenz dieser Schwingung?

↳ in Ü letzte Woche gelöst. Versucht es nochmals selbst zu lösen als Übung :)

2. [2] Zwei Massenpunkte (Masse m) befinden sich auf einer reibungsfreien Horizontalebene und sind durch eine Feder (Federkonstante c, ungespannte Länge l) verbunden. Zur Zeit $t = 0$ (siehe Skizze) ist die Feder ungespannt, der linke Massenpunkt in Ruhe und der rechte Massenpunkt bewegt sich mit der Schnelligkeit v_0 .

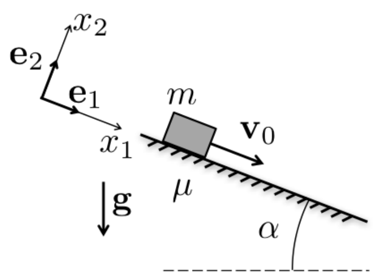


1. Formulieren Sie für beide Massen einzeln das Newtonsche Gesetz.
2. Bestimmen Sie die Bewegung der beiden Massenpunkte für die gegebenen Anfangsbedingungen.
3. Berechnen Sie die Federkraft in Funktion der Zeit.

Tipp: Die Bewegungsdifferentialgleichungen vereinfachen sich, wenn man die neuen Koordinaten $q_1 = x_1 + x_2$, $q_2 = x_2 - x_1$ *verwendet.*

Tipps:

4. Ein Block der Masse m gleitet auf einer rauen schiefen Ebene mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ und dem Neigungswinkel α. Der Block erhält zum Zeitpunkt t_0 eine Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ in Richtung $\mathbf{e}_1$.



Wie viel Zeit t_s braucht der Block, um zum Stillstand zu kommen?

(a) $t_s = \dfrac{v_0}{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}$

(b) $t_s = \dfrac{v_0}{g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}$

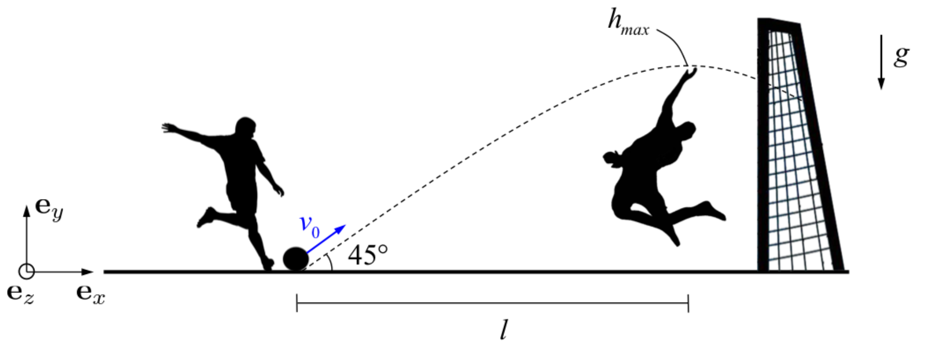
(c) $t_s = \dfrac{gv_0}{(\mu\sin\alpha - \cos\alpha)}$

(d) $t_s = \dfrac{v_0}{g(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)}$

(e) $t_s = \dfrac{v_0^2}{g(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)}$

Tipps:

7. Ronaldo ist bereit, einen Strafstoss auszuführen. Er entscheidet sich für einen Winkel von 45°, ist sich aber noch unsicher über die benötigte Anfangsgeschwindigkeit v_0. Um das Fussballtor zu treffen, muss der Ball die maximale Höhe in der Entfernung l von Ronaldo erreichen (siehe Skizze).



Wie hoch muss die Geschwindigkeit v_0 sein, damit Ronaldo ein Tor schiessen kann?

(a) $v_0 = \sqrt{2gl}$

(b) $v_0 = 2gl$

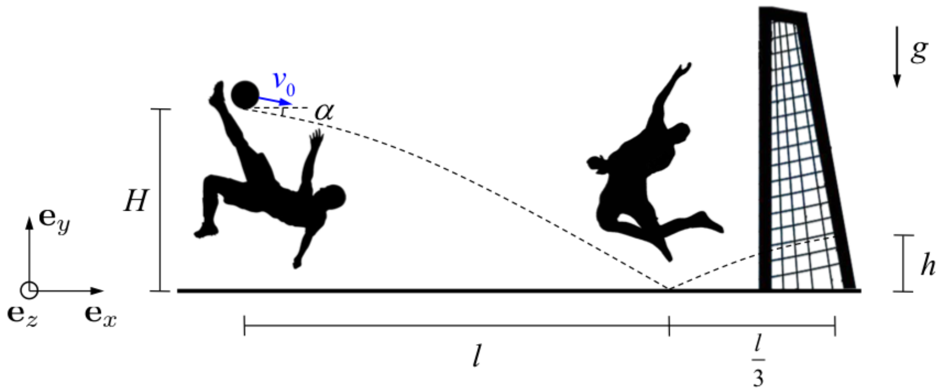
(c) $v_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{gl}$

(d) $v_0 = \frac{gl}{2}$

(e) Ronaldo trifft auch ohne Physik

Tipps:

8. Als Alternative zum vorherigen direkten Schuss überlegt Ronaldo, einen Fallrückzieher zu machen. In diesem Fall wird der Ball aus der Höhe H geschossen, trifft im Abstand l unter dem Torhüter auf den Boden und landet in der Höhe h im Tor (siehe Skizze).



1. Unter welchem Winkel α berührt der Fussball den Boden nach $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$?
   (a) $\alpha = 0°$
   (b) $\alpha = 15°$
   (c) $\alpha = 30°$
   (d) $\alpha = 45°$
   (e) $\alpha = 60°$
2. In welcher Höhe h landet der Fussball im Tor? Der Winkel α kann aus Teilaufgabe 1 entnommen werden.
   (a) $h = \frac{1}{3}l$
   (b) $h = \frac{4}{9}H$
   (c) $h = \frac{1}{2}gl^2$
   (d) $h = \frac{5}{9}H$
   (e) $h = \frac{8}{9}H$

Hinweis: Es kann davon ausgegangen werden, dass der Sprung des Balles am Boden vollständig elastisch ist, so dass die Geschwindigkeit nach dem Stoss wie folgt aussieht:

$$\mathbf{v}_{nach} = \begin{pmatrix} v_{x,nach} \\ v_{y,nach} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x,vor} \\ -v_{y,vor} \end{pmatrix}$$

Tipps: