ausgegeben am: 26.09.2021

Lina De Windt

Zusatzmaterial zur Übung 1

Die Sachen, die in diesem Dokument enthalten sind, werden in der Technischen Mechanik-Vorlesung als bekannt vorausgesetzt. Ich kann mich gut erinnern, dass das für mich im 1. Semester nicht wirklich der Fall war und ich deswegen ein bisschen lost war am Anfang. Falls du noch Mühe hast mit eines oder mehrerer dieser Themen:

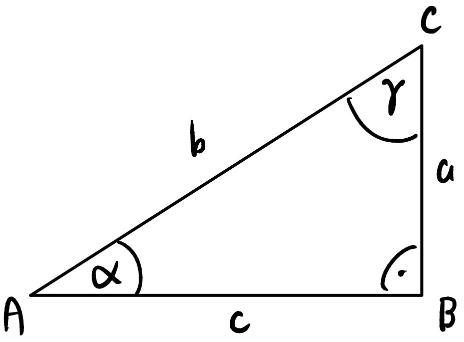
empfehle ich dir sehr fest, diese Themen anzuschauen.

In diesem Dokument werden zwar nur die Basics erklärt, doch ich hoffe es hilft dir trotzdem dabei, mühelos in die Welt der technischen Mechanik einzusteigen :)

Bem: Es kann keine Gewähr auf Korrektheit oder Vollständigkeit dieses Dokuments gegeben werden. Bei Fehler bitte sofort melden an ldewindt@ethz.ch. Danke!

Trigonometrie: Das musst du wissen:

Definition über rechtwinkliges Dreieck:



in diesem Bsp.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{c}$$

Merksprüche:

s	c	t
$\frac{G}{H}$	$\frac{A}{H}$	$\frac{G}{A}$

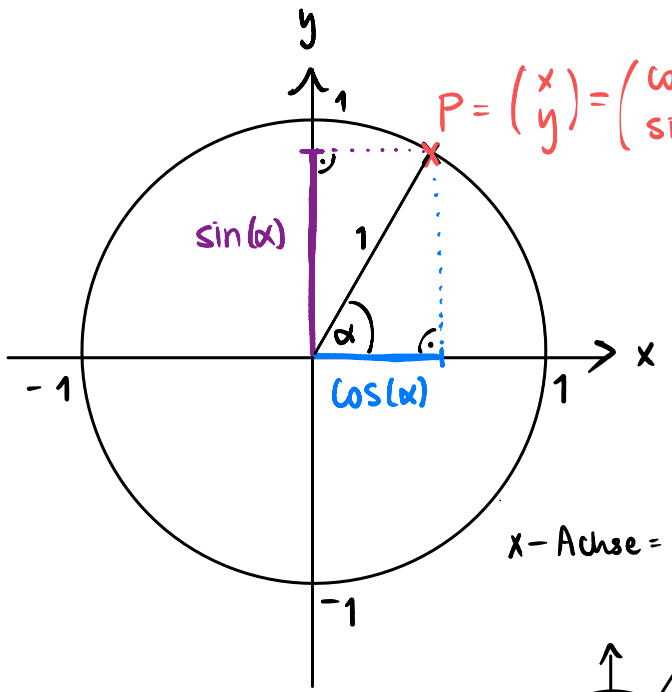
wenn man es dem orangen Pfeil nach liest: GAGHHA ("Gaga")

englische Version: "SohCahToa"

o: opposite (Gegenkathete)
a: adjacent (Ankathete)
h: hypothenuse

Good to know: sin(α), cos(α), tan(α) sind Funktionen. Ihre Umkehrfunktionen sind arcsin(a), arccos(a), arctan(a) (arcsin, arccos nur definiert auf $a \in [-1, 1]$)

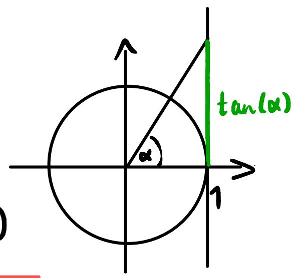
Der Einheitskreis:



$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

x-Achse = cosinus, y-Achse = sinus

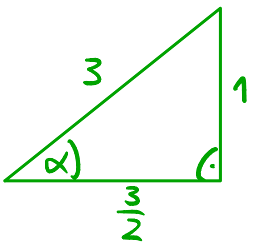
Good to know: Tangens ist hier:
(wirst du in TechMech nie brauchen)



Good to know: $\boxed{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1}$ ← Pythagoras über Einheitskreis

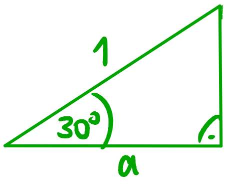
Anwendungen, Bspe:

①



Was ist α? $\rightarrow$ $\sin(\alpha)=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $\alpha=\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

②

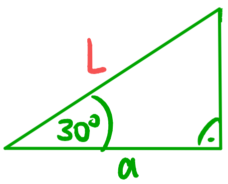


Was ist die Länge von a? $a=\cos(30°)=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

Warum cos? → Stell dir den Einheitskreis vor!

gleiche Frage, aber leicht anders:

③

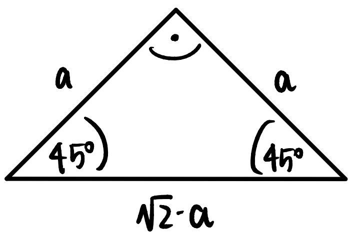


$a=L\cdot\cos(30°)=L\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Strahlensatz)

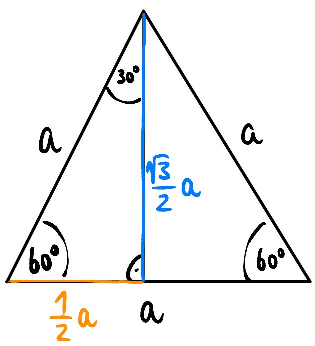
Wichtige Dreiecke

(diese Dreiecke wirst du sehr oft sehen in TechMech!):

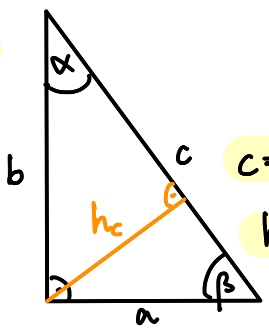
Gleichschenklig & rechtwinkliges Dreieck:



Gleichseitiges Dreieck:



Rechtwinklig:



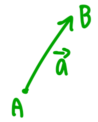
$c=\sqrt{a^2+b^2}$ ← Satz von Pythagoras

$h_c=\frac{a\cdot b}{c}$

Vektoren

Basics: Was sind Vektoren überhaupt? Im Rahmen der Technischen Mechanik Vorlesung sind Vektoren einfach gesagt Pfeile. Ein Vektor hat immer eine Länge und eine Richtung. (z.B. $\vec{a} = \underset{\text{Länge}}{a} \cdot \underset{\text{Richtung}}{\vec{e}_a}$)

Beispiel



$\vec{a}$ ist ein Vektor vom Punkt A zu Punkt B.

Ein Vektor kann auf zwei Arten beschrieben werden:

① 2D: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ← x-Komponente, ← y-Komponente

3D: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ ← x-Komponente, ← y-Komponente, ← z-Komponente

Vorteil dieser Schreibweise: übersichtlich

② $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$

Einheitsvektoren (Basis)

$\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$

Vorteil dieser Schreibweise: Basis (hier $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) sofort klar

Good to know: Notation von Vektoren (die folgenden Schreibweisen sind äquivalent):

- $\vec{a}$ Pfeil oben
- $\underline{a}$ Strich unten
- $\mathbf{a}$ fett

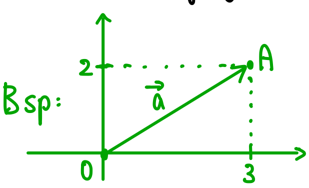
Ihr dürft die Schreibweise wählen die ihr möchtet, doch bleibt konsistent! Ich werde in meinen Übungsmaterialien die Schreibweise mit dem Pfeil oben ($\vec{a}$) benutzen.

Länge und Richtung: Die Länge (aka. Betrag, (zwei-)Norm) eines Vektors beschreibt, wie lang ein Vektor ist. Diese wird wie folgt bestimmt:

2D: $\boxed{|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$

3D: $\boxed{|\vec{b}| = b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

Bsp:



$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

↪ das ist eigentlich nichts anderes als Pythagoras.

kleine Übungen: Bestimme die Länge der folgenden Vektoren:

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 3) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

4) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 5) $\vec{e} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$a = |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$b = |\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

$c = |\vec{c}| = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 2} = \sqrt{\frac{19}{9}} = \frac{\sqrt{19}}{3}$

$d = |\vec{d}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$e = |\vec{e}| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 1^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + 1 + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$

Die Richtung eines Vektors wird mit sogenannten Einheitsvektoren angegeben. Die Eigenschaft der Einheitsvektoren ist, dass sie immer die Länge 1 haben.

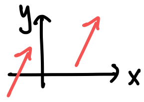
z.B. ist $\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor, da $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

Good to know: Einheitsvektoren schreibt man in der Regel so: $\vec{e}_j$

(wobei j der Index ist → d.h. an der Stelle von j kommen Zahlen / Buchstaben)

Nun wissen wir, wie Vektoren beschrieben werden: $\vec{a} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Länge}}}{a} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Richtungen}}}{\vec{e}_a}$

Da ein Vektor einzig durch ihre Länge & Richtung definiert ist, ist es "egal", wo im Raum sie sich befindet. d.h.



diese 2 Vektoren sind genau dieselben Vektoren.

Good to know: dies ist die analytische Schreibweise von Vektoren. In TechMech sind die Einheitsvektoren i.d.R. die Basisvektoren ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ oder $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$). Deswegen musst du dich oft nicht wirklich um diese kümmern. Vor allem wenn du dein Ergebnis in diese Form: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ angibst, sind die Einheitsvektoren (in diesem Fall $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$) sozusagen schon mit inbegriffen.

Bsp: geben Sie Länge und Richtung der folgenden Vektoren an:

1) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Länge: $|\vec{p}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$

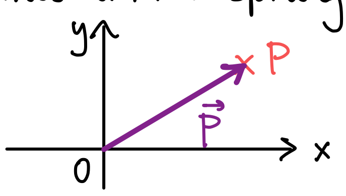
Richtung: $\vec{e}_p = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{durch die Länge teilen}}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}}$

2) $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Länge: $|\vec{q}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38}$

Richtung: $\vec{e}_q = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{38}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}}$

Ortsvektor: verbindet einen Punkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems. Dieser ist eindeutig definiert.



$\vec{p}$ ist der Ortsvektor vom Punkt P.

Rechnen mit Vektoren:

Jetzt wo wir gelernt haben, was Vektoren sind, können wir anfangen mit diesen zu rechnen :)

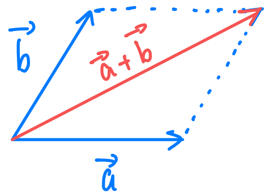
Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ zwei Vektoren. Dann:

Addition:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

Visuell:

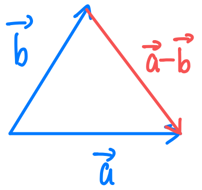


Subtraktion:

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

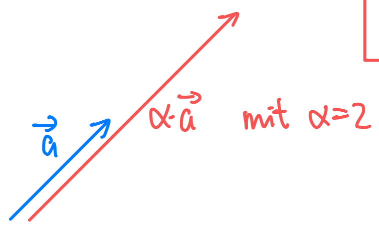
Visuell:



Multiplikation mit einem Skalar:

$$\boxed{\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_x \\ \alpha \cdot a_y \\ \alpha \cdot a_z \end{pmatrix}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Visuell:



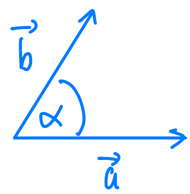
Bsp: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 + 15 + 2 = 25$

Good to know: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)}$



α: der von den beiden Vektoren eingeschlossener Winkel.

Good to know: orthogonale Vektoren: 2 Vektoren, dessen Skalarprodukt 0 ergibt, sind orthogonal (= senkrecht) aufeinander.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}}$$

orthogonal zu

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zusatzfrage: Wann sind 2 Vektoren parallel zueinander? → lö letzte Seite :)

Kreuzprodukt: $\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}}$ ← nur in 3D.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35-12 \\ 4-10 \\ 6-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wie kann ich mir die Formel für das Kreuzprodukt merken? → 2 Tricks:

① Der 3-Fisch-Trick:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - b_y \cdot a_z \\ a_z \cdot b_x - b_z \cdot a_x \\ a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y \end{pmatrix}$$

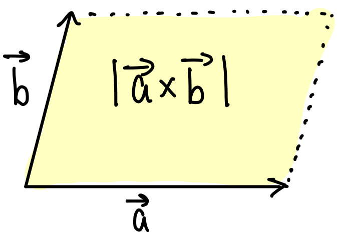
$$\begin{matrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{matrix}$$

↑ die ersten 2 noch mal unten aufschreiben

② die platzsparende Methode:

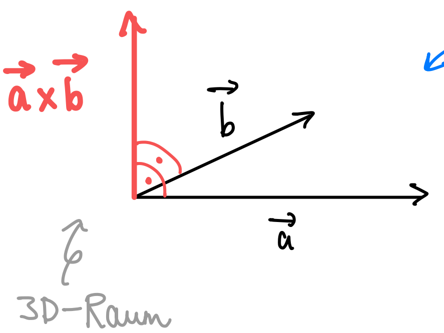
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - b_y \cdot a_z \\ a_z \cdot b_x - b_z \cdot a_x \\ a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Good to know: Geometrische Bedeutung des Kreuzprodukts:

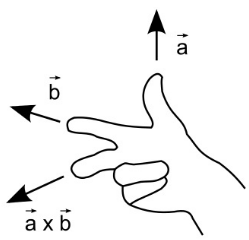


$|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist die Fläche des Parallelogramms, welcher von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossen wird.

Good to know: $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ sowie $\vec{b}$.

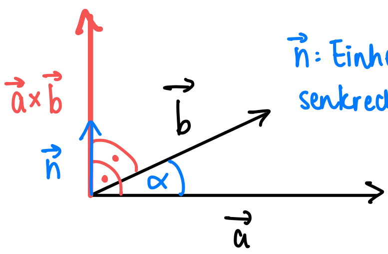


← hier gilt die Rechte-Hand-Regel:



Good to know: $\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)}$

auch: $\vec{a} \times \vec{b} = (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\alpha))\vec{n}$



$\vec{n}$: Einheitsvektor, welcher senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist

Rechnen mit Wurzeln:

Basics:

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = |a| \cdot \sqrt{b}$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Brüche:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$$

das ist dasselbe wie $\cdot 1$ (erweitern)

Bsp: $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Ableiten, Basics:

- Sei $f(x) = x^n$. Dann ist $\frac{d}{dx} f(x) = \boxed{f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$

Bsp: $f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5x^4$

- $\sin'(x) = \cos(x)$
- $\cos'(x) = -\sin(x)$

Spezielle Funktionen wie z.B. $\log(x)$ haben spezielle Ableitungen, diese sind in TechMech jedoch nicht wichtig → ihr werdet sie in Analysis zu genüge sehen :)

Ableiten, die wichtigsten Regeln:

Summenregel: $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

Bsp: $f(x) = 3x + 5x^2 \rightarrow f'(x) = 3 + 10x$

Faktorregel: $f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$

Bsp: $f(x) = \alpha x^2 \rightarrow f'(x) = 2\alpha x$

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Bsp: $f(x) = 3x^2 e^x \rightarrow f'(x) = 6x \cdot e^x + 3x^2 e^x$ $((e^x)'$ ist $e^x)$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Bsp: $f(x) = \frac{4x^2}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{8x \cdot x - 4x^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{8x^2 - 4x^2}{x^2}$

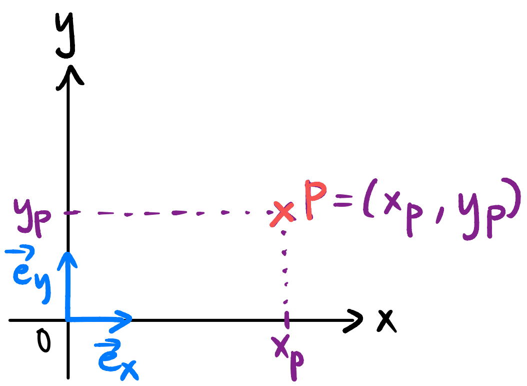
Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Bsp: $f(x) = \sin(x^3) \rightarrow f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$

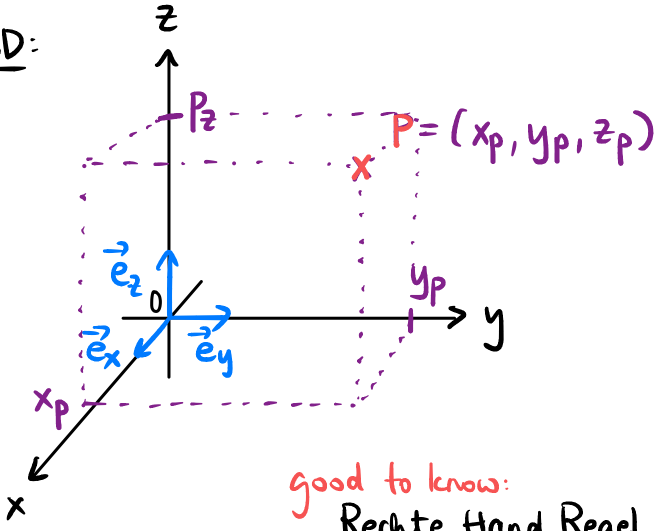
Koordinatensysteme:

① kartesische Koordinaten:

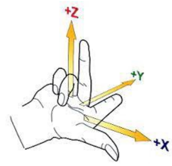
2D:



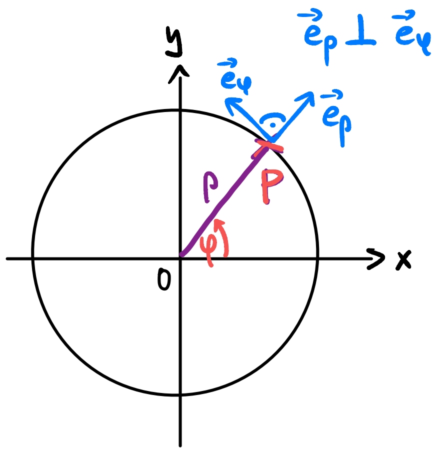
3D:



good to know:
Rechte Hand Regel beachten.



② Polarkoordinaten (nur 2D):



ρ ("rho") beschreibt den Radius.

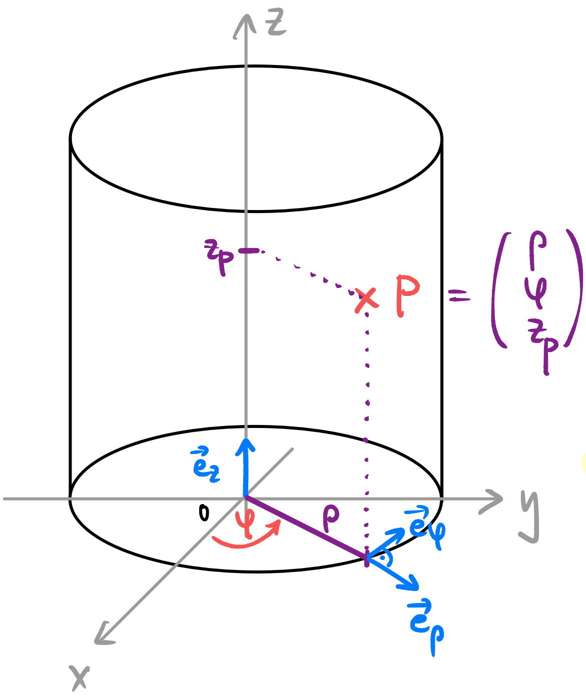
Einheitsvektoren:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \cos(\varphi)\,\vec{e}_y\end{aligned}}$$

Umrechnung:

Polar → kartesisch	kartesisch → Polar
$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

③ Zylinderkoordinaten:

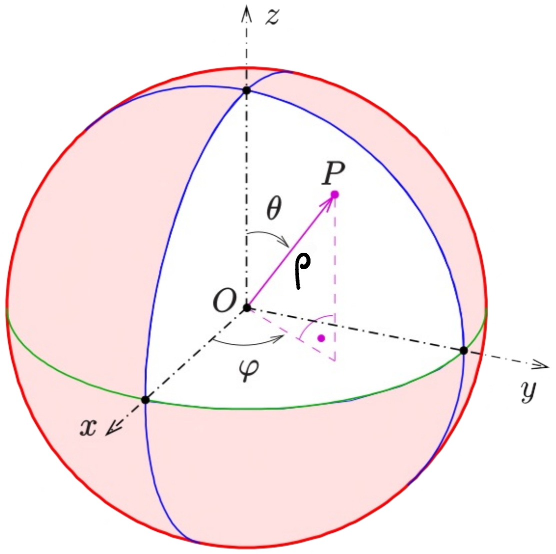


$$\boxed{\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \cos(\varphi)\,\vec{e}_y\end{aligned}}$$

Umrechnung:

Zylinder → kartesisch	kartesisch → Zylinder
$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$	$z = z$

④ Kugelkoordinaten (nicht wichtig in TechMech aber z.B. in NuS schon :))



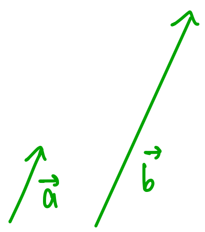
$$P = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Umrechnung:

Kugel → Kartesisch	Kartesisch → Kugel
$x = \rho \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = \rho \cdot \cos(\theta)$	$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)$

Lösung zur Frage auf Seite 6: Richtungsvektor gleich

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$



$\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

durch die Länge teilen

$\vec{e}_b = \frac{1}{3\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{e}_a$:)