

Themen von Heute:

- > Teil 1: Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?
- > Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:
 1. Kraft
 2. Moment
 3. Leistung
- > Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Seite 4)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

⚠ Wichtig (st)e Formeln bisher:

SdpG: $\vec{v}'_A = \vec{v}'_B \Leftrightarrow \vec{v}_A \cdot \vec{e}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \vec{e}_{AB}$

SvM: $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MP}$ M : Momentanzentrum vom SK

↳ falls $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ (was in 2D immer der Fall ist)

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \omega \cdot \vec{r}_{MP}$$

SK-Formel: $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$ $\forall A, B \in$ eines Starrkörpers.

Kinematik (von Punkt P) = $\{\vec{v}_P, \vec{\omega}\}$

⚠ höchstens 1 Momentanzentrum und 1 Rotationsgeschwindigkeit ω pro Starrkörper.

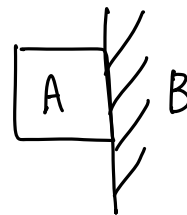
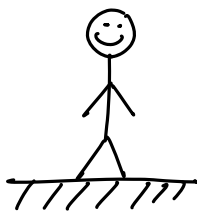
Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

1. **Kraft**: Kräfte machen sich durch ihre Wirkung auf Objekte bemerkbar. Sie hat immer einen Betrag, eine Richtung und einen Angriffspunkt. Man stellt sie als Vektoren dar:

Kräfte dürfen vektoriell addiert werden, wenn sie denselben Angriffspkt. haben:

Reaktionsprinzip: ← sehr wichtig

Kräfte wirken immer wechselseitig. Übt A eine Kraft F_A auf B aus, so übt B eine gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Kraft auf A aus:



⚠ Beide Kräfte haben dieselbe Wirkungslinie!

Definition: Die Resultierende :

2. Das Moment: Beschreibt die Drehwirkung einer Kraft auf einen Körper.
Sie ist ein Vektor & ist vom Bezugspunkt abhängig.

Moment von $\vec{F}_i$ bezüglich Punkt O:

Moment von $\vec{F}_i$ bezüglich Punkt A:

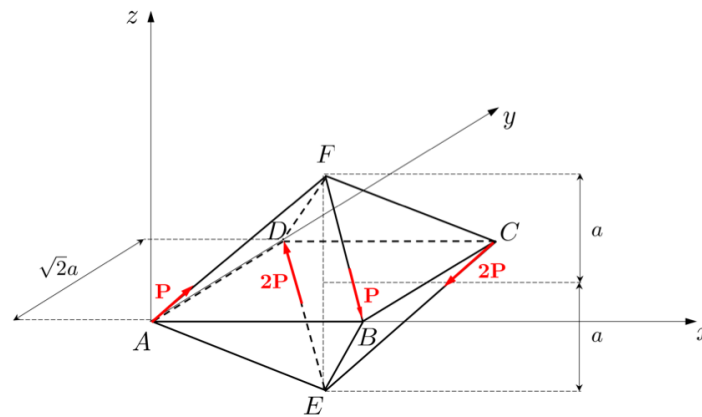
das resultierende Moment:

bezüglich O:

bezüglich A:

Beispielaufgabe: Serie 4 Aufgabe 2 Teilaufgabe 1

2. Auf einem Oktaeder (Seitenlänge $\sqrt{2}a$, Höhe $2a$) wirken in den Eckpunkten die in der Skizze eingezeichneten Kräfte.



1. Bestimmen Sie die Resultierende.
2. Bestimmen Sie das resultierende Moment bezüglich A und E .
3. Bestimmen Sie zwei zusätzliche, in E und in F wirkende Kräfte $\mathbf{F}_E$ und $\mathbf{F}_F$ so, dass sich die aus allen Kräften bestehende Kräftegruppe auf ein einzelnes Moment $\mathbf{M} = (2aP, 0, 0)^T$ in x -Richtung reduzieren lässt. Von der Kraft $\mathbf{F}_E$ wissen wir, dass sie *keine* z -Komponente hat.

Die Transformationsregel: Wenn das resultierende Moment bez. eines Punktes & die Resultierende bekannt ist, kann das resultierende Moment bez. ein anderer Pkt. mit dieser Formel bestimmt werden:

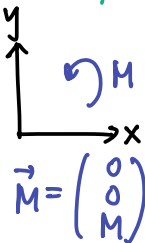
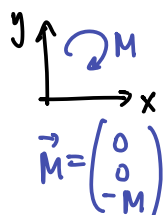


Good to know: Wenn $\vec{R}=0$, ist das Moment unabhängig vom Bezugspunkt.

Good to know: Wenn $\vec{r} \perp$ Wirkungslinie von $\vec{F}$, kann der Betrag des Moments so berechnet werden:

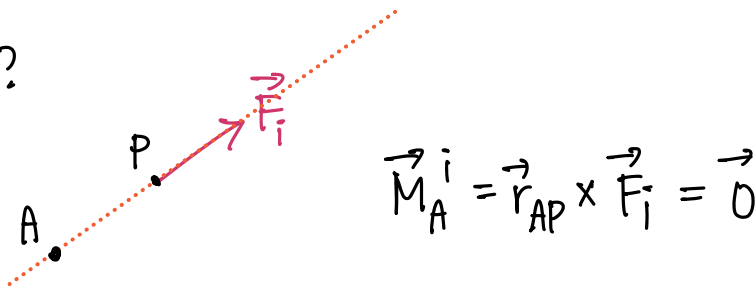


Tipp: Wenn ihr das Moment einzeichnen müsst: die rechte-Hand-Regel benutzen: (analog zu $\vec{\omega}$, ω)



Good to know: Wenn die Wirkungslinie einer Kraft durch einen Punkt geht, dann ist das Moment dieser Kraft bez. diesen Punkt 0.

Warum?



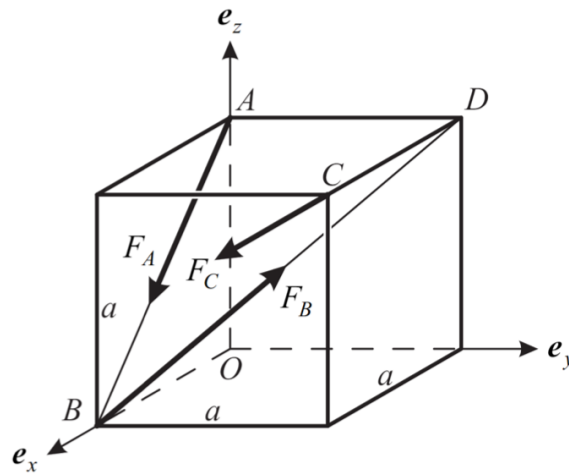
ausserdem: Wenn man physikalisch überlegt kann man auch sehen, dass eine solche Kraft keine Drehwirkung auf diesen Punkt hat.

Die **Dyname** eines Punktes P auf einem Starrkörper ist:



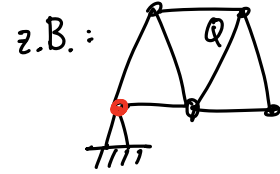
Beispielaufgabe: Serie4 Aufgabe1 Teilaufgabe 1

1. ¹ An einem Würfel mit der Seitenlänge a greifen die gezeichneten Kräfte vom Betrag F_A , F_B und F_C an. Die Kraft $\mathbf{F}_C$ verläuft parallel zur $\mathbf{e}_x$ -Achse.

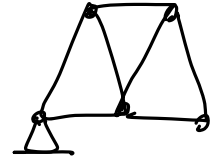


1. Berechnen Sie die Momente dieser Kräfte bezüglich der Punkte O und A .
2. Bestimmen Sie die Abstände der drei Kraft-Wirkungslinien von O und A . Berechnen Sie daraus die Beträge der Momente und vergleichen Sie diese mit den Beträgen der oben berechneten Momente.

3. Leistung:



Die Gesamtleistung:



Good to know: Bei einer reinen Rotation gilt



Good to know:

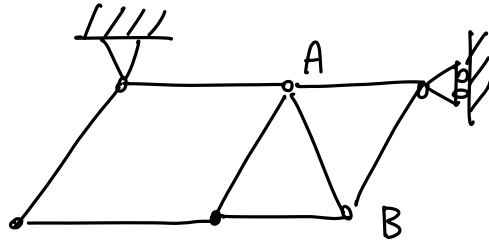
Wenn alle Kräfte & Momente nur an einem SK angreifen:



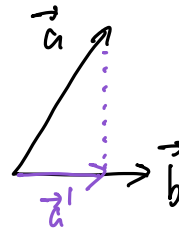
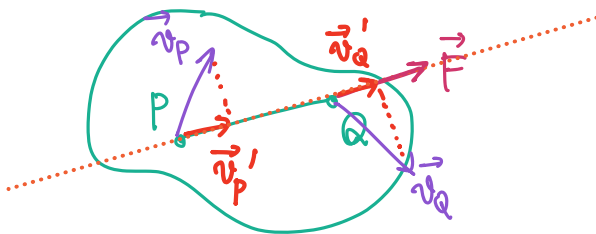
↳ nützlich wenn die Kinematik $\{\vec{v}_A, \vec{\omega}\}$ & das Moment $\vec{M}_A$ bez. eines Punktes bekannt ist.

Wichtig: Für die Bestimmung von Momenten & Leistungen darf man die Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschieben. Wählt deswegen einen Punkt aus, bei der die Geschwindigkeit einfach zu bestimmen ist.

Bsp:



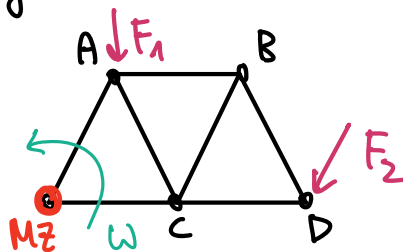
↳ Warum? → Wegen SdpG!



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Kochrezept Gesamtleistung berechnen:

1. Geschwindigkeiten der Punkte berechnen, auf welche eine Kraft angreift:



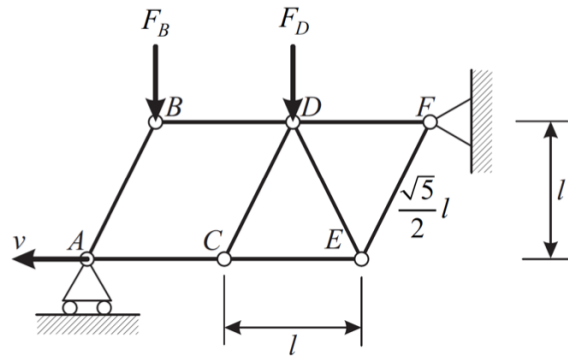
→ $\vec{v}$ von A und D bestimmen.
 $\vec{v}$ von B und C interessieren uns nicht für die Berechnung der Gesamtleistung!

2. Mit den in 1. bestimmten Geschwindigkeiten die Leistung berechnen.

$$P_{\text{tot}} = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_A + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_D$$

Beispielaufgabe: Serie 4 Aufgabe 4

4. ³ Der abgebildete ebene Mechanismus besteht aus acht Stäben, welche miteinander gelenkig verbunden und in A sowie F gelagert sind. Die horizontalen Stäbe haben alle die Länge l , die schiefen Stäbe die Länge $\frac{\sqrt{5}l}{2}$. Das horizontal verschiebbare Auflager in A bewegt sich momentan mit der Schnelligkeit v nach links.

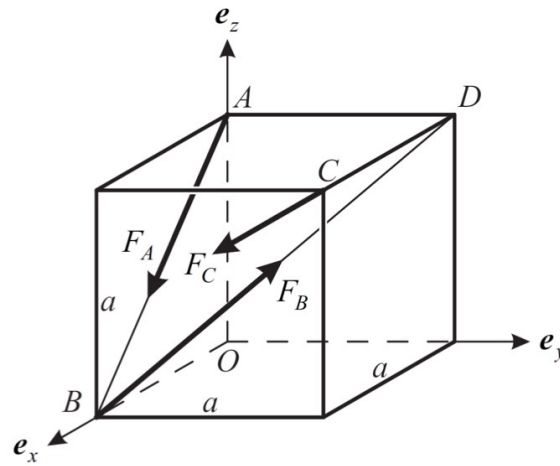


- Bestimmen Sie den momentanen Bewegungszustand des Systems (Momentenzentren und Rotationsschnelligkeiten aller Starrkörper).
- Berechnen Sie die Gesamtleistung der Lasten F_B und F_D .

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 4

↳ Aufgaben 1.1, 2.1, 4, 5.1, 7.1 in Ü gelöst :)

1. ¹ An einem Würfel mit der Seitenlänge a greifen die gezeichneten Kräfte vom Betrag F_A, F_B und F_C an. Die Kraft $\mathbf{F}_C$ verläuft parallel zur $\mathbf{e}_x$ -Achse.



in Ü gelöst :)

noch machen!

1. Berechnen Sie die Momente dieser Kräfte bezüglich der Punkte O und A .
2. Bestimmen Sie die Abstände der drei Kraft-Wirkungslinien von O und A . Berechnen Sie daraus die Beträge der Momente und vergleichen Sie diese mit den Beträgen der oben berechneten Momente.

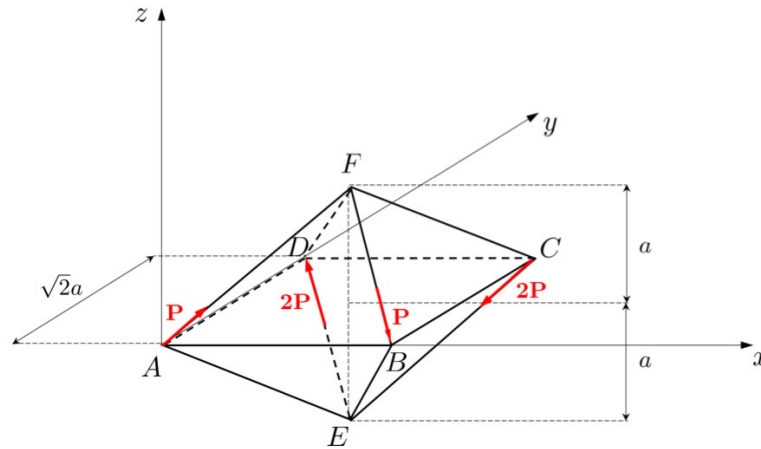
2. Abstand einer Geraden AB zum Punkt C :

$$d_c^{AB} = |\vec{r}_{CA} \times \vec{e}_{AB}| = |\vec{r}_{CB} \times \vec{e}_{AB}|$$

oder aus Skizze ablesen wo möglich :)

$M_0 = \pm d F$, falls d die Wirkungsklinie von F .

2. Auf einem Oktaeder (Seitenlänge $\sqrt{2}a$, Höhe $2a$) wirken in den Eckpunkten die in der Skizze eingezeichneten Kräfte.



in Ü gelöst :)

1. Bestimmen Sie die Resultierende.
2. Bestimmen Sie das resultierende Moment bezüglich A und E.
3. Bestimmen Sie zwei zusätzliche, in E und in F wirkende Kräfte $\mathbf{F}_E$ und $\mathbf{F}_F$ so, dass sich die aus allen Kräften bestehende Kräftegruppe auf ein einzelnes Moment $\mathbf{M} = (2aP, 0, 0)^T$ in x-Richtung reduzieren lässt. Von der Kraft $\mathbf{F}_E$ wissen wir, dass sie *keine* z-Komponente hat.

2. In Formel einsetzen und berechnen.

3. Ziel ist :

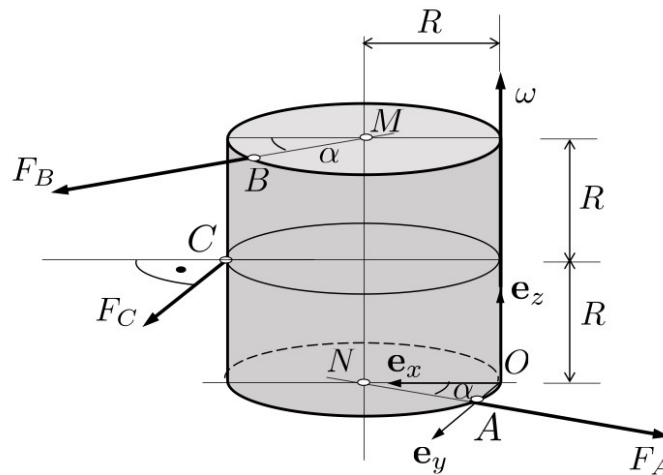
$$\vec{R}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} 2aP \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Was muss für $\vec{F}_E = \begin{pmatrix} F_{Ex} \\ F_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \\ F_{Fz} \end{pmatrix}$ gelten, damit

das erfüllt ist ? Bestimme die unbekannten Komponenten

$F_{Ex}, F_{Ey}, F_{Fx}, F_{Fy}, F_{Fz}$!

3. ² Ein Kreiszylinder mit dem Radius R und der Höhe $2R$ dreht sich mit der Rotationsgeschwindigkeit ω um die z -Achse. Auf ihn wirken die drei Kräfte $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$, und $\mathbf{F}_C$ mit den Beträgen F , F bzw. $\sqrt{2}F$. Die beiden Kräfte $\mathbf{F}_A$ und $\mathbf{F}_B$ greifen radial unter einem Winkel von $\alpha = 45^\circ$ an. Die Kraft $\mathbf{F}_C$ verläuft parallel zur $\mathbf{e}_y$ -Achse.



Die Leistungen dieser Kräfte können auf zwei Arten bestimmt werden:

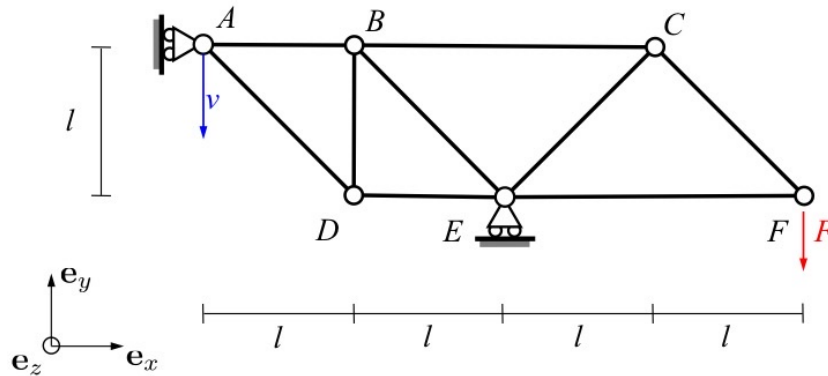
1. Zur Berechnung der Leistungen dürfen die Kräfte längs ihrer Wirkungsklinien verschoben werden. Wählen Sie Punkte auf den Wirkungsklinien, deren Geschwindigkeiten einfach zu berechnen sind. Ermitteln Sie daraus die Leistungen der drei Kräfte.
2. Berechnen Sie die Momente der Kräfte bezüglich O und daraus die Leistungen.

wirklich machen!

Dauert ein bisschen lange, aber gute Übung.

Alle Definitionen in den Ü-slides von heute.

5. Das unten skizzierte System besteht aus 9 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen sind in der Skizze angegeben. Punkt A ist durch ein Rolllager auf eine vertikale und Punkt E auf eine horizontale Bewegung beschränkt. Punkt A bewegt sich mit der Geschwindigkeit v nach unten und die Kraft F greift am Punkt F an (siehe Skizze).



in Ü gelöst

1. Was ist der Freiheitsgrad des Systems und aus wie vielen starren Körpern besteht es?

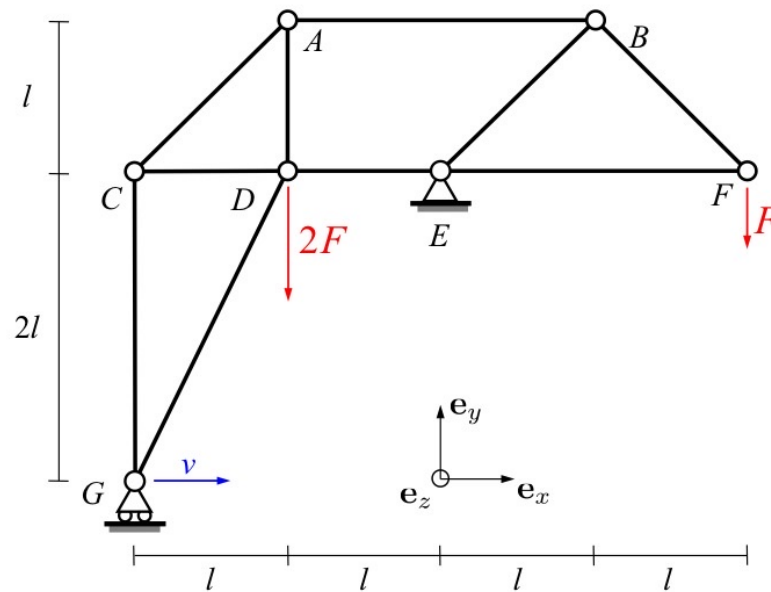
- (a) Freiheitsgrad = 0, Anzahl Starrkörper = 9
- (b) Freiheitsgrad = 1, Anzahl Starrkörper = 1
- (c) Freiheitsgrad = 1, Anzahl Starrkörper = 3
- (d) Freiheitsgrad = 1, Anzahl Starrkörper = 4
- (e) Freiheitsgrad = 2, Anzahl Starrkörper = 1

2. Wie gross ist die Leistung der Kraft F ?

- (a) $P = 0$
- (b) $P = -\frac{1}{2}vF$
- (c) $P = -\frac{\sqrt{5}}{2}vF$
- (d) $P = -vF$
- (e) $P = \frac{\sqrt{5}}{2}vF$

ω bestimmen $\rightarrow \vec{v}_F$ bestimmen $\rightarrow P$ bestimmen.

6. Das unten skizzierte System besteht aus 10 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen sind in der Skizze angegeben. Der Punkt G bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in positive x-Richtung und der Punkt E ist gelenkig gelagert. Zwei Kräfte mit Beträgen $2F$ und F wirken an den Punkten D bzw. F in negative y-Richtung.



1. Identifizieren Sie alle starren Körper im System. → Dreiecke?

2. Berechnen Sie die Geschwindigkeit im Punkt D. → SvM

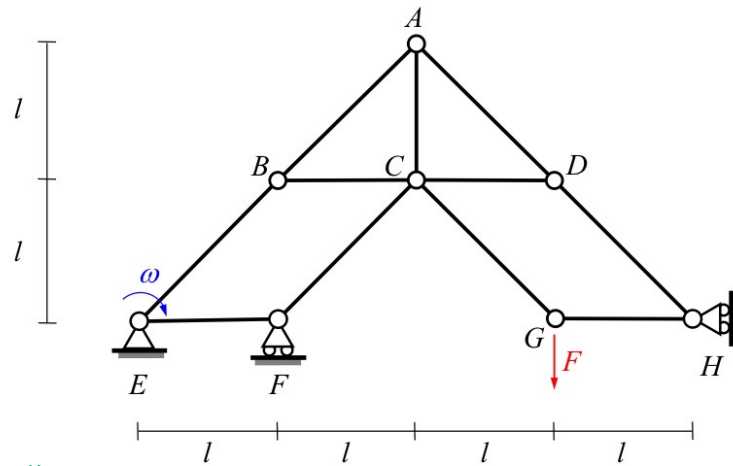
3. Berechnen Sie die Geschwindigkeit im Punkt F. → SdpG & SvM.

4. Was ist die Gesamtleistung des Systems?

geometrisch argumentieren
& Symmetrien ausnutzen!

$$\hookrightarrow P_{\text{tot}} = \sum_i P_i$$

7. Das unten skizzierte System besteht aus 11 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen sind in der Skizze angegeben. Punkt E ist gelenkig gelagert, die Punkte F und H sind durch Rolllager auf eine horizontale bzw. vertikale Bewegung beschränkt. Die Kraft F greift im Punkt G an und der Stab BE hat die Winkelgeschwindigkeit ω .



in Ü gelöst :)

1. Was ist die Winkelgeschwindigkeit ω_{GH} vom Stab GH?

- (a) $\omega_{GH} = 0$
- (b) $\omega_{GH} = \omega$
- (c) $\omega_{GH} = -\omega$
- (d) $\omega_{GH} = 2\omega$
- (e) $\omega_{GH} = \frac{\omega}{2}$

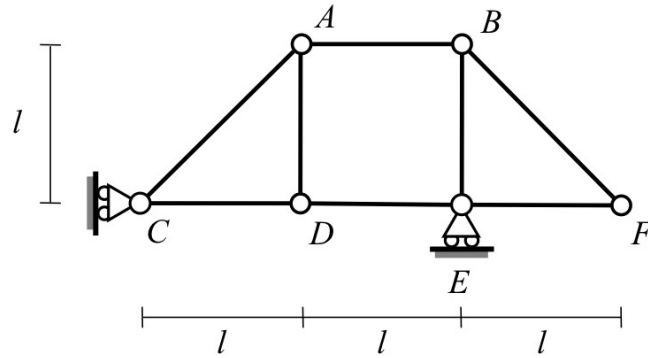
2. Wie gross ist die Gesamtleistung des Systems?

- (a) $P = 0$
- (b) $P = -vF$
- (c) $P = \omega l F$
- (d) $P = -\omega l F$
- (e) $P = 2\omega l F$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

siehe Kochrezept weiter oben
in den Ü-slides

8. Das folgende System besteht aus 8 gelenkig miteinander verbundenen Stäben (siehe Skizze). Die Punkte C und E sind durch Rolllager auf eine horizontale bzw. vertikale Bewegung beschränkt. Die Längen der Stäbe sind in der Skizze angegeben.



9. Wie gross ist der Freiheitsgrad des Systems?

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) 4

$$f = n - b$$

n : Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Körper

b : # linear unabhängige Bindungsgleichungen