Technische Mechanik

Übung 2

04.10.2022
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Theorie-Recap dieser Woche:

1. Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)
2. ebene Bewegungen: Translation & Rotation

   2.1 Satz vom Momentanzentrum (SvM)

> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 2)

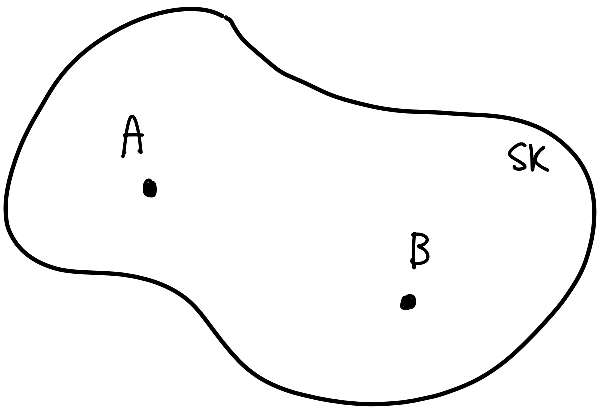
Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

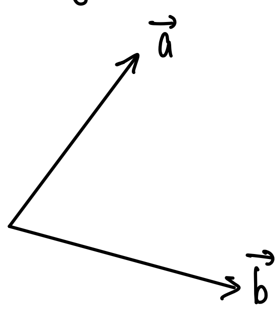
1. Der Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG):

↳ gilt für alle Starrkörper. (nicht deformierbar / Abstand von 2 zum Körper gehörenden Punkten konstant)

Dieser Satz besagt, dass die Projektionen (mit einem Strich ' gekennzeichnet) der Geschwindigkeiten von 2 Punkten auf einem Starrkörper auf ihre Verbindungslinie gleich sind:



So weit so gut, aber wie beschreibt man Projektionen mathematisch?

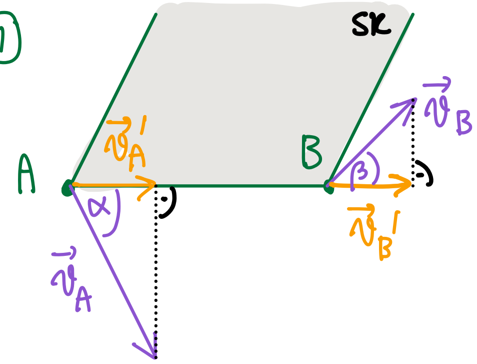


Die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ ist:

Falls ihr den Vektor braucht: $\vec{a}\,' =$

Mit diesem Kenntnissen können wir den SdpG umformen zu:

Beispiele: ①



Quiz: Welche Aussagen sind korrekt?

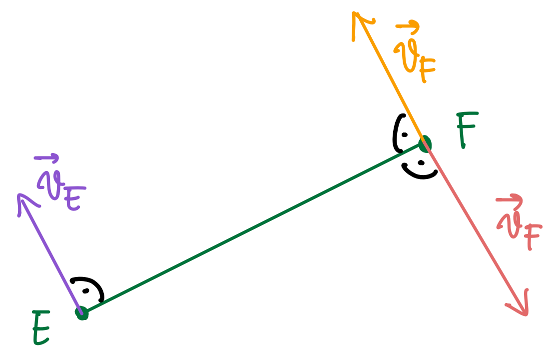
1) $\vec{v}_A \cdot \vec{e}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \vec{e}_{AB}$

2) $\vec{v}_A' = \vec{v}_B'$

3) $\vec{v}_A = \vec{v}_B$

4) $v_A \cos(\alpha) = v_B \cos(\beta)$

②



Quiz: Welches ist der korrekte Geschwindigkeitsvektor von F?

1) $\vec{v}_F$

2) $\vec{v}_F$

3) Ohne weitere Informationen können wir das nicht wissen.

2. Ebene Bewegungen

Ebene Bewegungen sind einfach gesagt Bewegungen, die in Ebenen (2D) stattfinden.

Eine ebene Bewegung bezüglich der xy-Ebene erfüllt folgende Gleichungen:

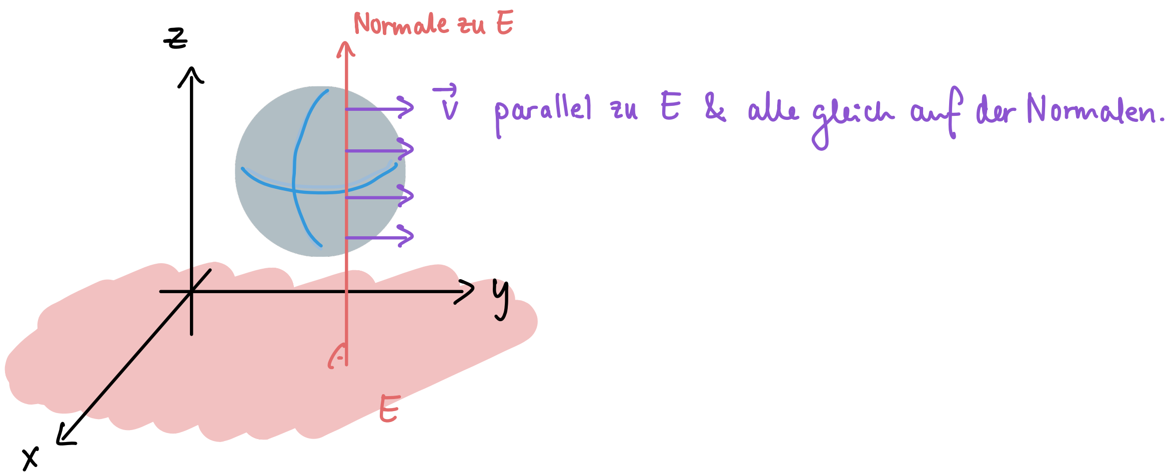
$$\begin{cases} v_z = 0 \\ v_x = v_x(x,y) \quad \text{und} \quad v_y = v_y(x,y) \end{cases}$$

keine Geschwindigkeit in z-Richtung ⇒ alle $\vec{v}$ sind parallel zur xy-Ebene

Die Geschwindigkeiten hängen nur von der x- und y-Koordinate ab.

D.h. alle Punkte auf einer Normalen zu E haben die gleiche Geschwindigkeit.

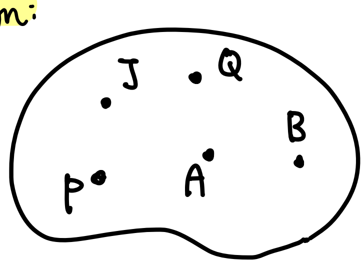
z.B. das wäre eine ebene Bewegung auf der xy-Ebene:



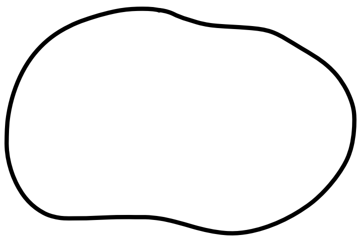
In TechMech interessiert uns der momentaner Bewegungszustand eines (Starr-) Körpers. D.h. wir wollen die Geschwindigheit von bestimmten Punhten zu einem bestimmten Zeitpunkt wissen.

Eine ebene Bewegung ist momentan entweder eine Translation oder eine Rotation:

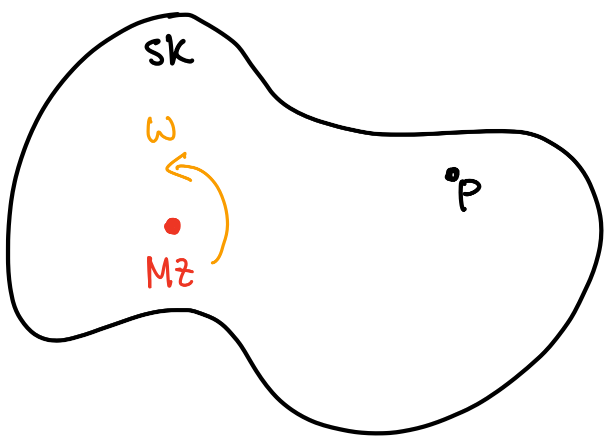
Translation:



Rotation:



2.1 Der Satz vom Momentanzentrum (SvM):



Setup: **M/MZ:** Momentanzentrum

$\vec{\omega}$: Rotationsgeschwindigkeit (ist ein Vektor)

ω: Rotationsschnelligkeit (ist ein Skalar) $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ (wichtig für Serie)

$\vec{r}_P$: Vektor vom MZ zum Punkt

⚠ eine eindeutige ω pro SK!

Wichtig: $\vec{v}_P$ ist immer senkrecht zu $\vec{r}_P$ (Verbindungsgerade vom MZ zum Pkt.)

Warum? → 3 Argumente:

1)

2)

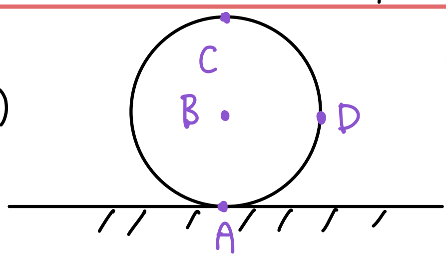
3)

Aber... Was ist ein Momentanzentrum?

Definition!

↳ $\boxed{\text{Ein Momentanzentrum ist ein Punkt, der momentan in Ruhe (d.h. } \vec{v}=0\text{) ist.}}$

Beispiel Rad:
(gleitet nicht)

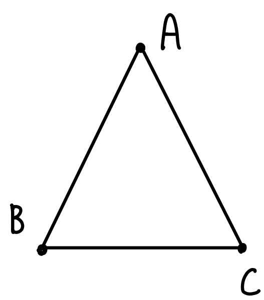


Quiz: Wo ist der MZ?

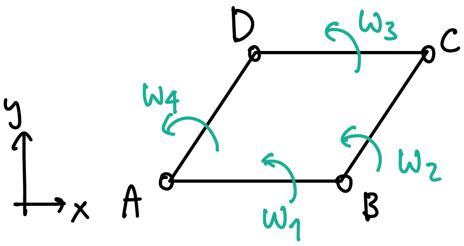
1) D
2) C
3) B
4) A

So weit so gut, aber wie bestimmt man Momentanzentren?

↳ Wir nutzen den Fakt aus, dass $\vec{v}_P \perp \vec{r}_{MP}$! → Konstruktion :)



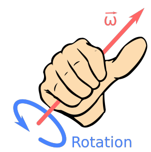
Good to know: Die Parallelogrammregel:



und

Good to know: SvM in 2D:

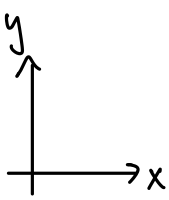
$$\vec{v}_P = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$



Beispiel:

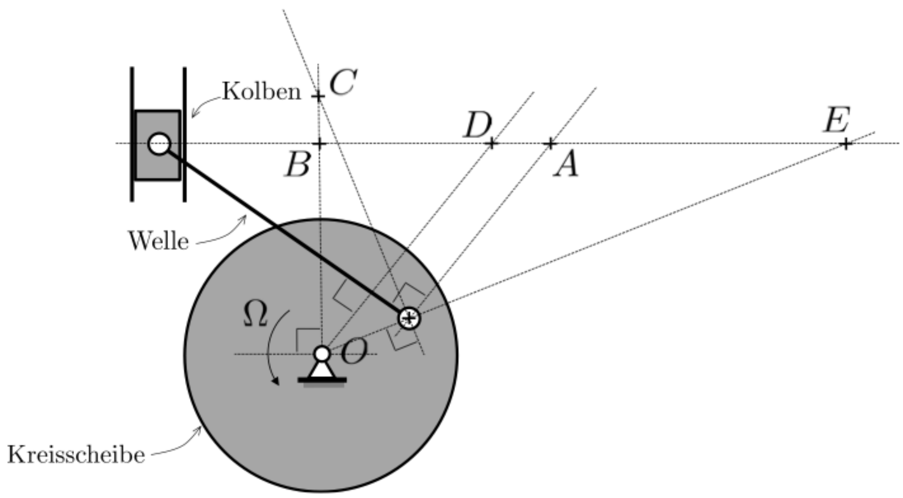
Vorgehen: 1.

2.



Beispielaufgabe Momentanzentrum bestimmen: Serie 2 Aufgabe 7

7. Betrachten Sie den in der Abbildung dargestellten Kurbelwellenmechanismus. Die Kreisscheibe dreht sich um den Fixpunkt O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω. Die Welle verbindet den Kolben mit der Scheibe über zwei Drehgelenke an ihren Spitzen. Der Kolben kann sich nur in vertikaler Richtung bewegen, wie in der Abbildung gezeigt. Alle Teile des Systems können als starr angenommen werden.



Welcher Punkt ist das Momentanzentrum der Welle?

(a) A

(b) B

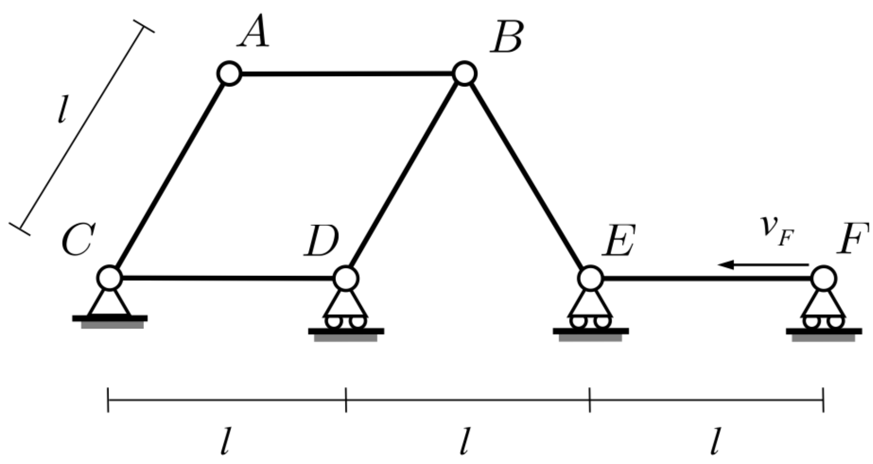
(c) C

(d) D

(e) E

Beispielaufgabe zum SdpG und SvM: Serie 2 Aufgabe 1

1. Das unten dargestellte ebene System besteht aus sechs starren Stäben gleicher Länge l, die gelenkig miteinander verbunden sind. Der Punkt F bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_F nach links, wie in der Skizze eingezeichnet.



Bestimmen Sie für das Fachwerk die folgenden Parameter:

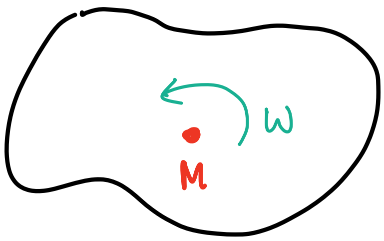
1. Geschwindigkeit $\mathbf{v}_E$
2. Geschwindigkeit $\mathbf{v}_D$
3. Geschwindigkeit $\mathbf{v}_B$
4. Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$

Good to know: $\vec{\omega}$ und ω:

$\vec{\omega}$ ist der Rotationsvektor. Aber warte mal... Was heisst überhaupt Rotationsvektor?

$\Rightarrow$ Dieser ist folgendermassen definiert:

Sagen wir wir haben einen SK, der um M dreht:

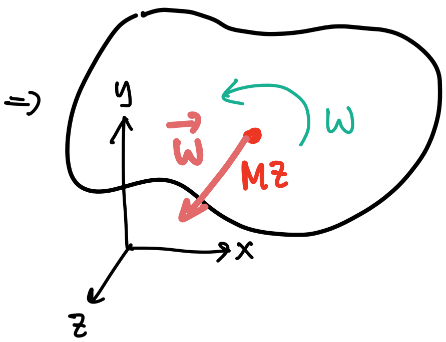


Dann zeichnen wir auch immer direkt ω ein. ω ist der Betrag von $\vec{\omega}$, sprich

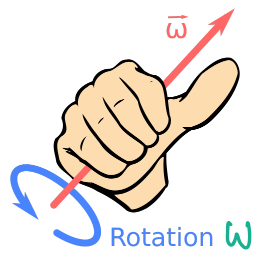
$$\omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Doch wo ist $\vec{\omega}$?

$\Rightarrow$

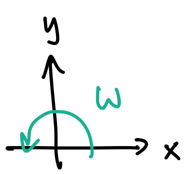


$\vec{\omega}$ ist nach der rechten-Hand-Regel mit ω verwandt. In diesen Bsp. ist $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

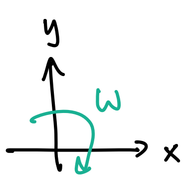


$\vec{\omega}$ zeichnen wir in 2D-Aufgaben schlicht nicht ein, weil dieser irrelevant ist (wenn $\vec{\omega}$ nur 1 Komponente hat brauchen wir nur ω für unsere Berechnungen) & weil es nicht einfach ist ihn einzuzeichnen (kommt aus dem Blatt raus / geht in das Blatt hinein)

Merkt euch einfach:

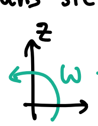


$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

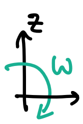


$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}$

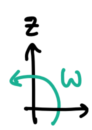
Falls sie gemein sind:



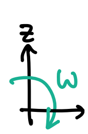
$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix}$



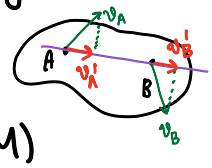
$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}$

usw.

Take home von dieser Woche:

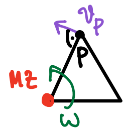
- Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)

$$\boxed{\vec{v}_A' = \vec{v}_B'}$$



- Satz vom Momentanzentrum (SvM)

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P}$$

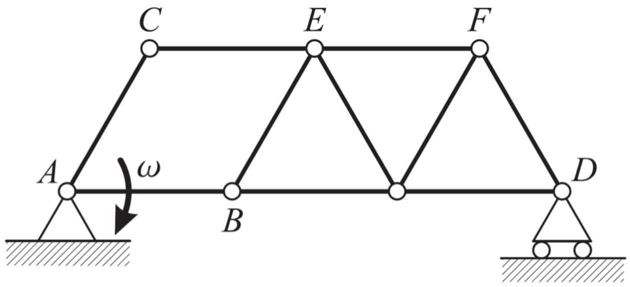


gelten für alle Starrkörper!

Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 2)

↳ lange Serie :/ → Tricks verwenden!
↳ Aufgabe 1 und 7 in Theorieteil gelöst :)

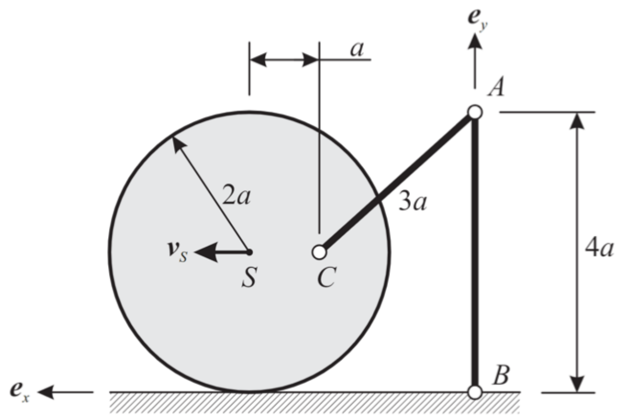
2. [1] Das in der Skizze dargestellte ebene System besteht aus zehn starren Stäben gleicher Länge, die gelenkig miteinander verbunden sind. Der Stab AB rotiert momentan mit der Rotationsschnelligkeit ω.



1. Welche Teile des Systems bilden starre Körper?
2. In welche Richtung rotiert der Stab AC? Wie gross ist seine Rotationsschnelligkeit?

Tipps: 1. Notizen Ü1
2. SvM verwenden

3. [2] Das eben modellierte System besteht aus einer Walze und zwei Stangen. Die Walze rollt mit der konstanten (Mittelpunkts-) Geschwindigkeit $\mathbf{v}_s = v_s \mathbf{e}_x$ nach links, ohne zu gleiten.

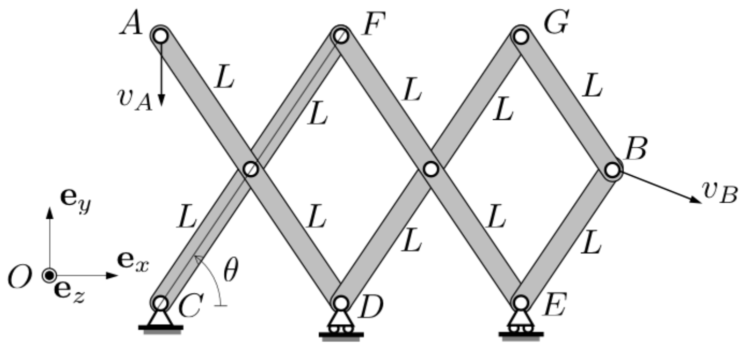


Bestimmen Sie in der dargestellten Lage:

1. Das Momentanzentrum und die Rotationsschnelligkeit der Walze.
2. Die Geschwindigkeit und die Schnelligkeit des Punktes C.
3. Die Rotationsschnelligkeit ω_{AB} und das Momentanzentrum des Stabes AB.
4. Die Rotationsschnelligkeit ω_{AC} und das Momentanzentrum des Stabes AC.

Tipps:
1. Konstruktion & SvM
2. SvM, geht auch mit SdpG
3. SvM & SdpG
4. Strahlensatz verwenden um Länge b zu bestimmen. Dann SvM.

4. Das gezeigte System besteht aus starren Stäben der Längen $2L$ und L, die an ihren Mittel- und Endpunkten gelenkig miteinander verbunden sind, wie in der Skizze dargestellt. Der Punkt C ist am Boden angelenkt, während die Punkte D und E sich nur in der dargestellten horizontalen $\mathbf{e}_x$-Richtung bewegen dürfen. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A = -v_A\mathbf{e}_y$ des Punktes A ist bekannt. Bezeichnen Sie mit θ den Winkel, den der Stab CF mit der $\mathbf{e}_x$ -Richtung einschliesst.



Was ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_B$ des Punktes B?

(a) $\mathbf{v}_B = \frac{5}{2}v_A \tan\theta\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}v_A\mathbf{e}_y$

(b) $\mathbf{v}_B = \frac{1}{2}v_A \tan\theta\mathbf{e}_x$

(c) $\mathbf{v}_B = \frac{3}{2}v_A \sin\theta\mathbf{e}_x - \frac{1}{5}v_A \cos\theta\mathbf{e}_y$

(d) $\mathbf{v}_B = \frac{3}{2}v_A \cos\theta\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}v_A \sin\theta\mathbf{e}_y$

(e) $\mathbf{v}_B = \frac{5}{2}v_A \cos\theta\mathbf{e}_x$

Tipps: Gehe wie folgt vor:

1) Ortsvektor von Punkt B bestimmen $\vec{r} = \dots$

2) daraus die Geschwindigkeit von Punkt B bestimmen $\vec{v} = \dots$

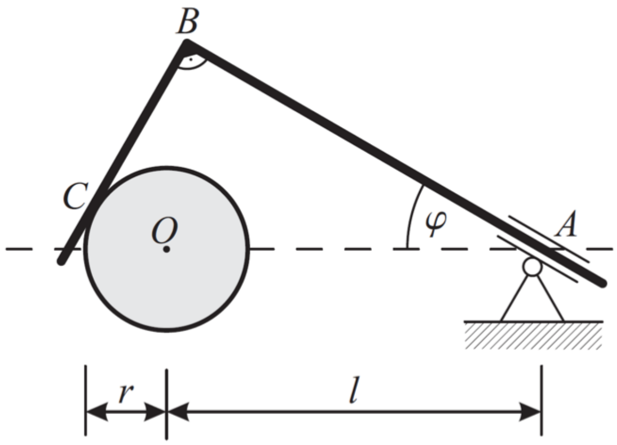
3) Unbekannte Komponenten aus 2) bestimmen.

Achtung mit Symmetrie argumentieren.

Sonst geht die Aufgabe zu lang!

und btw., $\dot{\theta} = \omega$

5. [3] Zwei starr im rechten Winkel verbundene Stäbe bewegen sich so, dass der eine Stab an einem Kreis vom Radius r gleitet und der andere durch den festen Punkt A (Abstand l vom Zentrum des Kreises) geht.



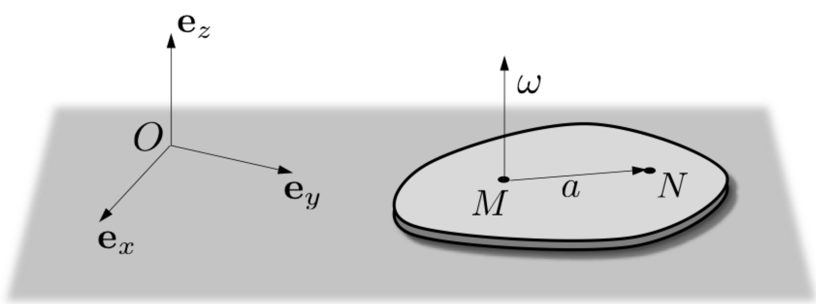
1. Zeichnen Sie in der gegebenen Lage die Richtungen der Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{v}_C$ der Stabpunkte A und C ein.
2. Bestimmen Sie geometrisch das Momentanzentrum.
3. Es sei die Schnelligkeit v_C gegeben. Bestimmen Sie die Rotationsschnelligkeit ω sowie die Schnelligkeiten der Stabpunkte A und B.

Tipps: 1. zuerst Starrkörper identifizieren. Dann Momentanzentrum von Starrkörper bestimmen. Schliesslich Geschwindigkeiten einzeichnen. Wie steht der Geschwindigkeitsvektor gegenüber der Verbindungslinie zum MZ?

2. Konstruktion wie in Bsp.-Aufgabe in Ü

3. SvM

6. Betrachten Sie den Starrkörper in der Skizze. Sei $\mathbf{a}$ der Abstandsvektor zwischen 2 beliebigen Punkten des Körpers M und N, und sei $|\mathbf{a}| = 2$. Der Körper rotiert um M in der Ebene $z = 0$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$.



Welche der folgenden Aussagen ist zutreffend?

(a) $\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = 0$

(b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 2$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2$

(d) $\dot{\mathbf{a}} = \omega \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$

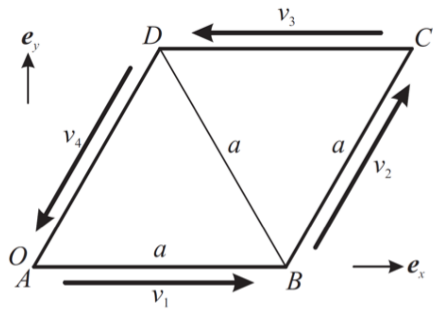
(e) $\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$

Tipps: Versucht, die "Bedeutung" der Formeln zu überlegen als alles brute forte zu berechnen / beweisen.

z.B. $\frac{d}{dt}\vec{a}$ beschreibt die zeitliche Änderung von $\vec{a}$ ...

8. [4] Der momentane Bewegungszustand einer Rhombusplatte (Geometrie siehe Skizze) ist durch die vier skizzierten Komponenten v_1 , v_2 , v_3, v_4 der Geschwindigkeiten in Richtung der Seiten gegeben.

Beispiel: Die Geschwindigkeit v_1 ist also die Projektion der Geschwindigkeit des Punktes A entlang der Seite AB.



Welche der folgenden Bedingungen stellt fest, dass die Rhombusplatte eine reine Translation ausführt?

(a) $v_1 + v_3 = v_2 + v_4$

(b) $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 > 0$

(c) $v_1 = -v_3$ und $v_2 = -v_4$

(d) $v_1 + \frac{v_2}{2} = -v_3 - \frac{v_4}{2}$

(e) $v_1 = v_3$ und $v_2 = v_4$

Tipps:
- Die Definition der Translation haben wir in dieser Ü-Stunde gesehen
- SdpG verwenden.