Technische Mechanik

Übung 3

11.10.2022
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

0. Rotationsgeschwindigkeit
1. Räumliche Bewegungen:
   - 1.1 Kreiselung
   - 1.2 Starrkörperformel
   - 1.3 Die Kinemate (& deren Invarianten)
2. Der Freiheitsgrad

> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 3)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

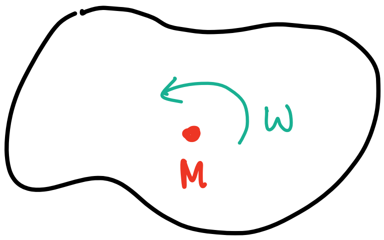
Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

0. Die Rotationsgeschwindigkeit ($\vec{\omega}$ und ω):

$\vec{\omega}$ ist der Rotationsvektor. Aber warte mal ... Was heisst überhaupt Rotationsvektor?

$\Rightarrow$ Dieser ist folgendermassen definiert:

Sagen wir wir haben einen SK, der um M dreht:

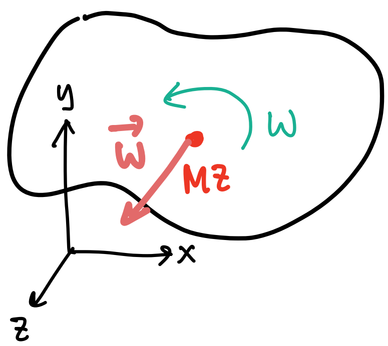


Dann zeichnen wir auch immer direkt ω ein.
ω ist der Betrag von $\vec{\omega}$, sprich

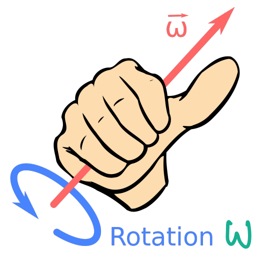
$$\omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Doch wo ist $\vec{\omega}$?

$\Rightarrow$

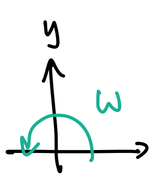


$\vec{\omega}$ ist nach der rechten-Hand-Regel mit ω verwandt. In diesem Bsp. ist $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

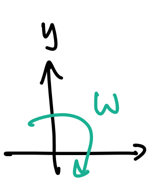


$\vec{\omega}$ zeichnen wir in 2D-Aufgaben schlicht nicht ein, weil dieser irrelevant ist (wenn $\vec{\omega}$ nur 1 Komponente hat brauchen wir nur ω für unsere Berechnungen) & weil es nicht einfach ist ihn einzuzeichnen (kommt aus dem Blatt raus / geht in das Blatt hinein)

Merkt euch einfach:

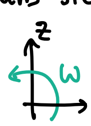


$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

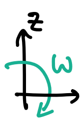


$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}$

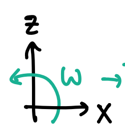
Falls sie gemein sind:



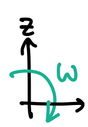
$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix}$



$\rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}$

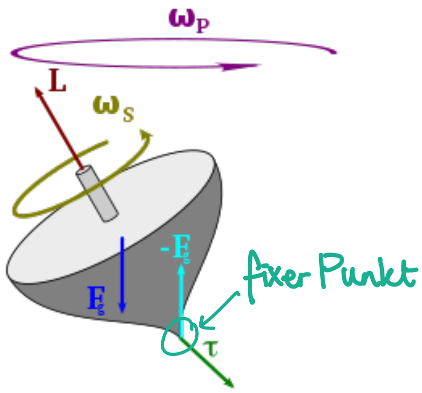
usw.

1. Räumliche Bewegungen:

Letzte Woche haben wir ebene Bewegungen (Rotation / Translation in der Ebene), einfach gesagt Bewegungen in 2D kennengelernt. Diese Woche beschäftigen wir uns mit räumlichen Bewegungen – also Bewegungen in 3D.

Beispiel: Kreiselung

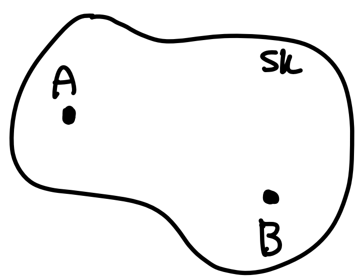
Ist nichts anderes als eine Rotation, aber $\vec{\omega}$ "rotiert" auch. Dabei bleibt nur ein Punkt des SK fixiert.



Eine Kreiselung ist momentan eine Rotation!

1.1 Die Starrkörperformel (SK-Formel, a.k.a. ABBA-Formel):

Ist die allgemeine Formel für eine Starrkörper-Bewegung. D.h., alle SK-Bewegungen erfüllen diese Formel!

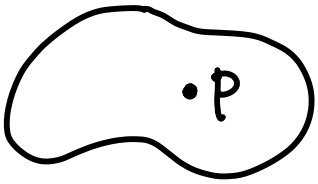


Translation:

reine Rotation (um den Pkt. B):

1.2 Die Kinemate: beschreibt die Bewegung eines SK komplett!

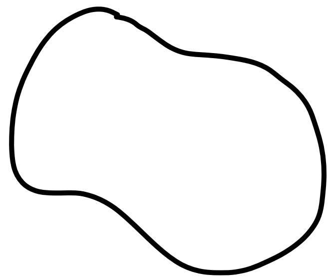
Sie ist immer bezogen auf einem ausgewählten Punkt eines SK.



Kinemate von Punkt P =

1.3 Invarianten der Kinemate:

"Invariant" heisst "es ändert sich nicht". Folglich sind die Invarianten der Kinemate für alle Punkte auf einem Starrkörper gleich.



1. Invariante:

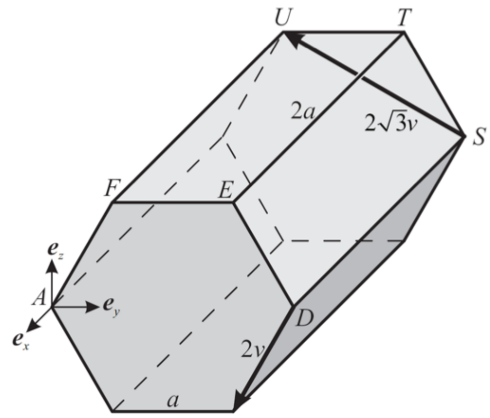
2. Invariante:

Übersicht der Invarianten der Kinemate & entsprechender Bewegungszustand:

	$I_2 = 0$	$I_2 \neq 0$
$I_1 = 0$		—
$I_1 \neq 0$		

Beispielaufgabe: Serie 3, Aufgabe 2

2. [2] Es sei ein gerades, hexagonales Prisma gegeben. Die Länge des Prismas beträgt $2a$ und die Seitenlängen der hexagonalen Grundfläche betragen a. Zu einem gewissen Zeitpunkt hat die Geschwindigkeit des Punktes S den Betrag $2\sqrt{3}v$ und zeigt in Richtung $\mathbf{r}_{SU}$, und die Geschwindigkeit im Punkt D hat den Betrag $2v$ und zeigt in Richtung $\mathbf{r}_{DC}$. Zusätzlich ist zu diesem Zeitpunkt bekannt, dass in E die Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung verschwindet und die Ebene $FETU$ parallel zur $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$-Ebene liegt.



1. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes der projizierten Geschwindigkeiten für diesen momentanen Bewegungszustand die Geschwindigkeit im Punkt E.
2. Bestimmen Sie die Kinemate im Punkt E.
3. Von welchem Typ ist dieser momentane Bewegungszustand? Geben Sie eine mathematische Begründung an.

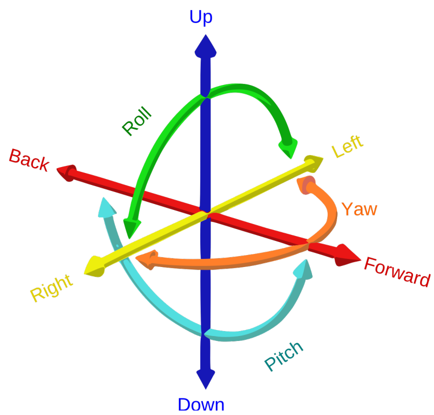
2. Der Freiheitsgrad:

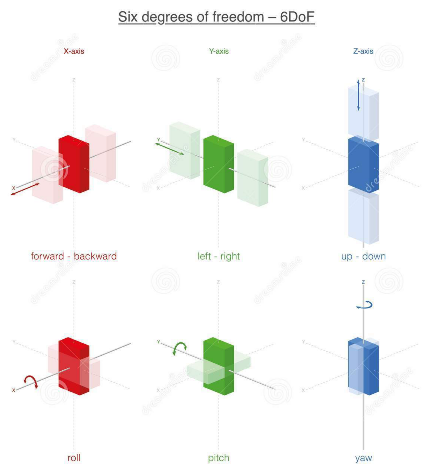
Der Freiheitsgrad ist die Anzahl unabhängiger Bewegungen, welcher ein Körper oder System machen kann.

Um den Freiheitsgrad eines Systems zu bestimmen, muss man salopp gesagt sich überlegen, in welche Richtungen sich das System unabhängig bewegen kann.
(Keine Angst es gibt auch eine Formel dafür :))

Schauen wir uns zuerst einfach ein einzelner freier Körper im Raum an:

Freier Körper in 3D:

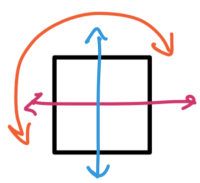




Freiheitsgrad =

↑ kann sich in all diese Richtungen bewegen! Bzw. alle Bewegungen sind Kombinationen von diesen 6!

Freier Körper in 2D:

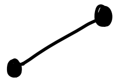
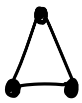
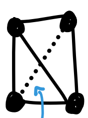


→ kann sich in 3 "Richtungen" (x, y, Rotation) bewegen

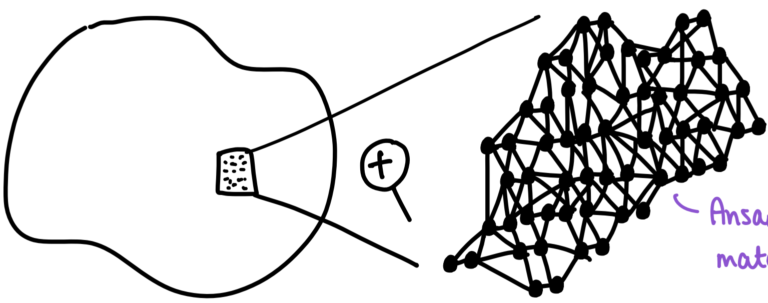
Freiheitsgrad =

Nun wollen wir uns anschauen, wie man den Freiheitsgrad eines Systems (aus mehreren SK & Bindungen) bestimmen kann. Dafür haben wir eine nützliche Formel:

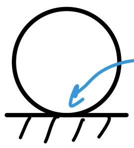
Beispiele:

	2D	3D
• (ein Punkt)	$n=$	$n=$
	$n=$ $b=$ $\Rightarrow f=$	$n=$ $b=$ $\Rightarrow f=$
	$n=$ $b=$ $\Rightarrow f=$	$n=$ $b=$ $\Rightarrow f=$
 diese Bindung schränkt in 2D den Freiheitsgrad nicht weiter ein → nicht mitzählen!	$n=$ $b=$ $\Rightarrow f=$	$n=$ $b=$ $\Rightarrow f=$
⋮	⋮	⋮

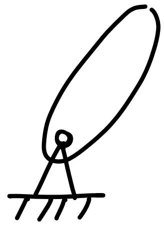
↳ wir haben hier eigentlich bewiesen, dass ein SK in 2D den Freiheitsgrad 3, in 3D den Freiheitsgrad 6 hat! (ein SK ist eine Ansammlung von zusammengebundenen materiellen Punkten)



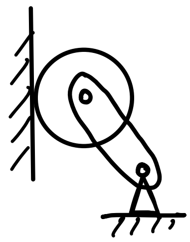
Beispiel: mehrere SK in 2D:



n =
b =
=> f =



n =
b =
=> f =



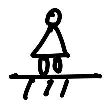
n =
b =
=> f =

Tipp: b bestimmen: überlege, in welche Richtungen der Körper sich nicht mehr bewegen kann.

Die wichtigsten Bindungen (für die Serie 3):

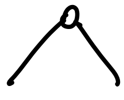
Lager:

b=

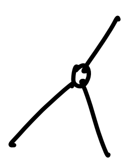


b=

Gelenke: (Anzahl verbundene Starrkörper − 1) · 2



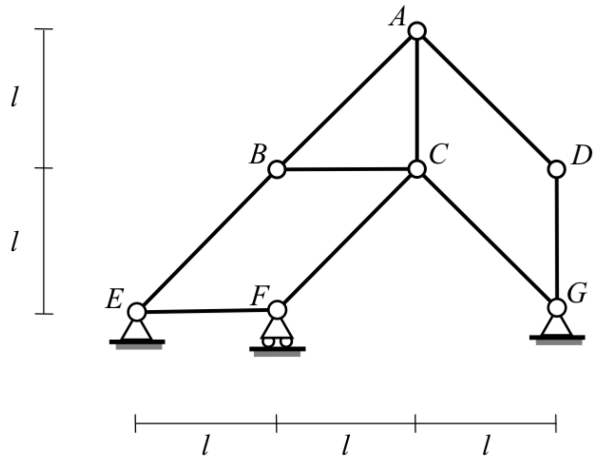
b=



b=

Beispielaufgabe: Serie 3, Aufgabe 7

8. Das folgende System besteht aus 9 gelenkig miteinander verbundenen Stäben, siehe Skizze. Die Punkte E und G sind fix und Punkt F kann sich nur horizontal bewegen. Die Längen der Stäbe sind in der Skizze angegeben.



Was ist der Freiheitsgrad des Systems?

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

Zusatz: nützliche Rechenregeln für die Serie:

Good to know: die Grassmann-Identität für das Kreuzprodukt:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} \\ (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a} \end{aligned}}$$

evtl. werdet ihr das in der Serie benutzen

Good to know: $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2}$

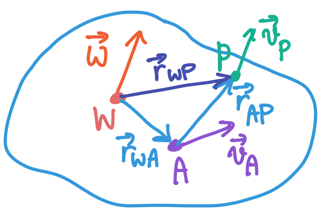
Why? $\rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}=a_x^2+a_y^2+a_z^2=a^2$

Erinnerung: $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

Good to know: alles, was in 3D gilt, gilt auch in 2D! (aber nicht zwingend umgekehrt).

Für Interessierte:

* Warum beschreibt die Kinemate die Bewegung eines SKs komplett?



Wenn wir $\vec{\omega}$ und die Geschwindigkeit eines Punktes auf dem SK kennen, können wir daraus die Geschwindigkeiten <u>aller</u> Pkte auf dem SK bestimmen!

Bsp: Seien $\vec{\omega}$ und $\vec{v}_A$ bekannt. Dann: $\vec{v}_A=\vec{\omega}\times\vec{r}_{WA}$

Was ist $\vec{v}_P$ für P beliebig, P $\in$ SK? $\rightarrow$ $\vec{v}_P=\vec{\omega}\times\vec{r}_{WP}$

nun ist $\vec{r}_{WP}=\vec{r}_{WA}+\vec{r}_{AP}$ $\rightarrow$ $\vec{v}_P=\vec{\omega}\times(\vec{r}_{WA}+\vec{r}_{AP})=\underbrace{\vec{\omega}\times\vec{r}_{WA}}_{\vec{v}_A}+\vec{\omega}\times\vec{r}_{AP}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}_{AP}$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{v}_P=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}_{AP}}_{}$$

und das ist nichts anderes als die SK-Formel! :)

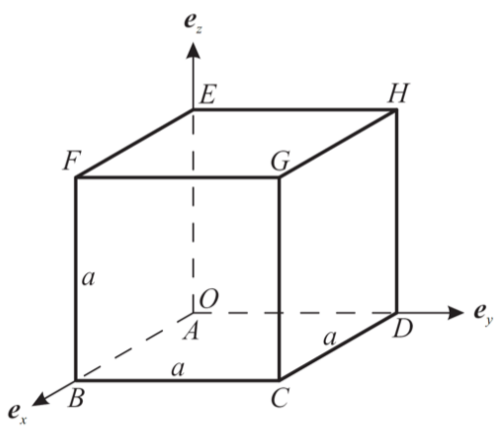
Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 3)

→ Aufgabe 2 und 8 in Übungsstunde gelöst :)

1. [1] Ein Würfel führt eine reine Rotation bezüglich des Bezugssystems $\{O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ aus. In der gezeichneten speziellen Lage des Würfels fallen die Kanten AB, AD und AE mit den Achsen $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, bzw. $\mathbf{e}_z$ des Bezugssystems zusammen. In dieser speziellen Lage sind die Geschwindigkeiten der Punkte G bzw. H in kartesischen Komponenten gegeben:

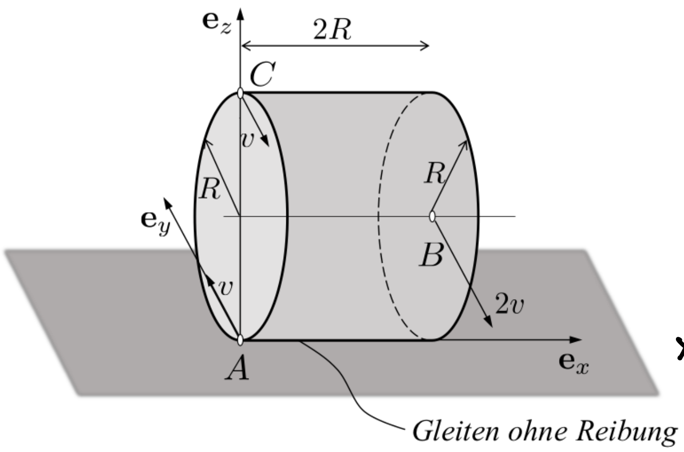
$$\mathbf{v}_G = \begin{pmatrix} -v \\ v \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v}_H = \begin{pmatrix} v_{Hx} \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}$$

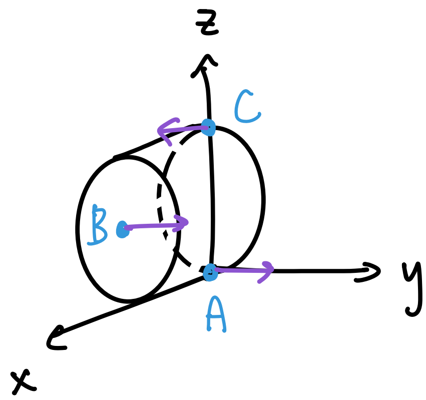
wobei die x-Komponente von $\mathbf{v}_H$ unbekannt ist.



1. Bestimmen Sie die x-Komponente von $\mathbf{v}_H$.
2. Bestimmen Sie die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ des Punktes A.

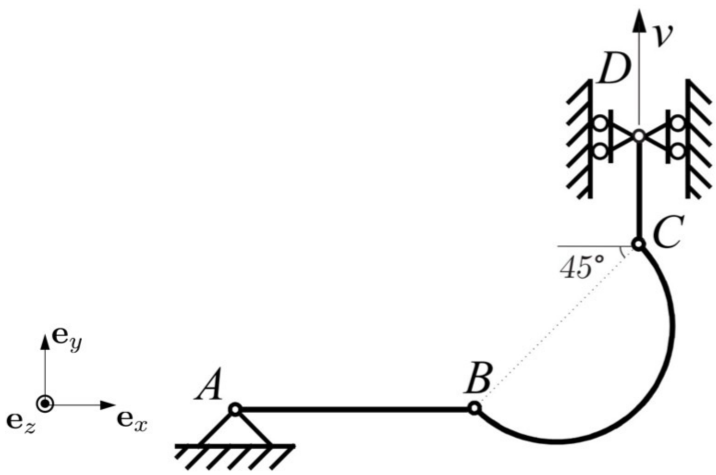
3. Auf der Ebene $z = 0$ (kartesisches Koordinatensystem) gleitet ein starrer Drehzylinder (Radius R, Länge $2R$) so, dass der Zylinder auf seiner Mantelfläche aufliegt. Der Bewegungszustand wird durch die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_A = v\mathbf{e}_y$, $\mathbf{v}_B = 2v\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{v}_C = -v\mathbf{e}_y$ der Punkte A, B und C beschrieben. Der Punkt A stimmt mit dem Ursprung des Koordinatensystems überein.





1. Zeigen Sie, dass die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ keine y-Komponente haben kann und daher die Bewegung eine momentane Rotation ist.
2. Welches $\boldsymbol{\omega}$ und welche momentane Rotationsachse hat der Zylinder?

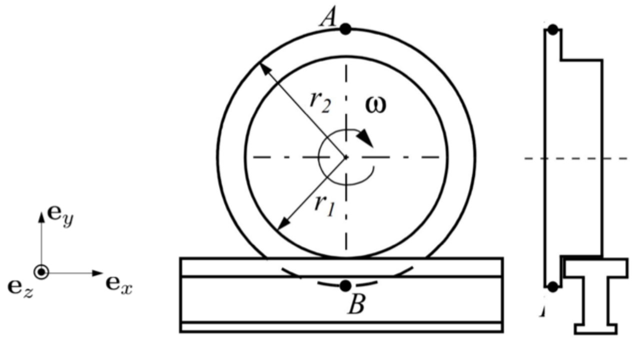
4. Die drei starren Stäbe AB, BC und CD sind reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden und entsprechend der Skizze gelagert. Stab BC ist ein Halbkreis mit Radius R. Die Schnelligkeit von Punkt B beträgt $|\mathbf{v}_B| = v$. Vom Punkt D weiss man, dass er sich mit der Geschwindigkeit v nach oben bewegt. Alle Stäbe bleiben in der gezeichneten Ebene.



Was für eine Bewegung beschreibt der Stab BC momentan?

5. Ein Eisenbahnrad rollt mit der Rotationsschnelligkeit ω ohne zu gleiten. Die Radien r_1 und r_2 sind gemäss Abbildung gegeben.

typische MC



Was ist die Geschwindigkeit des obersten Punktes A bzw. des untersten Punktes B des Radkranzes?

(a) $\mathbf{v}_A = (r_2 + r_1)\omega\,\mathbf{e}_x; \quad \mathbf{v}_B = -(r_2 - r_1)\omega\,\mathbf{e}_x$

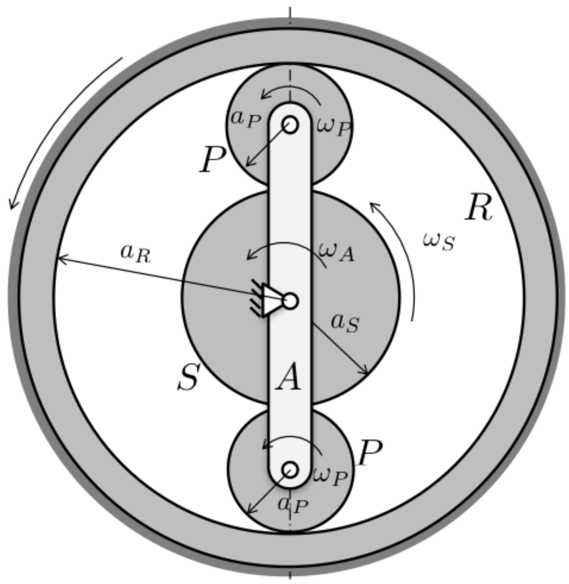
(b) $\mathbf{v}_A = (r_2 + r_1)\omega\,\mathbf{e}_x; \quad \mathbf{v}_B = (r_2 + r_1)\omega\,\mathbf{e}_x$

(c) $\mathbf{v}_A = r_2\omega\,\mathbf{e}_x + r_2\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \mathbf{v}_B = -r_1\omega\,\mathbf{e}_x + r_1\omega\,\mathbf{e}_y$

(d) $\mathbf{v}_A = 2r_2\omega\,\mathbf{e}_x; \quad \mathbf{v}_B = -2r_2\omega\,\mathbf{e}_x$

(e) $\mathbf{v}_A = 2r_2\omega\,\mathbf{e}_x; \quad \mathbf{v}_B = -r_1\omega\,\mathbf{e}_x$

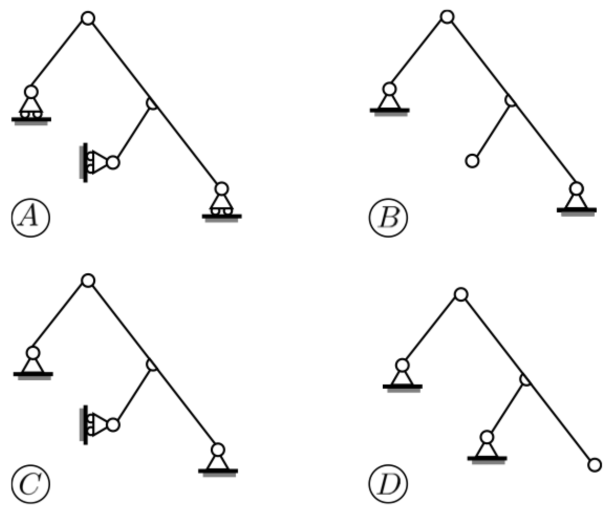
6. Betrachten Sie das unten skizzierte Planetengetriebe. Das Sonnen- (S), Planeten- (P) und Ringzahnrad (R) haben die entsprechenden Radii a_S, a_P und a_R (siehe Skizze). Der Stab A verbindet die zwei Planetenzahnräder und kann frei drehen. Das Ringzahnrad (R) ist fix und das Sonnenzahnrad (S) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_S. Die Winkelgeschwindigkeiten sind im Gegenuhrzeigersinn positiv definiert (siehe Skizze).



1. Was ist der Zusammenhang $\frac{\omega_P}{\omega_S}$ zwischen den Winkelgeschwindigkeiten des Planeten- und Sonnenzahnrades?
   (a) $\frac{\omega_P}{\omega_S} = -\frac{a_S}{2a_P}$
   (b) $\frac{\omega_P}{\omega_S} = \frac{a_S}{4a_P}$
   (c) $\frac{\omega_P}{\omega_S} = -\frac{a_S}{a_R+a_P}$
   (d) $\frac{\omega_P}{\omega_S} = \frac{a_P}{2a_S}$
   (e) $\frac{\omega_P}{\omega_S} = \frac{2a_R}{a_P}$

2. Was ist der Zusammenhang $\frac{\omega_P}{\omega_A}$ zwischen den Winkelgeschwindigkeiten der Planetenzahnräder und Stab A?
   (a) $\frac{\omega_P}{\omega_A} = 2$
   (b) $\frac{\omega_P}{\omega_A} = -1$
   (c) $\frac{\omega_P}{\omega_A} = -\frac{a_P}{a_P+a_S}$
   (d) $\frac{\omega_P}{\omega_A} = -\frac{a_P+a_S}{a_P}$
   (e) $\frac{\omega_P}{\omega_A} = \frac{2a_P}{a_P+a_S}$

7. Die gezeigten Systeme bestehen aus denselben 3 gelenkig verbundenen Stäben. Der einzige Unterschied zwischen den Systemen liegt in den unterschiedlichen Lagern.



Welche der gezeigten Systeme haben den Freiheitsgrad 2?

(a) Nur A.

(b) Alle.

(c) Nur D.

(d) Nur B und C.

(e) Nur A, B und D.