

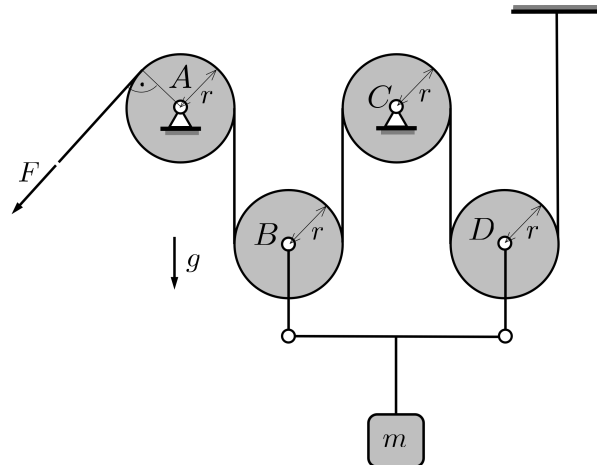
Technische Mechanik  
151-0223-10

**- Übung 9 -**

Dr. Paolo Tiso

28. November 2023

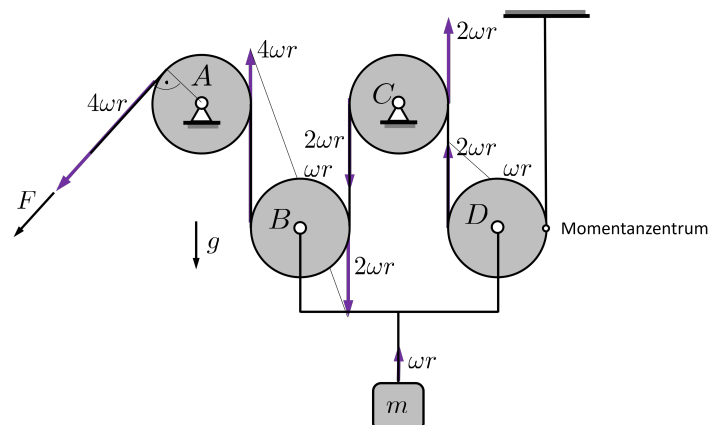
1. Betrachten Sie das dargestellte System, das aus 4 masselosen Rollen mit gleichem Radius  $r$  besteht. Die Rollen sind durch ein undeformbares Seil verbunden, das um die Rollen gewickelt ist und nicht rutscht. Die 2 oberen Rollen sind in ihren Mittelpunkten  $A$  und  $C$  gelenkig gelagert, während ein Ende des Seils im Punkt  $E$  an der Decke befestigt ist. Ein Körper der Masse  $m$  ist durch masselose Stäbe mit den unteren Rollen verbunden. Die Erdbeschleunigung  $g$  wirkt nach unten.



Wie gross ist der Betrag der Kraft  $\mathbf{F}$ , die auf das Seil ausgeübt werden muss, um ein statisches Gleichgewicht zu erreichen?

- (a)  $F = 0$   
 ► (b)  $F = \frac{mg}{4}$   
 (c)  $F = \frac{mg}{3}$   
 (d)  $F = \frac{mg}{2}$   
 (e)  $F = mg$

Lösung:



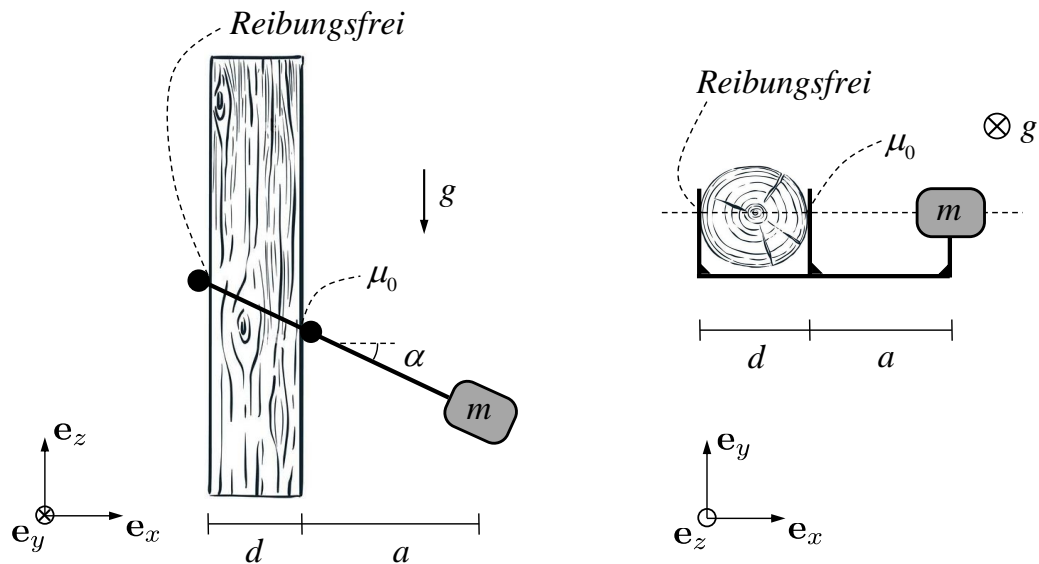
Wir benutzen das PdvL auf dem ganzen System und finden

$$\tilde{P}_{tot} = 4\omega r F - mg\omega r = 0 \quad (1)$$

Daraus ergibt sich

$$F = \frac{mg}{4}. \quad (2)$$

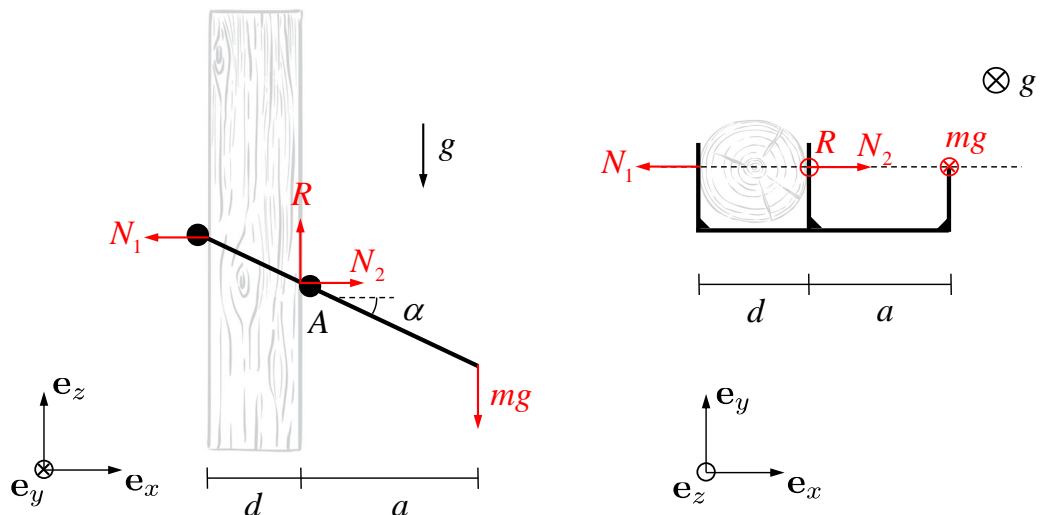
2. Man betrachtet einen Holzstrommast. Um Wartungsarbeiten durchzuführen, klettert das Fachpersonal mit speziellen Schuhen auf den Holzmast. Diese Schuhe klemmen sich durch das Gewicht des Benutzers an den Mast. Eine schematische Darstellung eines Schuhs ist in der folgenden Skizze zu sehen. Der Einfachheit halber sind die Schuhe durch eine Stabkonstruktion ersetzt worden. Die Vorderseite des Schuhs hat den Reibungswert  $\mu_0$  und die Rückseite ist reibungsfrei. Alle erforderlichen Abmessungen und Richtungen sind in der Skizze angegeben.



1. Wie gross muss der Abstand  $a$  des Schuhs vom Mast gewählt werden, damit ein Mitarbeiter mit Masse  $m$  sicher auf den Mast klettern kann?
2. Welche Änderungen müssen an den Schuhen vorgenommen werden, wenn ein doppelt so schwerer Mitarbeiter ( $2m$ ) die Schuhe benutzt?

*Lösung:*

1. Das freigeschnittene System sieht wie folgt aus:



Die Gleichgewichtsbedingungen für den Schuh lauten:

$$KB(x) : \quad 0 = -N_1 + N_2 \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_2 \quad (1)$$

$$KB(z) : \quad 0 = R - mg \quad \Rightarrow \quad R = mg \quad (2)$$

$$MB(A, y) : \quad 0 = -N_1 \cdot d \tan \alpha + mg \cdot a \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{a \, mg}{d \tan \alpha} \quad (3)$$

Die Reibungsformel zusammen mit Gleichung 2 ergibt:

$$R \leq \mu_0 N_2 \quad \Rightarrow \quad N_2 \geq \frac{R}{\mu_0} = \frac{mg}{\mu_0} \quad (4)$$

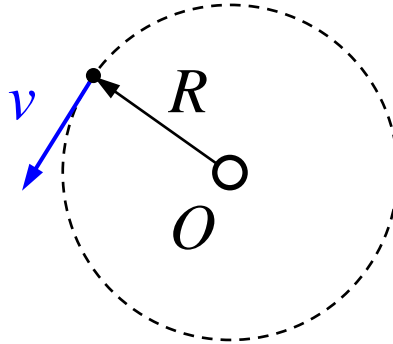
Das ergibt aus Gleichungen 1, 3 und 4:

$$\frac{a \, mg}{d \tan \alpha} \geq \frac{mg}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad a \geq \frac{d \tan \alpha}{\mu_0} \quad (5)$$

Dies ist der theoretische Grenzwert; um diesen in der Praxis zu nutzen, wird ein Sicherheitsfaktor hinzugefügt. Dadurch wird sichergestellt, dass bei kleinen Änderungen der Parameter (z. B. glattere Oberfläche des Mastes, ...) keine Unfälle passieren.

2. Keine, da Gleichung 5 unabhängig von der Masse  $m$  ist. (*Vorausgesetzt, die Struktur des Schuhs ist ausreichend stark, aber das ist nicht Bestandteil dieser Vorlesung.*)

3. Ein Teilchen bewegt sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $R$  (siehe Skizze). Die Geschwindigkeit des Teilchens ist gegeben als  $|\mathbf{v}| = at$ , wobei  $a$  eine Konstante ist.



Was ist die Beschleunigung des Teilchens in Polarkoordinaten?

- (a)  $\mathbf{a} = -\frac{a^2 t^2}{R} \mathbf{e}_\rho + a \mathbf{e}_\varphi$   
 (b)  $\mathbf{a} = \frac{at}{R} \mathbf{e}_\rho - at \mathbf{e}_\varphi$   
 (c)  $\mathbf{a} = \frac{a^2 t^2}{R} \mathbf{e}_\rho$   
 (d)  $\mathbf{a} = -a^2 t^2 \mathbf{e}_\rho + at \mathbf{e}_\varphi$   
 (e)  $\mathbf{a} = a \mathbf{e}_\varphi$

*Lösung:*

Die Beschleunigung kann mit der folgenden Formel ermittelt werden:

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi \quad (1)$$

$\rho$  ist konstant und gleich  $R$ :

$$\rho = R \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\rho} = 0 \quad (2)$$

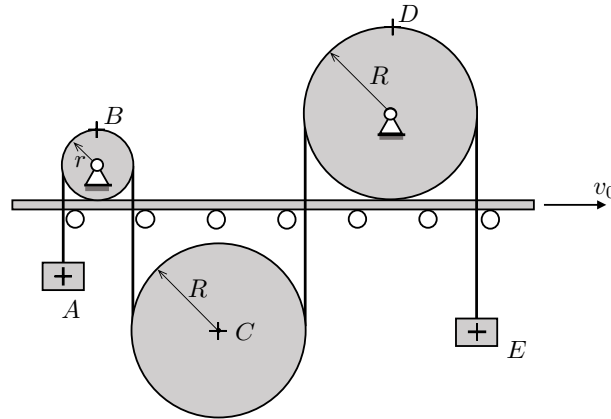
$\varphi$  kann durch die Schnelligkeit bestimmt werden:

$$|\mathbf{v}| = \dot{\varphi} R \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{|\mathbf{v}|}{R} = \frac{at}{R} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{a}{R} \quad (3)$$

Durch Einsetzen in Gleichung 1 kann die Beschleunigung bestimmt werden:

$$\mathbf{a} = \left(0 - R \cdot \frac{a^2 t^2}{R^2}\right) \mathbf{e}_\rho + \left(2 \cdot 0 \cdot \frac{at}{R} + R \cdot \frac{a}{R}\right) \mathbf{e}_\varphi = -\frac{a^2 t^2}{R} \mathbf{e}_\rho + a \mathbf{e}_\varphi \quad (4)$$

4. Zwei kreisförmige Scheiben mit den Radien  $r$  und  $R$  rollen ohne zu gleiten auf einem starren Band, das sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  bewegt. Um die beiden Scheiben und um eine dritte Scheibe mit Mittelpunkt  $C$  und Radius  $R$ , ist ein undehnbares Seil gewickelt. Diese dritte Scheibe ist freitragend und frei beweglich. Jedes Ende des Seils ist, wie gezeigt, mit einer Masse verbunden.



Welche Aussage über die Schnelligkeiten der Punkte  $A$  bis  $E$  ist richtig?

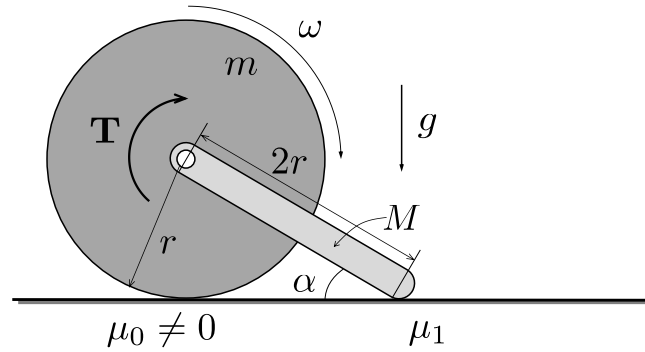
- (a)  $v_D = 2v_C$  und  $v_B > v_D$
- (b)  $v_A = v_B = v_C = v_D = v_E$
- (c)  $v_A = v_B = v_D = v_E$  und  $v_C = 0$
- (d)  $v_B > v_C > v_A$  und  $v_A = v_D$
- (e)  $v_A = v_E$  und  $v_B = v_D = v_C$

*Hinweis: Die Bedingung des Rollens ohne Gleiten setzt voraus, dass die Geschwindigkeiten der Körper in den jeweiligen Berührungspunkten gleich sein müssen.*

*Lösung:*

Die kinematische Bedingung des Rollens (ohne zu gleiten) impliziert, dass die beiden Scheiben, die das Seil berühren, an jedem Punkt des äusseren Umfangs die gleiche Geschwindigkeit  $v_0$  haben müssen (also  $v_B = v_D = v_0$ ). Das undehnbare Seil erfordert dann, dass  $v_A = v_0$  und  $v_E = v_0$ . Schliesslich sorgt das um die zentrale Scheibe gewickelte Seil dafür, dass  $v_C = 0$  ist, da sich das Seil auf beiden Seiten mit derselben Geschwindigkeit  $v_0$  auf und ab bewegt. Daher gilt  $v_A = v_B = v_D = v_E (= v_0)$  und  $v_C = 0$ .

5. Ein Rad mit Masse  $m$  und Radius  $r$ , auf das ein Moment  $\mathbf{T} = -T\mathbf{e}_z$  wirkt, rollt ohne zu gleiten auf dem Boden mit gegebener Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$ . Der Mittelpunkt des Rades ist durch ein Gelenk mit einem Stab mit homogener Masse  $M$  und Länge  $L = 2r$  verbunden, der auf dem Boden gleitet und mit diesem einen Winkel  $\alpha = \pi/6$  einschliesst. Der Boden ist rau mit Haftreibungskoeffizient  $\mu_0 \neq 0$  und Gleitreibungskoeffizient  $\mu_1$ . Die Schwerebeschleunigung  $\mathbf{g}$  wirkt nach unten.



1. Wie gross muss der Gleitreibungskoeffizient  $\mu_1$  sein, damit sich das System mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt?

► (a)  $\mu_1 = \frac{T}{\frac{Mgr}{2} + \frac{T}{\sqrt{3}}}$

(b)  $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}T}{\frac{Mgr}{2} + T}$

(c)  $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}Tr}{\frac{Mg}{2} - \frac{T}{2\sqrt{3}r}}$

(d)  $\mu_1 = \frac{2T}{\frac{Mgr}{2} - \frac{Tr}{\sqrt{3}}}$

(e)  $\mu_1 = \frac{T}{T - \frac{Mgr}{2}}$

2. Was ist der minimale Wert von  $\mu_0$ , damit das Rad nicht gleitet?

(a)  $\mu_{0,min} = \frac{\sqrt{3}T}{(M - m)gr}$

► (b)  $\mu_{0,min} = \frac{T}{\left(\frac{M}{2} + m\right)gr - \frac{T}{\sqrt{3}}}$

(c)  $\mu_{0,min} = \frac{\sqrt{3}T}{\left(\frac{M}{2} + m\right)g}$

(d)  $\mu_{0,min} = \frac{2T}{\left(\frac{M}{2} - m\right)gr}$

(e)  $\mu_{0,min} = \frac{2T}{(M + m)gr - T\sqrt{3}}$

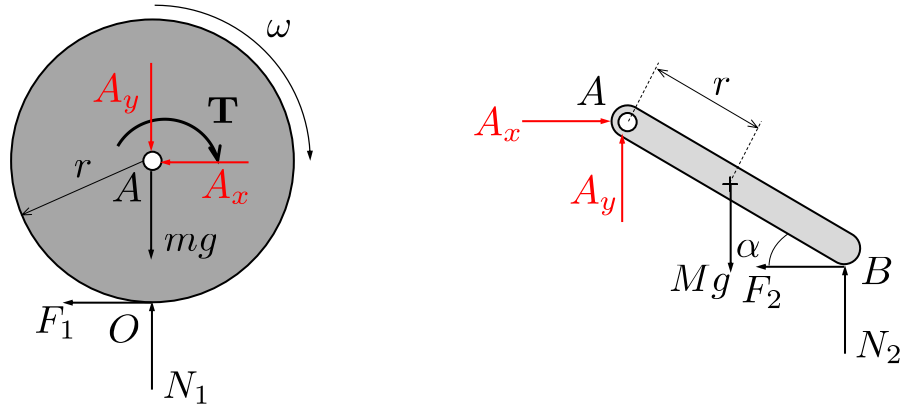
Lösung:

1. Die Geschwindigkeit im Punkt  $O$  ist null, da das Rad auf dem Boden rollt. Der Betrag der Geschwindigkeit im Mittelpunkt ist dann  $v_A = \omega r$ . Mit dem SdpG und der Bedingung, dass der Stab auf dem Boden gleitet, finden wir die Schnelligkeit im Punkt  $B$  als  $v_B = v_A = \omega r$ .

Nun können wir das PdvL anwenden und finden

$$T\omega - F_2\omega r = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{T}{r}. \quad (1)$$

Wir schneiden das System frei:



Die Momentenbedingung des Stabes im Punkt  $A$  liefert (mit gegebener Länge des Stabes  $L = 2r$ )

$$\begin{aligned} MB(A, z) : 0 &= -Mgr \cos \alpha + 2r \cos \alpha N_2 - 2F_2 r \sin \alpha \\ N_2 &= \frac{Mg \cos \alpha + 2F_2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{Mg}{2} + \frac{F_2}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow N_2 &= \frac{Mg}{2} + \frac{T}{\sqrt{3}r}; \end{aligned} \quad (2)$$

wobei  $\sin \alpha = 1/2$ ;  $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$ .

Aus dem Gleitreibungsgesetz

$$|F_2| = \mu_1 |N_2| \quad (3)$$

erhalten wir

$$\mu_1 = \frac{|F_2|}{|N_2|} = \frac{\frac{T}{r}}{\frac{Mg}{2} + \frac{T}{\sqrt{3}r}} = \frac{T}{\frac{Mgr}{2} + \frac{T}{\sqrt{3}}}. \quad (4)$$



2. Durch Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte am Stab finden wir die Reaktionskräfte im Punkt  $A$  als

$$KB(x) : \quad 0 = A_x - F_2 \quad \Rightarrow \quad A_x = F_2 = \frac{T}{r}; \quad (5)$$

$$KB(y) : \quad 0 = A_y + N_2 - Mg \quad \Rightarrow \quad A_y = \frac{Mg}{2} - \frac{T}{\sqrt{3}r}. \quad (6)$$

Wir betrachten nun das Rad und finden die Beziehung zwischen  $F_1$  und  $F_2$  durch die Kraftbedingung in x-Richtung als

$$KB(x) : \quad 0 = -F_1 - A_x \quad \Rightarrow \quad F_1 = -F_2 = -\frac{T}{r}, \quad (7)$$

und durch die Kraftbedingung in y-Richtung

$$\begin{aligned} KB(y) : \quad 0 &= N_1 - A_y - mg \\ \Rightarrow \quad N_1 &= \frac{Mg}{2} - \frac{T}{\sqrt{3}r} + mg. \end{aligned} \quad (8)$$

Das Haftreibungsgesetz lautet

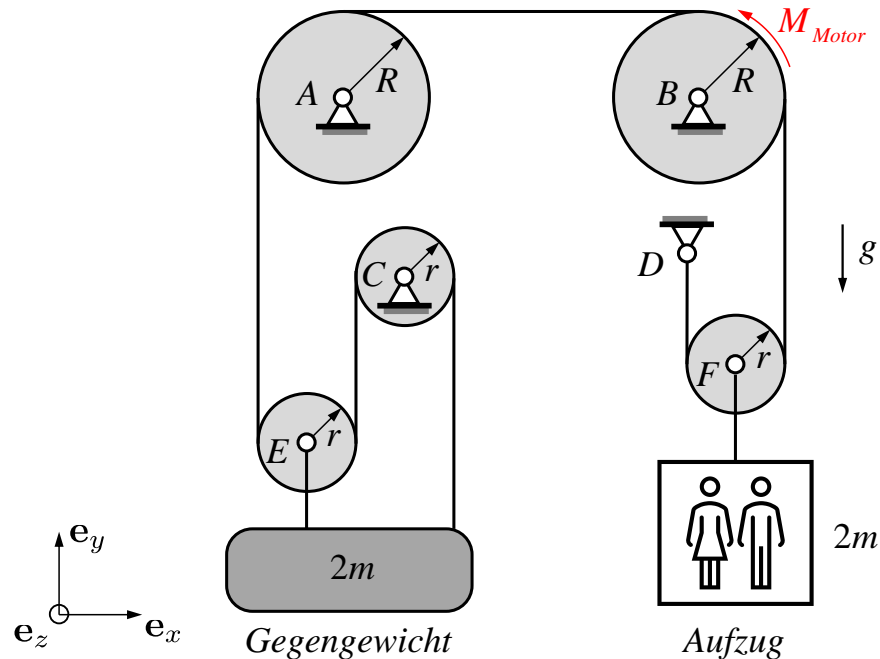
$$|F_1| \leq \mu_0 |N_1| \quad (9)$$

Also ist der minimale Haftreibungskoeffizient

$$\mu_{0,min} = \frac{|F_1|}{|N_1|} = \frac{\frac{T}{r}}{\left(\frac{Mg}{2} + m\right)g - \frac{T}{\sqrt{3}r}} = \frac{T}{\left(\frac{M}{2} + m\right)gr - \frac{T}{\sqrt{3}r}}. \quad (10)$$

*Bemerkung: Man kann die Betragsstriche bei  $N_1$  in der Berechnung von  $\mu_{0,min}$  einfach weglassen, da  $N_1 > 0$  sein muss, da das System sonst abheben würde.*

6. In der folgenden Skizze ist ein Aufzug und das dazugehörige Rollensystem eingezeichnet. Das Tragseil ist am Punkt  $D$  befestigt, durchläuft das gesamte Rollensystem und ist im Gegengewicht verankert (siehe Skizze). Der Motor für den Aufzug ist in der Rolle  $B$  eingebaut und wird durch das Kräftepaar  $M_{Motor}$  beschrieben. Das Tragseil rutscht nicht auf den Rollen und alle Rollen (ausser der Motorrolle  $B$ ) können sich frei drehen.



Welches Kräftepaar  $M_{Motor}$  muss der Motor liefern, um das System in Ruhe zu halten?

- (a)  $M_{Motor} = -\frac{2}{3}mgR$
- (b)  $M_{Motor} = 0$
- (c)  $M_{Motor} = \frac{1}{3}mgR$
- (d)  $M_{Motor} = \frac{2}{3}mgR$
- (e)  $M_{Motor} = mg$

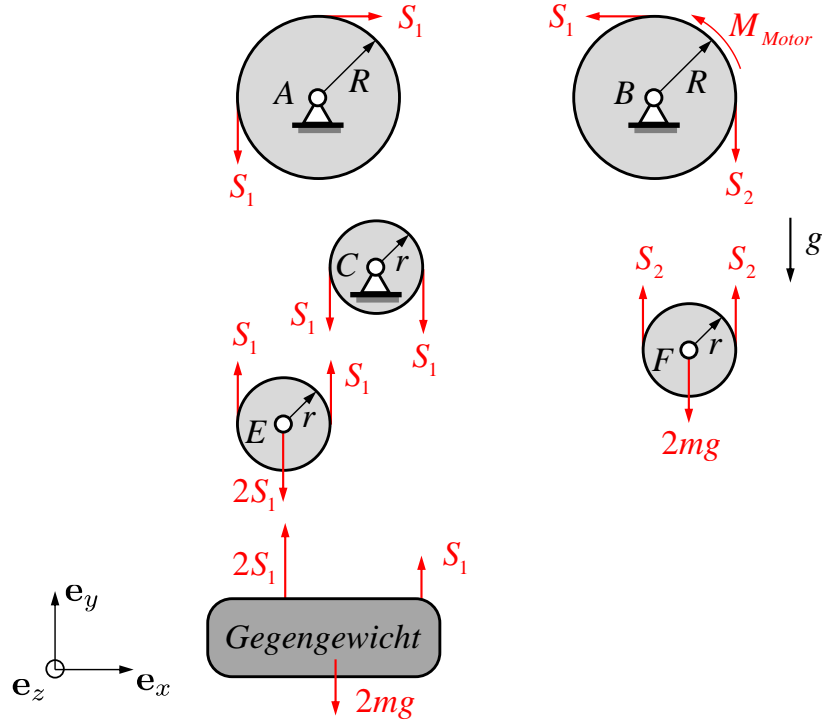
*Hinweis: Am Gegengewicht muss kein Momentengleichgewicht berechnet werden. Es genügt die Summe der Kräfte in  $e_y$ -Richtung.*

*Lösung:*

Das System hat ein einziges Tragseil und alle Rollen ausser  $B$  drehen sich frei. Wenn ein Seil ohne äussere Einwirkungen eine frei drehbare Rolle umläuft, bleibt die Seilkraft vor und nach der Rolle gleich:

$$MB(A, z) : \quad 0 = S_{AB} \cdot R - S_{AE} \cdot R \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = S_{AE} \quad (1)$$

Dies vereinfacht das Freischneiden des Systems, da nur zwei verschiedene Seilkräfte vorhanden sind, vor und nach der Motorscheibe  $B$ . Bezeichnet man mit  $S_1$  und  $S_2$  die unterschiedlichen Seilkräfte auf das Tragseil, so sieht das freigeschnittene System wie folgt aus:



Aus dem vertikalen Gleichgewicht am Gegengewicht kann  $S_1$  berechnet werden:

$$KB(y) : \quad 0 = 2S_1 + S_1 - 2mg \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{2}{3}mg \quad (2)$$

$S_2$  kann aus Rolle  $F$  bestimmt werden:

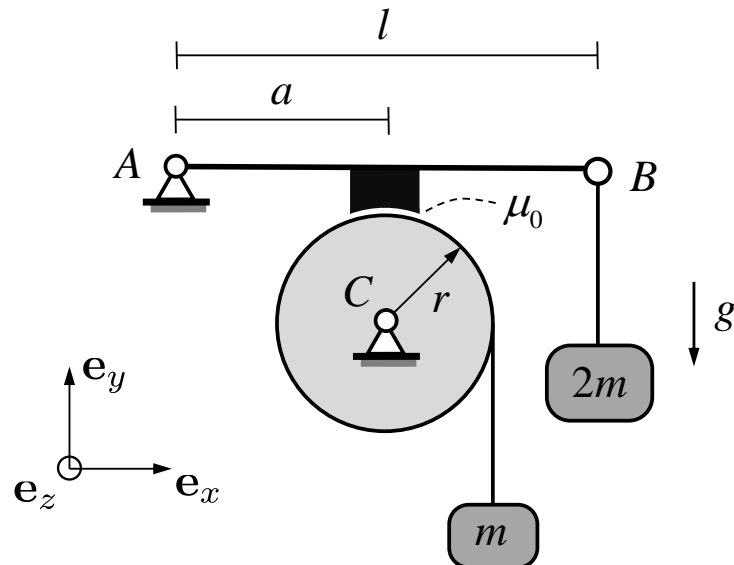
$$KB(y) : \quad 0 = S_2 + S_2 - 2mg \quad \Rightarrow \quad S_2 = mg \quad (3)$$

Setzt man die Seilkräfte in das Momentengleichgewicht der Rolle  $B$  ein, erhält man das Moment  $M_{motor}$ :

$$MB(B, z) : \quad 0 = S_1 \cdot R - S_2 \cdot R + M_{Motor} \quad \Rightarrow \quad M_{Motor} = \frac{1}{3}mgR \quad (4)$$

Das entspricht Antwort (c).

7. Eine Masse  $m$  ist an einer Seiltrommel  $C$  aufgehängt, die durch einen Bremsklotz gebremst wird (siehe Skizze). Der Bremsklotz hat einen Haftreibungswert von  $\mu_0 = \frac{1}{6}$  und ist in einem Abstand  $a$  vom Punkt  $A$  an dem Stab  $AB$  befestigt. Der Stab ist im Punkt  $A$  gelenkig gelagert und im Punkt  $B$  ist ein Klotz der Masse  $2m$  aufgehängt.



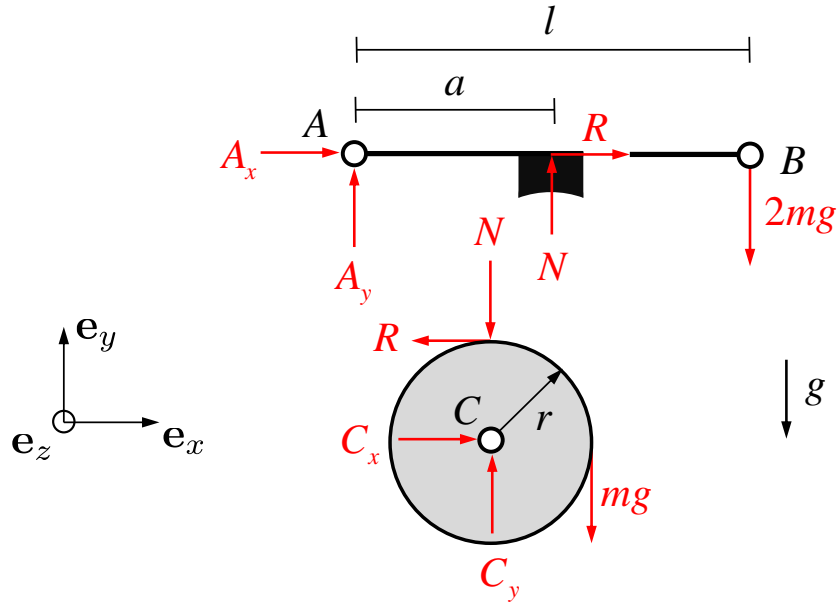
Wie gross soll der Abstand  $a$  gewählt werden, damit das System in Ruhe bleibt?

- (a)  $a \geq 0$
- (b)  $a \leq \frac{1}{3}l$
- (c)  $a \leq \frac{1}{2}l$
- (d)  $a \geq \frac{1}{2}l$
- (e)  $a \leq \frac{2}{3}l$

*Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Kräfte des Bremsklotzes auf der Höhe des Stabes  $AB$  wirken.*

*Lösung:*

Der erste Schritt besteht darin, das System freizuschneiden. In diesem Fall besteht das System aus 2 Hauptkomponenten (der Seiltrommel  $C$  und dem Stab  $AB$ ) und 2 aufgehängten Massen, die durch ihre Kraft ( $\text{Masse} \cdot g$ ) ersetzt werden können. Die Interaktion zwischen dem Stab und der Seiltrommel wird durch die Normalkraft  $N$  und die dazugehörige Reibungskraft  $R$  dargestellt. Nach Einsetzen der Reaktionskräfte in  $A$  und  $C$  ist die Skizze vollständig:



Damit das System in Ruhe bleibt, müssen die Gleichgewichtsbedingungen für beide Komponenten erfüllt sein. Da der Stab  $AB$  den unbekannten Abstand  $a$  enthält, ist es vorteilhafter, mit der Seiltrommel zu beginnen:

$$MB(C, z) : \quad 0 = -mg \cdot r + R \cdot r \quad \Rightarrow \quad R = mg \quad (1)$$

Und durch die Reibungsformel folgt  $N$  als:

$$R \leq \mu_0 \cdot N \quad \Rightarrow \quad N \geq \frac{R}{\mu_0} = 6R = 6mg \quad (2)$$

Im Stab  $AB$  kann man den Abstand  $a$  direkt ermitteln, indem man das Moment im Punkt  $A$  berechnet:

$$MB(A, z) : \quad 0 = N \cdot a - 2mg \cdot l \quad \Rightarrow \quad a \leq \frac{2mg}{N} l = \frac{1}{3} l \quad (3)$$

Somit ist Antwort (b)  $a \leq \frac{1}{3} l$  richtig.