Übung 5

25.10.2022
Lina De Windt

Themen von Heute:

> Teil 1: Fragen & Inputs zu Themen / Aufgaben von letzter Woche

> Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche:

1. Äquivalenz & Reduktion von Kräftegruppen
   - 1.1 Charakterisierung von Kräftegruppen
   - 1.2 Die Dyname & ihre Invarianten
   - 1.3 Statische Äquivalenz
   - 1.4 Reduktion von Kräftegruppen

> Teil 3: Übungsaufgaben lösen (Serie 5)

Teil 1: Fragen & Inputs zu Themen von letzter Woche

⚠ Wichtig(st)e Formeln bisher:

SdpG: $\boxed{\vec{v}_A' = \vec{v}_B'} \iff \vec{v}_A \cdot \vec{e}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \vec{e}_{AB}$

SvM: $\boxed{\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MP}}$ M: Momentanzentrum vom SK

↳ falls $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ (was in 2D immer der Fall ist)

$\Rightarrow \boxed{v_P = \omega \cdot r_{MP}}$

SK-Formel: $\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}}$ $\forall A, B \in$ eines Starrkörpers.

Kinemate (von Punkt P) $= \boxed{\{\vec{v}_P, \vec{\omega}\}}$

⚠ höchstens 1 Momentanzentrum und 1 Rotationsgeschwindigkeit ω pro Starrkörper.

Resultierende: $\boxed{\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i}$

Moment (immer bezüglich 1 ausgewählter Punkt!): $\boxed{\vec{M}_O^P = \vec{r}_{OP} \times \vec{F}_P}$

Transformationsregel: $\boxed{\vec{M}_P^{tot} = \vec{M}_O^{tot} + \vec{r}_{PO} \times \vec{R}}$

"Intuition" für Moment:

Torque ← auf Deutsch: (Dreh-) Moment

From Wikipedia, the free encyclopedia

For other uses, see Torque (disambiguation).

F

In physics and mechanics, **torque** is the rotational equivalent of linear force.[1] It is also referred to as the **moment**, **moment of force**, **rotational force** or **turning effect**, depending on the field of study. It represents the capability of a force to produce change in the rotational motion of the body. The concept originated with the studies by Archimedes of the usage of levers, which is reflected in his famous quote: "*Give me a lever and a place to stand and I will move the Earth*". Just as a linear force is a push or a pull, a torque can be thought of as a twist to an object around a specific axis. Torque is defined as the product of the magnitude of the force and the perpendicular distance of the line of action of a force from the axis of rotation. The symbol for torque is typically $\boldsymbol{\tau}$, the lowercase Greek letter *tau*. When being referred to as moment of force, it is commonly denoted by M.

→ Energie

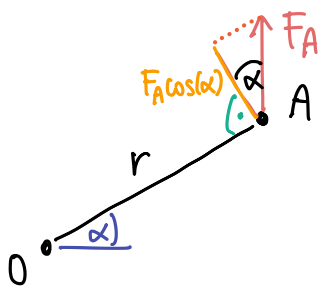
* Energy: "ability to do work, which is the ability to exert a force causing displacement of an object"

→ d.h.: es macht Sinn, dass Energie und Moment dieselbe Einheit haben! :)

Good to know (nicht direkt wichtig für TechMech, aber sonst schon :))

phys. Grösse	Formelzeichen	Einheit	(allgemeine) Formel
Kraft	F	$1N = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}$	$F = m \cdot a$
Arbeit (= Änderung der Energie)	W	$1 N{\cdot}m = 1J = 1Ws = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} d\vec{s}$
Moment (achtung auf english Torque)	M	$1 N{\cdot}m = 1J$	$\vec{M}_0^P = \vec{r}_{0P} \times \vec{F}_P$
Leistung	P	$1W = 1\frac{J}{s} = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^3} = VA$ (W: Watt)	$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

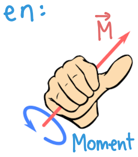
Good to know: Momente berechnen in 2D:



die Komponente der Kraft, die senkrecht auf $\vec{r}$ steht

$$M_0^A = r \underbrace{F_A \cos(\alpha)}$$

→ dann Richtung mit der rechten-Hand-Regel bestimmen:



$$\rightarrow \vec{M}_0^A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r F_A \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Check: $\vec{M}_0^A = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_A \cdot r\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$\vec{M}$ hat in 2D immer nur eine Komponente!

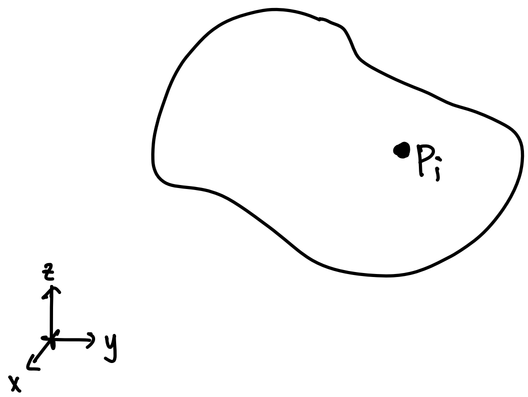
Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

1. Äquivalenz & Reduktion von Kräftegruppen

Als erstes müssen wir einige Begriffe kennenlernen:

1.1 Charakterisierung von Kräftegruppen:

Kräftegruppe: Ist eine Sammlung von Kräften, die an einem Körper angreifen.

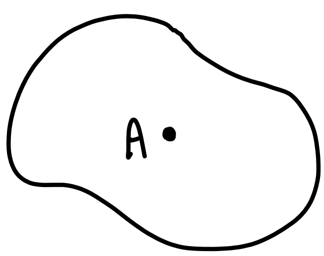


P_i:

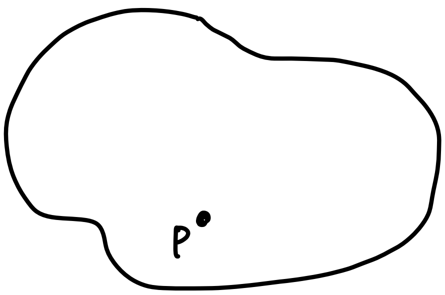
$\vec{r}_i$:

Zentrale Kräftegruppe:

Wenn die Wirkungslinien aller Kräfte einer Kräftegruppe durch einen Punkt gehen



Kräftepaar: besteht aus 2 entgegengesetzt gerichtete Kräfte gleichen Betrags.



Nullsystem / System im Gleichgewicht:

Eine Kräftegruppe ist ein Nullsystem (bzw. das System (d.h. Körper und Kräftegruppe) ist im Gleichgewicht) wenn:

und

Symbolisch: $\boxed{\{\vec{F}_i\} \Leftrightarrow 0}$

1.2 Die Dyname einer Kräftegruppe ist definiert als:

(analog zur Kinemate in Kinematik)

Eine Kräftegruppe kann immer auf ihre Dyname reduziert werden.
Analog zur Kinemate beschreibt die Dyname eine Kräftegruppe komplett & besitzt 2 Invarianten:

1. Invariante:

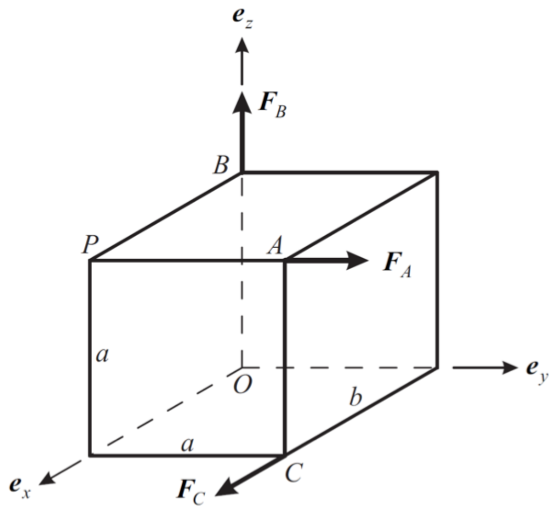
Erinnerung: Invariante = überall gleich auf SK.

2. Invariante:

Nun stellt sich die Frage, wann 2 Kräftegruppen an einem SK dieselbe Wirkung haben. Dann heissen diese Kräftegruppen (statisch) äquivalent.

Beispielaufgabe: Serie 5 Aufgabe 1.1

1. [1] Die Kräfte $\mathbf{F}_A = F\mathbf{e}_y$, $\mathbf{F}_B = F\mathbf{e}_z$, und $\mathbf{F}_C = F\mathbf{e}_x$ greifen gemäss Abbildung an einem starren Quader an (Kantenlängen b, a, a).



1. Berechnen Sie die Dyname der Kräftegruppe in O.
2. Berechnen Sie die Dyname der Kräftegruppe in P.
3. Wie muss das Verhältnis $\frac{a}{b}$ gewählt werden, damit sich die Kräftegruppe auf eine Einzelkraft reduzieren lässt?

1.3 Statische Äquivalenz:

<u>Definition:</u> 2 Kräftegruppen sind statisch äquivalent, wenn ihre Gesamtleistungen gleich sind:

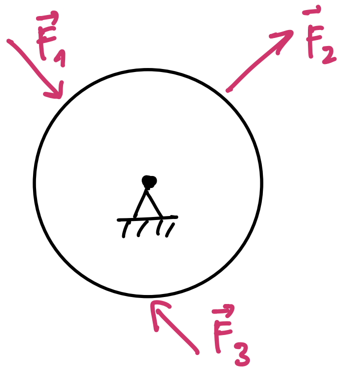
$\forall$ SK-Bewegungen

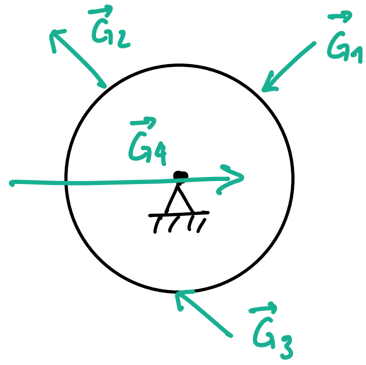
Doch was folgt daraus?

D.h. in Kürze:

⚠ Wenn 2 Kräftegruppen in einem beliebigen Punkt die ______ haben, sind sie ______

Bsp:





$\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$ $\{\vec{G}_i\} = \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3, \vec{G}_4\}$

$\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_i\}$ sind verschiedene Kräftegruppen, die auf denselben SK wirken.

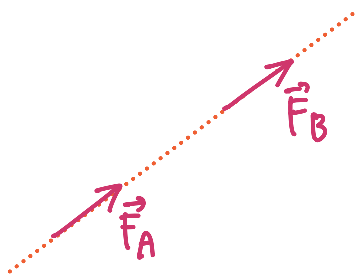
Falls $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{R}_2 = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \vec{G}_4$ <u>und</u>
$\vec{M}_p\{\vec{F}_i\} = \vec{M}_p\{\vec{G}_i\}$, dann sind $\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_i\}$ statisch äquivalent.

Bem: Statische äquivalenz von 2 Kräften:

2 Kräfte $\vec{F}$ und $\vec{G}$ sind statisch äquivalent wenn:

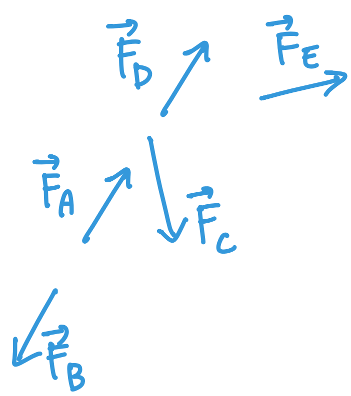
$\vec{F} = \vec{G}$ <u>und</u> Wirkungslinie von $\vec{F}$ = Wirkungslinie von $\vec{G}$

Bsp:



$\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ sind statisch äquivalent

Quiz: Welche Kräfte sind statisch äquivalent?



1.4 Reduktion von Kräftegruppen

Charakterisierung einer Kräftegruppe mittels der (Invarianten der) Dyname:

Kräftepaar ($\hat{=}$ Moment): $\vec{R}=0$ und $\vec{M}_P \neq 0$

Einzelkraft: $\vec{R} \neq 0$ und $I_2 = 0$

Nullsystem: $\vec{R} = 0$ und $\vec{M}_P = 0 \quad \forall P \in SK$

Schraube: $I_2 \neq 0 \quad (\vec{R} \neq 0)$

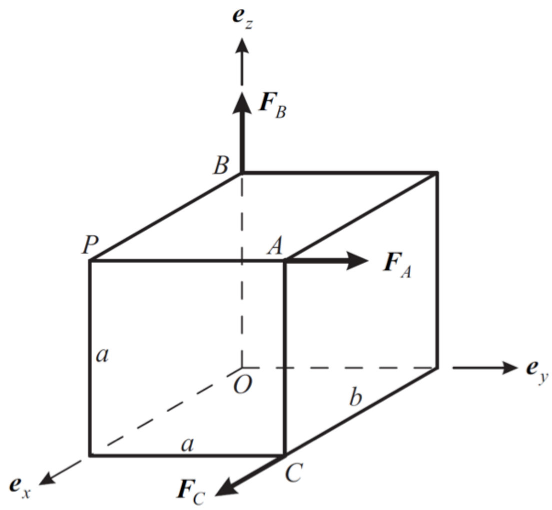
Für 2 Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_i\}$: statisch äquivalent wenn

$$\vec{R}\{\vec{F}_i\} = \vec{R}\{\vec{G}_i\} \quad \text{und} \quad \vec{M}_P\{\vec{F}_i\} = \vec{M}_P\{\vec{G}_i\}$$

beliebig, aber gleicher Pkt.

Beispielaufgabe: Serie 5 Aufgabe 1.3

1. [1] Die Kräfte $\mathbf{F}_A = F\mathbf{e}_y$, $\mathbf{F}_B = F\mathbf{e}_z$, und $\mathbf{F}_C = F\mathbf{e}_x$ greifen gemäss Abbildung an einem starren Quader an (Kantenlängen b, a, a).



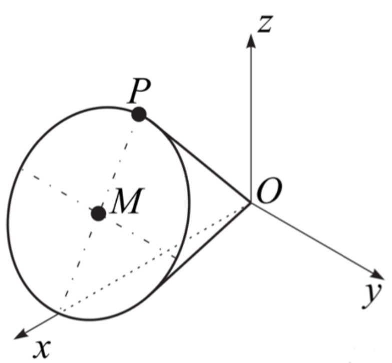
1. Berechnen Sie die Dyname der Kräftegruppe in O.
2. Berechnen Sie die Dyname der Kräftegruppe in P.
3. Wie muss das Verhältnis $\frac{a}{b}$ gewählt werden, damit sich die Kräftegruppe auf eine Einzelkraft reduzieren lässt?

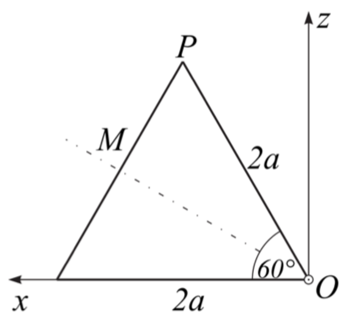
One last input ... MZ in 3D (d.h. bei räumlichen Bewegungen)

→ momentane Rotationsachse

Beispielaufgabe: Serie 5 Aufgabe 4

4. Ein starrer Kegel rollt mit der gegebenen Rotationsschnelligkeit ω auf der xy-Ebene, so dass seine Spitze stets im Ursprung des raumfesten kartesischen Koordinatensystems liegt. Die Abmessungen sind der Skizze zu entnehmen.





"Momentanzentrum"

1. Was ist in der skizzierten Lage die momentane Rotationsachse?
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_P$ und $\mathbf{v}_M$ in den Punkten P und M in der momentanen Lage.
3. Nehmen sie an, dass ω konstant ist. Wie lange braucht der Kegel für eine Umdrehung um die z-Achse?

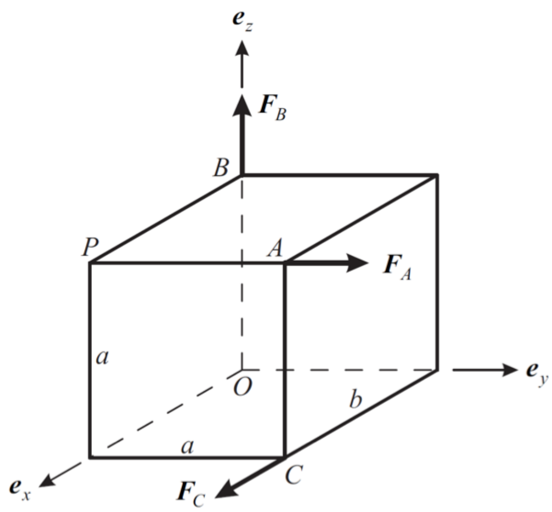
→ $\vec{r}$ egal wo auf MZ-achse anfangen.

Aber am einfachsten: $\vec{r}$ senkrecht auf MZ nehmen!

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 5

↳ viele "Recap" - Aufgaben (Geschwindigkeiten, MZ, ...)

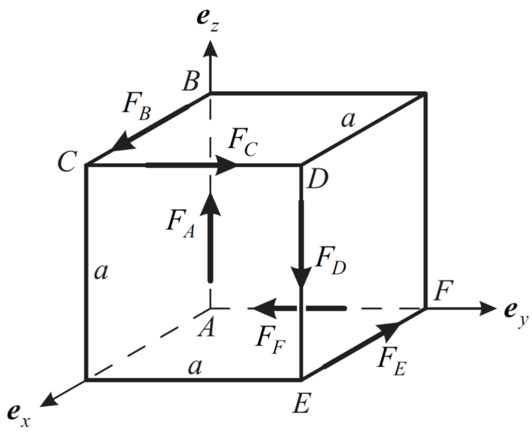
1. [1] Die Kräfte $\mathbf{F}_A = F\mathbf{e}_y$, $\mathbf{F}_B = F\mathbf{e}_z$, und $\mathbf{F}_C = F\mathbf{e}_x$ greifen gemäss Abbildung an einem starren Quader an (Kantenlängen b, a, a).



1. Berechnen Sie die Dyname der Kräftegruppe in O.
2. Berechnen Sie die Dyname der Kräftegruppe in P.
3. Wie muss das Verhältnis $\frac{a}{b}$ gewählt werden, damit sich die Kräftegruppe auf eine Einzelkraft reduzieren lässt?

genau gleich lösen wie 1. → gute Übung!

2. [2] Bestimmen Sie die eingezeichneten Komponenten der sechs am Würfel (Seitenlänge a) skizzierten Kräfte so, dass sie einem Momentvektor in z-Richtung vom Betrag M statisch äquivalent sind.



Tipps: 1) Dyname berechnen (bezüglich beliebiger Punkt)

wählt einen einfachen!

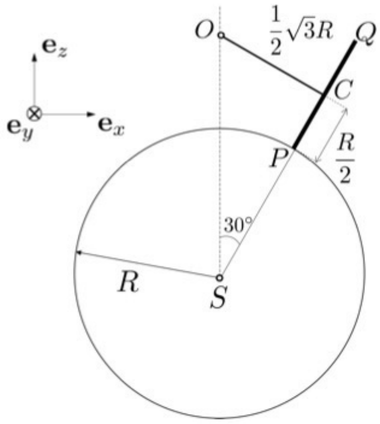
2) statisch äquivalent heisst: Dyname ist gleich.

Erinnerung: ein Moment in z-Richtung hat

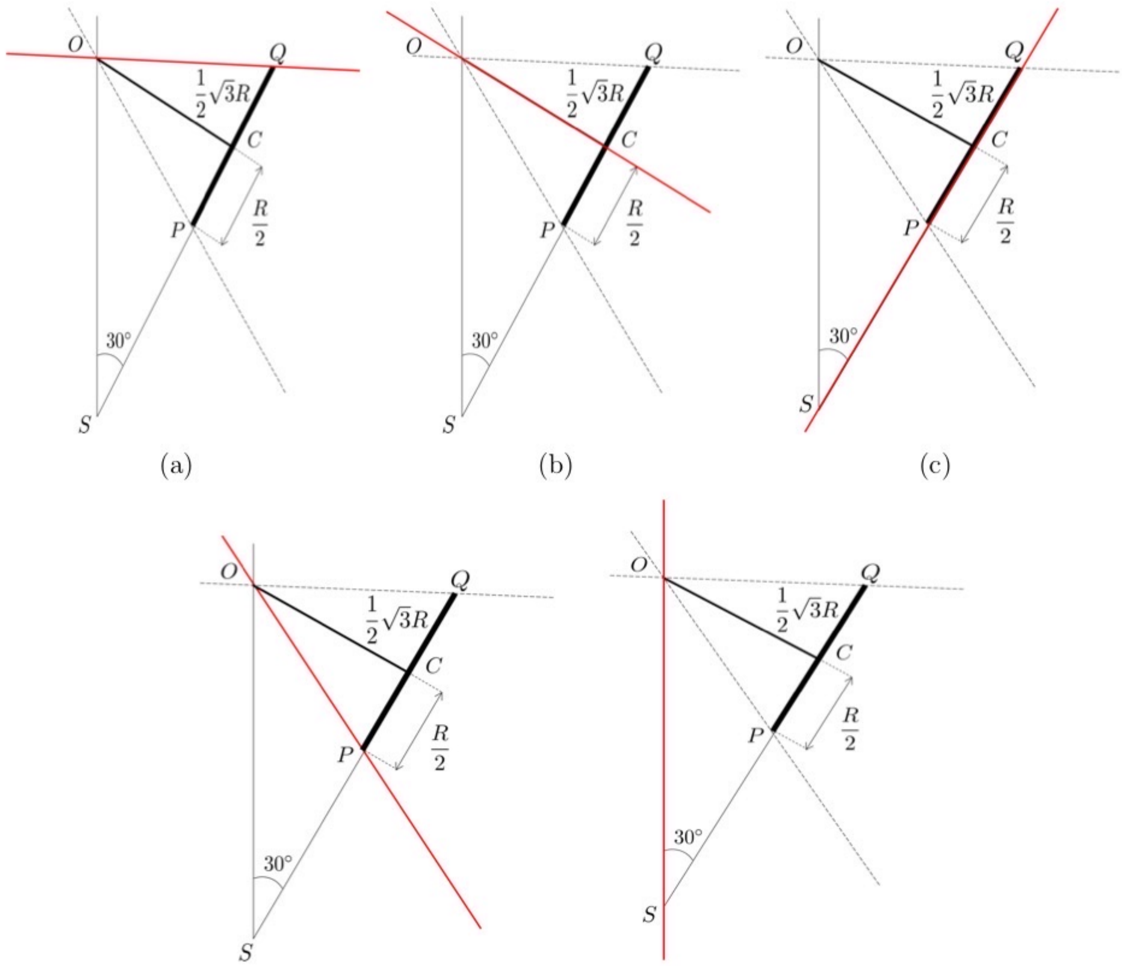
$\vec{R} = 0$ und $\vec{M} = M\vec{e}_z$

$\Rightarrow$ D.h. für die in 1) ausgerechnete Dyname die Bedingungen $\vec{R} = 0$ und $\vec{M} = M\vec{e}_z$ aufstellen & so F_A, F_B, F_C, F_D, F_E, F_F bestimmen.

3. Auf einer Kugel mit dem Radius R rollt eine Kreisscheibe mit dem Radius $R/2$, die auf einer in O gelagerten Welle sitzt. Die Scheibenebene enthält im Berührungspunkt P die Normale zur Kugelfläche, welche mit der Vertikalen einen Winkel von $\pi/6$ einschliesst. Der Mittelpunkt C der Nabe bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_C = (0,\ v,\ 0)^T$.



In welcher Abbildung ist die richtige momentane Rotationsachse dargestellt?



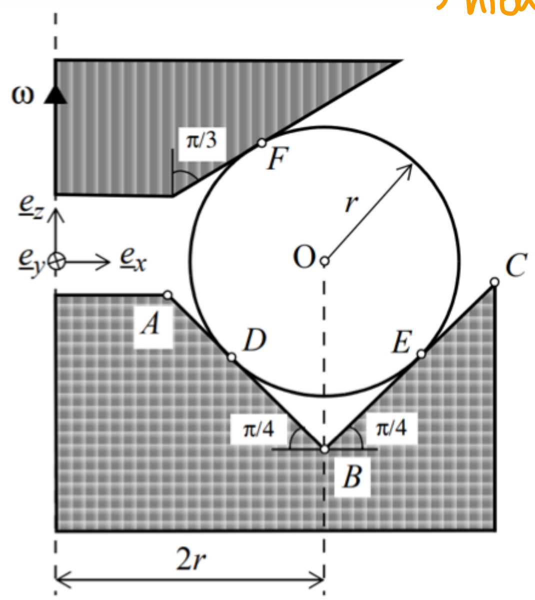
(a) (b) (c) (d) (e)

Tipps: • Welche Punkte sind in Ruhe ?

• Ein Momentanzentrum (Achse!) pro SK.

5. Eine Kugel mit Radius r rollt ohne zu gleiten auf einer festen Kegelfläche AB vom halben Öffnungswinkel $\pi/4$, einer festen Kegelfläche BC vom gleichen Öffnungswinkel und auf der gezeichneten, um $\mathbf{e}_z$ drehenden Welle ab. Die Welle rotiere mit der Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$.

→ nicht einfach :/



Was ist die Kinemate der Kugel in ihrem Mittelpunkt O?

(a) $\mathbf{v}_O = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})r\omega\,\mathbf{e}_y;\quad \boldsymbol{\omega}_k = -3\omega(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(b) $\mathbf{v}_O = \sqrt{\frac{3}{2}}(3-\sqrt{2})r\omega\,\mathbf{e}_y;\quad \boldsymbol{\omega}_k = 2\omega(3+\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(c) $\mathbf{v}_O = \frac{3}{\sqrt{2}}(3-\sqrt{2})r\omega\,\mathbf{e}_y;\quad \boldsymbol{\omega}_k = \omega(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(d) $\mathbf{v}_O = \sqrt{2}(3-\sqrt{2})\omega\,\mathbf{e}_y;\quad \boldsymbol{\omega}_k = r\omega(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(e) $\mathbf{v}_O = \frac{2\sqrt{2}}{3}(2-\sqrt{3})r\omega\,\mathbf{e}_y;\quad \boldsymbol{\omega}_k = -2\omega(\sqrt{3}-2)\,\mathbf{e}_x.$

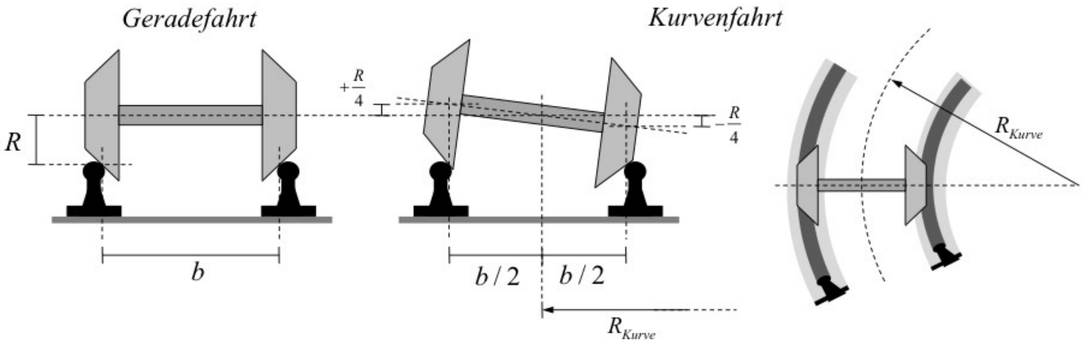
Tipps: zuerst relevante Strecken bestimmen → Trigo!

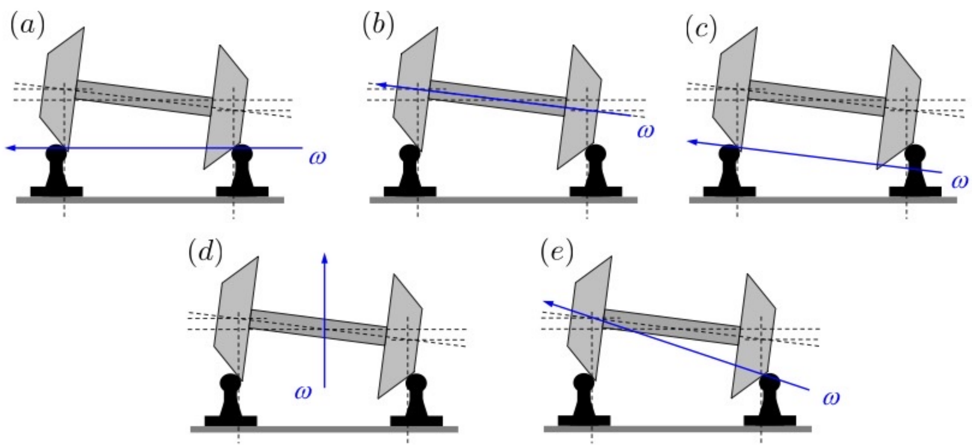
Dann Momentanachsen bestimmen:

- von der Welle
- von der Kugel

Dann mittels SvM & SK-Formel $\vec{v}_0$ & $\vec{\omega}_k$ bestimmen.

6. Ein Zug fährt in einer Kurve, wie schematisch in der folgenden Skizze dargestellt. Die Berührungspunkte zwischen den Rädern und der Schiene haben bei Geradefahrt den horizontalen Abstand b und den Abstand R von der Drehachse (siehe Skizze). Bei einer Kurvenfahrt verschiebt sich das Fahrgestell nach links, wodurch eine Neigung des Zuges entsteht (Angaben gemäss Skizze).





1. Wo befindet sich die momentane Rotationsachse für die Kurvenfahrt?
   - (a) (a)
   - (b) (b)
   - (c) (c)
   - (d) (d)
   - (e) (e)

Tipps: Welche Punkte haben $\vec{v} = \vec{0}$?

2. Wie gross ist der Kurvenradius R_{Kurve} des Zuges?
   - (a) $4R$
   - (b) $2R$
   - (c) $\frac{4R}{2b}$
   - (d) $2b$
   - (e) $4b$

Formel mit unbekannte Grössen

"Bestimme" $\vec{v}_C$ auf zwei Arten:

1) in abhängigkeit von $\vec{v}_A$ und $\vec{v}_B$

2) in abhängigkeit von R_{Kurve}

(SvM!)

anschliessend: diese Grössen gleichsetzen, $\vec{v}_A$ und $\vec{v}_B$ bestimmen & daraus R_{Kurve} bestimmen.