

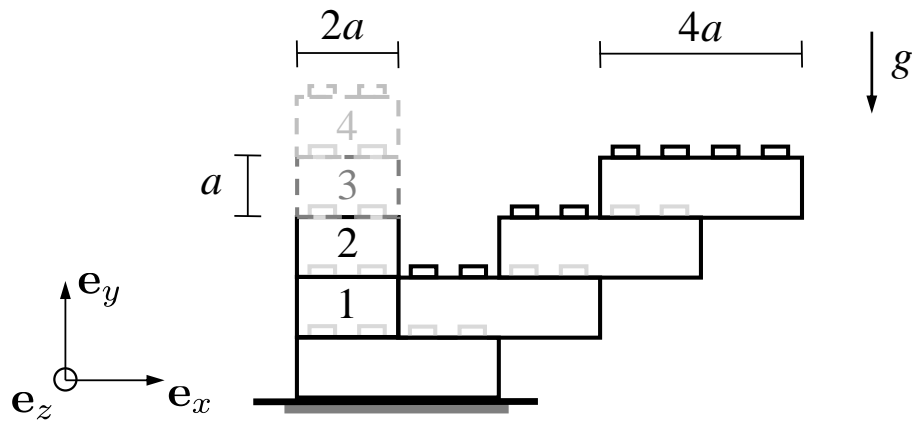
Technische Mechanik
151-0223-10

- Übung 8 -

Dr. Paolo Tiso

21. November 2023

1. Der unten abgebildete Legoturm besteht aus 4 grossen Teilen und einer unbestimmten Anzahl von vertikal gestapelten kleinen Teilen. Die grossen Teile haben die Breite $4a$, Höhe a und Masse m , die kleinen Teile haben die Breite $2a$, Höhe a und Masse $\frac{m}{2}$.

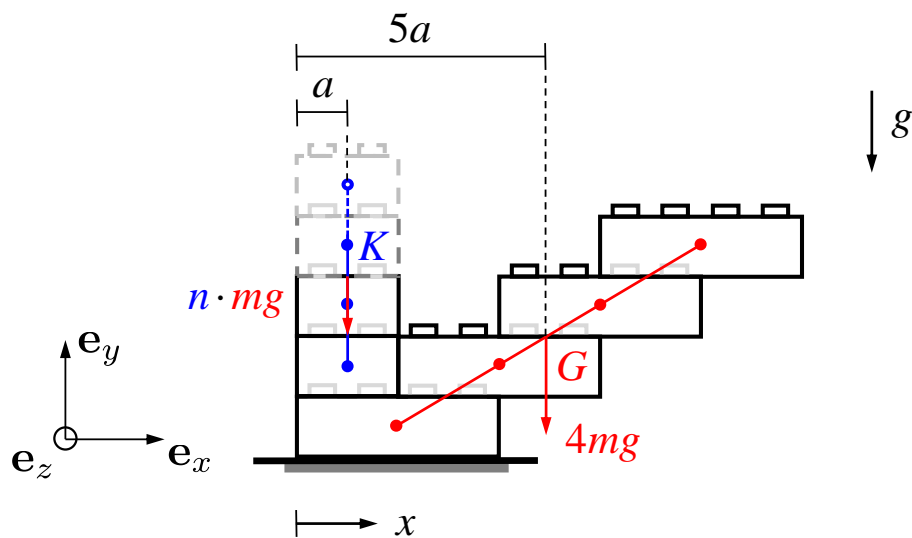


Wie viele kleine Legosteine werden benötigt, um den Turm vom Kippen zu sichern?

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) 4

Lösung:

Die unten abgebildete Skizze dient als grafische Darstellung der folgenden Formeln:



Um das Kippen zu vermeiden, muss der Schwerpunkt in \mathbf{e}_x -Richtung kleiner als $4a$ sein (gemäss der in der Skizze eingeführten Variable x).

Für die grossen Blöcke (G) gilt:

$$m_{\text{gross Stein}} = m \quad (1)$$

$$m_G = 4 \cdot m_{\text{gross Stein}} = 4m \quad (2)$$

$$x_G = 5a, \quad (3)$$

wobei x_G die x-Koordinate des Schwerpunkts des Systems der grossen Blöcke und m_G die entsprechende Gesamtmasse ist.

Für die kleinen Blöcke (K) gilt (n ist die Anzahl der kleinen Blöcke):

$$m_{\text{klein Stein}} = \frac{m}{2} \quad (4)$$

$$m_K = n \cdot m_{\text{klein Stein}} = n \frac{m}{2} \quad (5)$$

$$x_K = a \quad (6)$$

wobei, wie oben, x_K die x-Koordinate des Schwerpunkts des aus kleinen Blöcken bestehenden Teilsystems und m_K die entsprechende Gesamtmasse ist. Dabei wurden die Schwerpunkte in \mathbf{e}_x -Richtung graphisch gelöst.

Der Gesamtschwerpunkt muss dann kleiner als $4a$ sein:

$$x_{\text{Turm}} = \frac{x_G \cdot m_G + x_K \cdot m_K}{m_G + m_K} \leq 4a \quad (7)$$

$$\frac{5a \cdot 4m + a \cdot \frac{nm}{2}}{4m + \frac{nm}{2}} \leq 4a \quad (8)$$

$$5a \cdot 4m + a \cdot \frac{nm}{2} \leq 4a \cdot \left(4m + \frac{nm}{2}\right) \quad (9)$$

$$5m + \frac{nm}{8} \leq 4m + \frac{nm}{2} \quad (10)$$

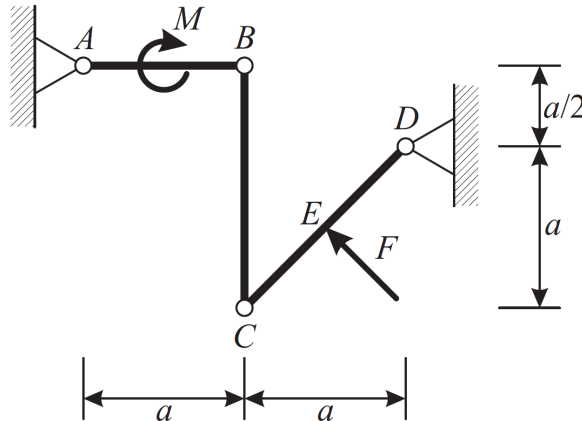
$$m \leq \frac{3nm}{8} \quad (11)$$

$$n \geq \frac{8}{3} \Rightarrow n = 3 \quad (12)$$

Dies ist gegeben durch $n \geq \frac{8}{3} = 2.\bar{6}$, was einer Mindestanzahl von 3 Legosteinen entspricht. Antwort (d) ist somit zutreffend.

2. ¹ Das skizzierte System besteht aus drei gewichtslosen Stäben AB , BC , CD . In A und D ist das System reibungslos gelenkig gelagert. In B und C sind die Stäbe reibungslos gelenkig miteinander verbunden. Am Stab AB greift ein Kräftepaar vom Betrag M an. Senkrecht in der Mitte E des Stabes CD greift eine Kraft vom Betrag F an. Der Betrag M des Kräftepaares sei gegeben und der Betrag F der Kraft sei unbekannt. Das System sei in Ruhe.

Annahmen: Ebenes System, Stäbe starr und gewichtslos, Lager reibungsfrei.



1. Ist das System statisch unbestimmt?
2. Ist das System kinematisch unbestimmt?
3. Bestimmen Sie die Lagerkräfte in D .
4. Bestimmen Sie den Betrag der Kraft F , sodass das System sich in Ruhe befindet.

Lösung:

1. Der Freiheitsgrad des Systems wird mit der folgenden Gleichung für die 3 Stäbe in 2D (3 Freiheitsgrade pro Stab) berechnet:

$$f = n - b \quad \Rightarrow \quad f = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 1 \quad (1)$$

wobei n : Anzahl Gleichungen, b : Anzahl Unbekannte. Dies kann auch mit der üblichen Methode für Fachwerksysteme berechnet werden.

Aus Gleichung (1) kann man 3 verschiedene Auskünfte bekommen:

$f = 0 \quad \Rightarrow$ Das System ist statisch und kinematisch bestimmt. Das bedeutet, dass das System in Ruhe ist und dass die Gleichgewichtsbedingungen immer gültig sind.

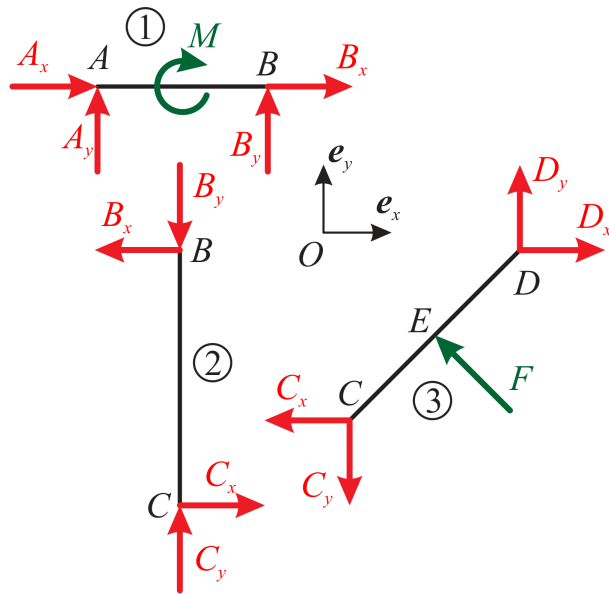
$f < 0 \quad \Rightarrow$ Statisch unbestimmt und kinematisch bestimmt (keine Bewegung). In diesem Fall gibt es mehr Unbekannte als Gleichungen und das System kann nur durch zusätzliche Gleichungen gelöst werden, z.B. durch Verformung des Körpers (dies ist aber nicht Bestandteil dieser Vorlesung).

¹Aufgabe aus der Übungsserie 8 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik », HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

$f > 0 \Rightarrow$ Das System ist ein Mechanismus (die Position ist nicht eindeutig bestimmt und das System kann sich bewegen). Das bedeutet, dass es statisch und kinematisch unbestimmt ist. In diesem Fall sind die Gleichgewichtsbedingungen nur für bestimmte Belastungsfälle gültig (Equilibrium). Mechanismen wurden in den vorherigen Serien zum Thema Geschwindigkeit bereits mehrfach behandelt.

Dieses System ist demzufolge statisch unbestimmt.

2. Ja, da der Freiheitsgrad 1 ist, ist das System kinematisch unbestimmt (siehe Beschreibung im Teil 1).
3. Wenn man das ganze System betrachtet, gibt es 3 Gleichungen (2D Problem) und 4 Unbekannte (2 Lagerkräften in A und 2 in D). Um das System zu lösen, müssen wir dann die extra Gleichungen aus den Gelenken in B und C ausnutzen, das heisst, das System freizuschneiden:



Um die Lagerkräfte in D zu bestimmen, es ist schlau, mit dem Stab CD anzufangen. Bezüglich die Kräften in Punkt C man kann eine Vereinfachung vornehmen, da der nebenstehende Stab BC nur Kräfte in seiner Längsrichtung aufnehmen kann (keine Einspannung oder greifende Kräfte/Momente auf den Stab). Darum greift im Punkt C nur C_y an, und $C_x = 0$. Somit bleiben für den Stab CD die folgende 3 Unbekannte und 3 Gleichungen:

$$MB_{CD}(D, z) : \quad 0 = -F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a + C_y \cdot a \quad \Rightarrow \quad C_y = \frac{\sqrt{2}}{2}F \quad (2)$$

$$KB_{CD}(x) : \quad 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}F + D_x \quad \Rightarrow \quad D_x = \frac{\sqrt{2}}{2}F \quad (3)$$

$$KB_{CD}(y) : \quad 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}F - C_y + D_y \quad \Rightarrow \quad D_y = 0 \quad (4)$$

4. Um das System in Ruhe zu halten, müssen sich das Moment M und die Kraft F aufheben. In den vorherigen Teil 3 wurde das Gleichgewicht am Stab CD berechnet. Wie vorher erwähnt, kann Stab BC nur Kräfte entlang seiner Axis aufnehmen, darum $B_x = 0$ und B_y kann aus dem Vertikalen GGW berechnet werden:

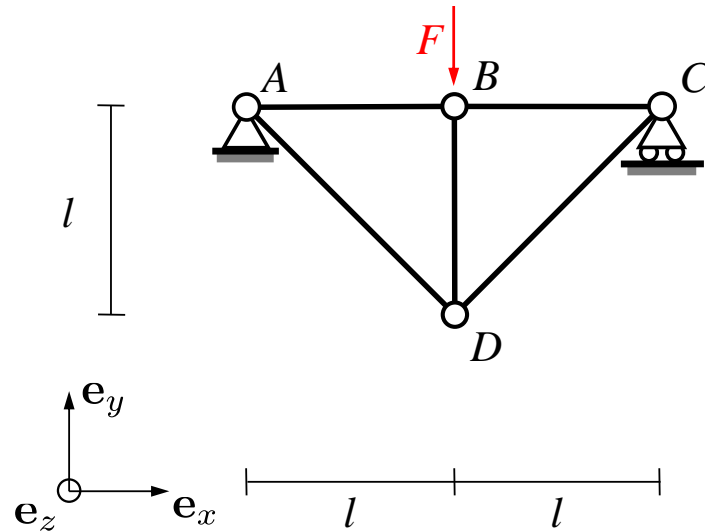
$$KB_{BC}(y) : \quad 0 = C_y - B_y \quad \Rightarrow \quad B_y = C_y = \frac{\sqrt{2}}{2}F \quad (5)$$

Im Stab AB ist nur den Zusammenhang zwischen M und B_y benötigt; das kann direkt aus dem Momentengleichgewicht in A wie folgt berechnet werden:

$$MB_{AB}(A, z) : \quad 0 = B_y \cdot a - M \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\sqrt{2}}{2}F \cdot a \quad \Rightarrow \quad F = \sqrt{2} \frac{M}{a} \quad (6)$$

(Bem.: die Lage eines extern greifenden Moment, wie M in dieser Aufgabe, spielt für das Momentengleichgewicht keine Rolle.)

3. Das unten skizzierte Fachwerk besteht aus 5 masselosen gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen können aus der Skizze abgelesen werden. Eine Kraft F wirkt im Punkt B in negativer \mathbf{e}_y Richtung. Punkt A ist gelenkig gelagert und Punkt C ist mit einem Rolllager verbunden (siehe Skizze).

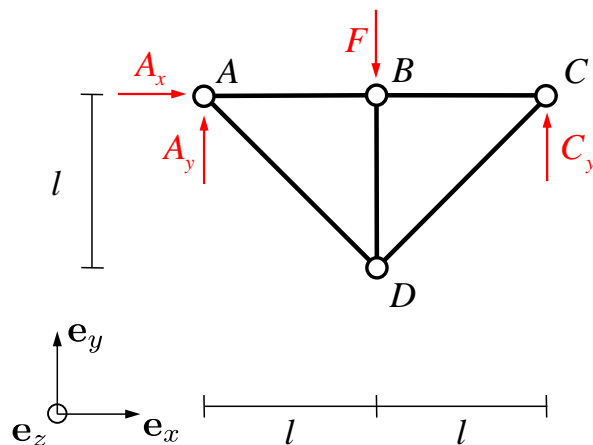


1. Berechnen Sie die Reaktionskräfte in A und C .
2. Bestimmen Sie alle Stabkräfte und ob sie Zug- oder Druckstäbe sind.

Hinweis: Das System ist statisch bestimmt. Um die Stabkräfte zu berechnen, verwenden Sie das Knotengleichgewicht.

Lösung:

1. Die Reaktionskräfte (in der Skizze abgebildet) können anhand der Gleichgewichtsbedingungen am Körper $ABCD$ berechnet werden:

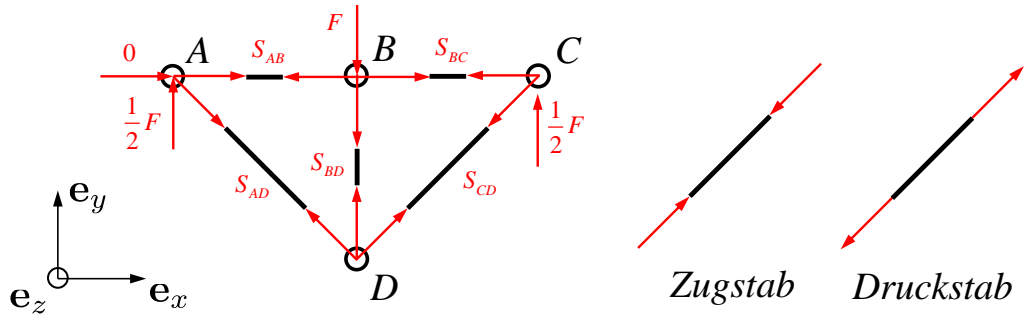


$$KB(x) : \quad 0 = A_x \quad \Rightarrow \quad A_x = 0 \quad (1)$$

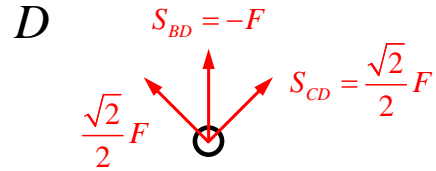
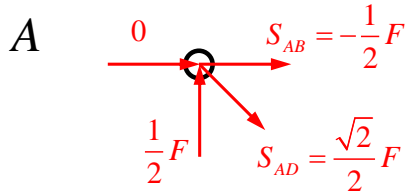
$$MB(A, z) : \quad 0 = -F \cdot l + C_y \cdot 2l \quad \Rightarrow \quad C_y = \frac{1}{2}F \quad (2)$$

$$KB(y) : \quad 0 = A_y - F + C_y \quad \Rightarrow \quad A_y = F - C_y = \frac{1}{2}F \quad (3)$$

2. Da ein Knoten einen Punkt darstellt, kann bei jedem Knoten jeweils ein horizontales und ein vertikales Gleichgewicht berechnet werden, aber kein Momentgleichgewicht. Um das Knotengleichgewicht zu benutzen, wählt man einen Punkt (Knoten), wo 2 oder weniger unbekannte Kräfte angreifen. Bei gelenkig verbundenen Stäben (wie in diesem Beispiel), kann jeder Stab nur eine Kraft parallel zur Stabrichtung aufnehmen; z.B. Stab AB kann nur eine horizontale Kraft übertragen. Im folgenden dargestellten System wurden alle unbekannten Stabkräfte als Zugstäbe eingeführt. Die Kräfte werden aus der Sicht der Knoten betrachtet, weshalb ein Zugstab stets zwei Knoten zusammenzieht.



Für dieses Beispiel kann man im Punkt A oder C anfangen, da in beiden genau 2 unbekannte Kräfte angreifen. Für Knoten A kann das Gleichgewicht wie folgt berechnet werden (siehe auch Skizze):



$$KB(A, y) : \quad 0 = \frac{1}{2}F - \frac{\sqrt{2}}{2}S_{AD} \Rightarrow S_{AD} = \frac{2}{2\sqrt{2}}F = \frac{\sqrt{2}}{2}F \quad (4)$$

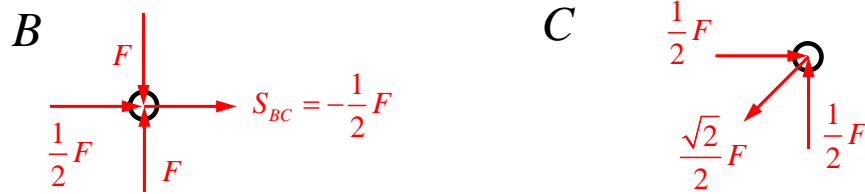
$$KB(A, x) : \quad 0 = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_{AD} + S_{AB} \Rightarrow S_{AB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}S_{AD} = -\frac{1}{2}F \quad (5)$$

Mit S_{AB} und S_{AD} nun bekannt, kann das Knotengleichgewicht auch in den Punkten B und D berechnet werden. Für Punkt D lauten die Gleichungen (siehe auch Skizze):

$$KB(D, x) : \quad 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}F \right) + \frac{\sqrt{2}}{2}S_{CD} \Rightarrow S_{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}F \quad (6)$$

$$KB(D, y) : \quad 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}F \right) + S_{BD} + \frac{\sqrt{2}}{2}S_{CD} \Rightarrow S_{BD} = -F \quad (7)$$

In weiterer Folge kann das Verfahren auf Punkt B angewandt werden (siehe auch Skizze):



$$KB(B, x) : \quad 0 = \frac{1}{2}F + S_{BC} \quad \Rightarrow \quad S_{BC} = -\frac{2}{2}F \quad (8)$$

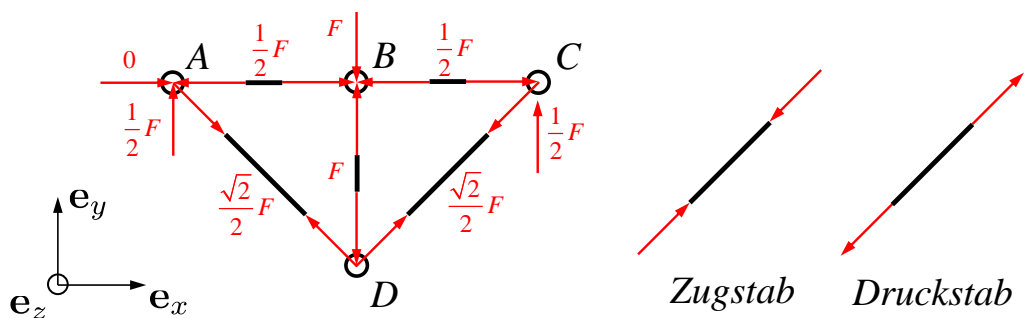
$$KB(B, y) : \quad 0 = -F + F \quad \Rightarrow \quad q.e.d \quad (9)$$

Somit sind alle Stabkräfte berechnet worden. Punkt C (sowie Gleichung 9 von Knoten B) kann zur Überprüfung der vorher berechneten Stabkräfte herangezogen werden:

$$KB(C, x) : \quad 0 = \frac{1}{2}F - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}F \right) \quad \Rightarrow \quad q.e.d \quad (10)$$

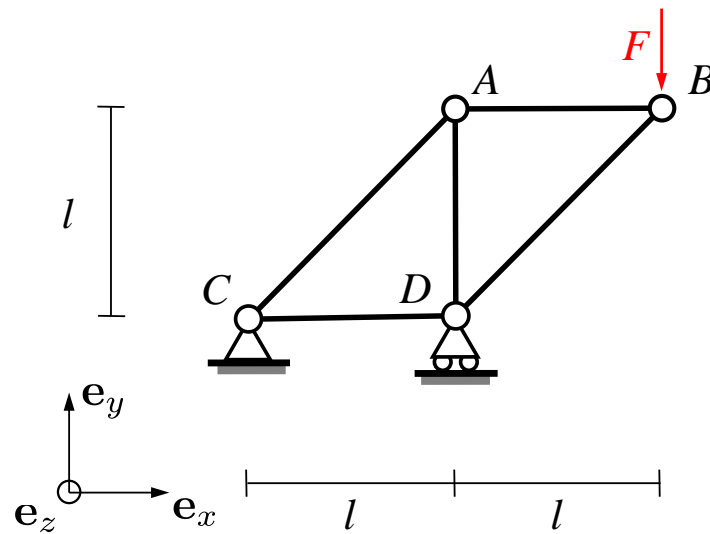
$$KB(C, y) : \quad 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}F \right) + \frac{1}{2}F \quad \Rightarrow \quad q.e.d \quad (11)$$

Zusammengefasst im gesamten System mit den richtigen Pfeilrichtungen ergibt sich die Lösung:



Bemerkung: Die Reihenfolge der gelösten Knoten spielt keine Rolle, solange immer nur 2 oder weniger Unbekannte bei den berechneten Knoten vorhanden sind. Z.B. die Knoten in der Reihenfolge C, B, D, A zu lösen, wäre auch eine zulässige Möglichkeit.

4. Das unten skizzierte Fachwerk besteht aus 5 masselosen gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen können aus der Skizze abgelesen werden. Eine Kraft F wirkt im Punkt B in negativer \mathbf{e}_y Richtung, Punkt C ist gelenkig gelagert und Punkt D ist mit einem Rolllager verbunden (siehe Skizze).



Welche der folgenden Aussagen über die Stabkräfte ist richtig (positive Werte sind Zugstäbe und negative Druckstäbe)?

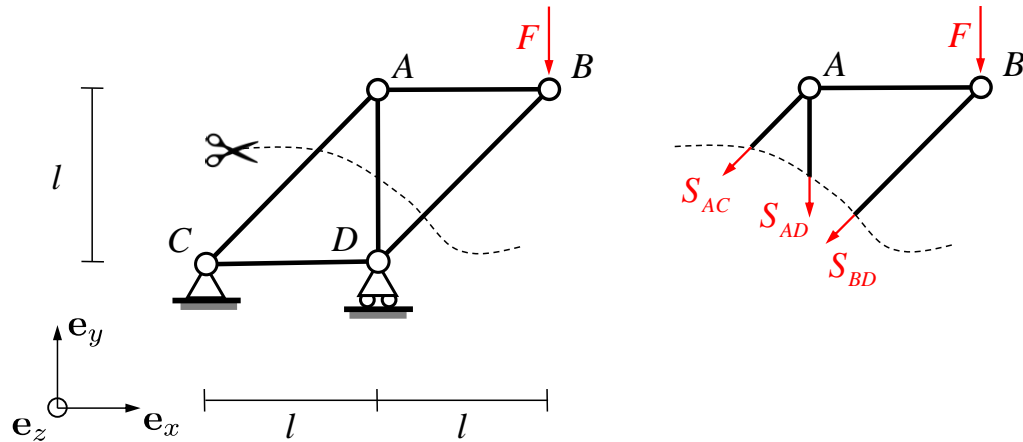
- (a) $S_{AC} = S_{BD} = 2F$
- (b) $S_{AC} = \frac{1}{2} S_{BD} = -F$
- (c) $S_{AC} = -S_{BD} = \sqrt{2}F$
- (d) $S_{AC} = S_{BD} = -\sqrt{2}F$
- (e) $S_{AC} = -\sqrt{2} S_{BD} = F$

Hinweis: Benutzen Sie den 3-Kräftechnitt

Lösung:

Es werden die Stabkräfte S_{AC} und S_{BD} benötigt. Um diese zu berechnen, können das PdvL, das Knotengleichgewicht oder der 3-Kräftechnitt verwendet werden. Für diesen Fall ist der 3-Kräftechnitt am effizientesten, da für das PdvL 2 verschiedene Mechanismen benötigt werden und für das Knotengleichgewicht mindestens die Auflagerkräfte und 2 Knoten berechnet werden müssen.

Um den 3-Kräftechnitt zu benutzen, wird das System in der Mitte geschnitten, wie in der folgenden Abbildung gezeigt:



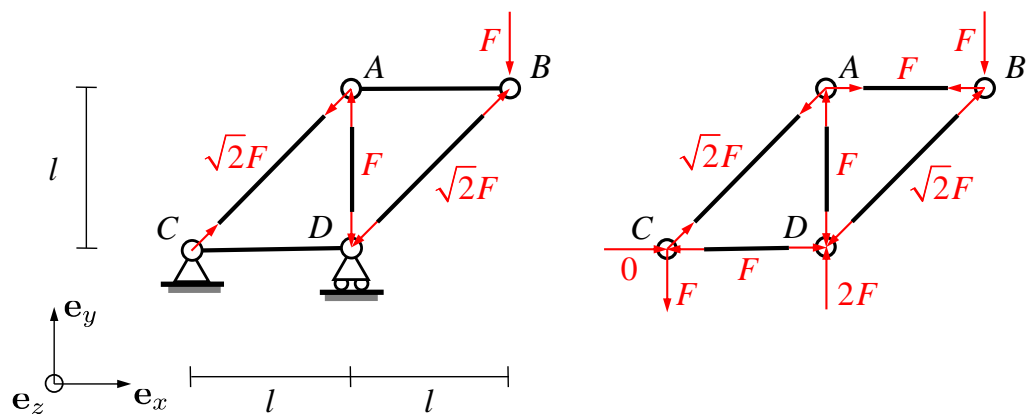
Die 3 Gleichgewichtsgleichungen für das geschnittene System lauten:

$$MB(A, z) : \quad 0 = -F \cdot l - S_{BD} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l \Rightarrow S_{BD} = -\sqrt{2}F \quad (1)$$

$$KB(x) : \quad 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}S_{AC} - \frac{\sqrt{2}}{2}S_{BD} \Rightarrow S_{AC} = -S_{BD} = \sqrt{2}F \quad (2)$$

$$KB(y) : \quad 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}S_{AC} - S_{AD} - \frac{\sqrt{2}}{2}S_{BD} - F \Rightarrow S_{AD} = -F \quad (3)$$

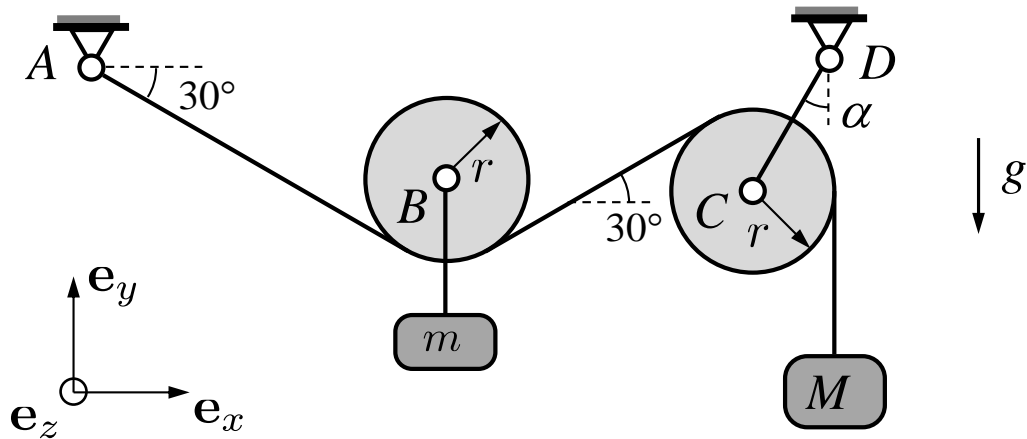
Zusammengefasst sind die berechneten Stabkräfte die folgenden (linke Skizze):



Damit ist Lösung (c) korrekt.

Bemerkung: Der Vollständigkeit halber zeigt die rechte Skizze alle Stabkräfte und die Reaktionskräfte. Diese können z.B. durch das globale Gleichgewicht und das Knotengleichgewicht berechnet werden.

5. Der unten skizzierte Flaschenzug besteht aus 2 masselosen Rollen B und C . Die Masse m hängt an der Rolle B und die Masse M ist an dem Hauptseil befestigt. Das Hauptseil ist am Punkt A befestigt, rollt über die Rollen B und C und endet an der Masse M (siehe Skizze). Die Rolle B wird nur durch das Hauptseil gehalten und die Rolle C ist durch ein Nebenseil mit dem Punkt D verbunden (siehe Skizze). Die Seilwinkel sind in der Skizze angegeben.

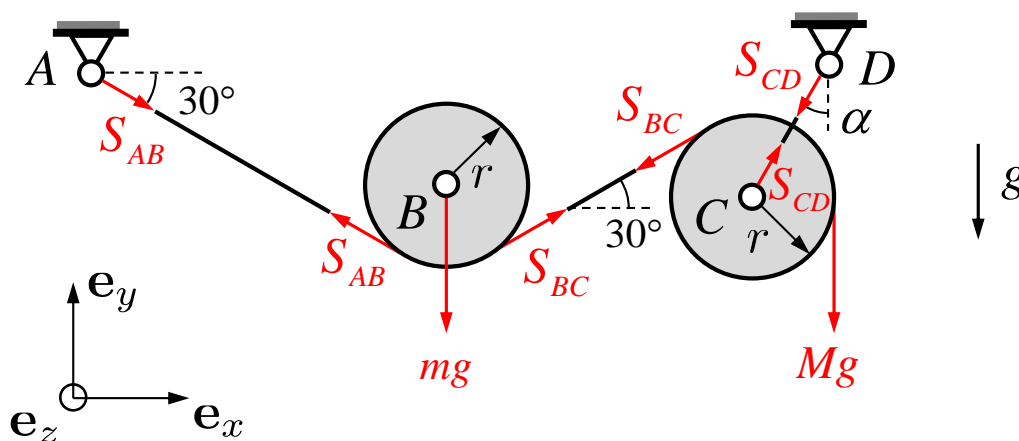


1. Wie muss das Verhältnis zwischen den Massen m und M gewählt werden, damit sich das System in Ruhe befindet?
 - (a) $M = \frac{1}{4}m$
 - (b) $M = \frac{1}{2}m$
 - (c) $M = \frac{\sqrt{3}}{2}m$
 - (d) $M = m$
 - (e) $M = 2m$

2. Wie gross ist der Winkel α , wenn sich das System im Gleichgewicht befindet?
 - (a) $\alpha = 0^\circ$
 - (b) $\alpha = 30^\circ$
 - (c) $\alpha = 45^\circ$
 - (d) $\alpha = 60^\circ$
 - (e) $\alpha = 90^\circ$

Lösung:

1. Der erste Schritt zur Bestimmung der Gleichgewichtslage des Systems besteht darin, die einzelnen Komponenten des Systems freizuschneiden:



Um das Verhältnis zwischen m und M zu berechnen, ist die folgende Methode die einfachste: Durch das Gleichgewicht an den Rollen B und C kann die Seilkraft als Funktion von m (Rolle B) und M (Rolle C) ausgedrückt werden. Wenn die Seilkräfte gleichgesetzt werden, kann das Verhältnis zwischen den Massen gefunden werden.

Die Seilkraft S_{BC} seitens Rolle C lautet:

$$MB(C, z) : \quad 0 = S_{BC} \cdot r - Mg \cdot r \quad \Rightarrow \quad S_{BC} = Mg \quad (1)$$

Die Seilkraft S_{BC} seitens Rolle B lautet:

$$MB(C, z) : \quad 0 = -S_{AB} \cdot r + S_{BC} \cdot r \quad \Rightarrow \quad S_{BC} = S_{AB} \quad (2)$$

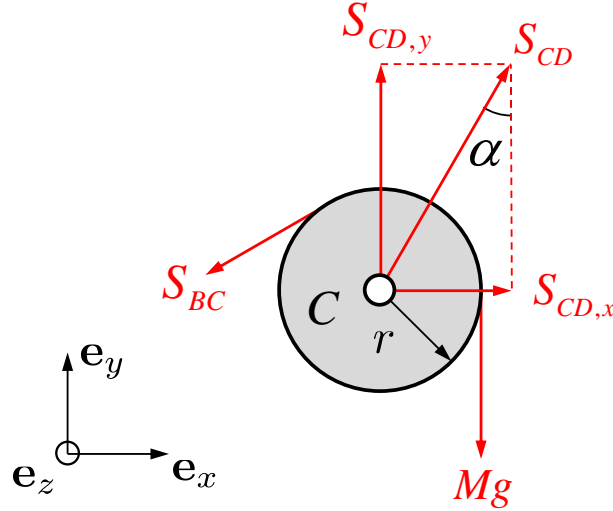
$$KB(y) : \quad 0 = \frac{1}{2}S_{AB} + \frac{1}{2}S_{BC} - mg \quad \Rightarrow \quad S_{BC} = S_{AB} = mg \quad (3)$$

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$S_{BC} = S_{BC} \quad \Rightarrow \quad Mg = mg \quad \Rightarrow \quad M = m \quad (4)$$

Damit ist Lösung (d) richtig.

2. Um den Winkel α zu berechnen, kann das Gleichgewicht bei Rolle C benutzt werden (das Moment wurde schon in Gleichung 1 berechnet):



$$KB(x): \quad 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}S_{BC} + S_{CD,x} \quad \Rightarrow \quad S_{CD,x} = \frac{\sqrt{3}}{2}Mg \quad (5)$$

$$KB(y): \quad 0 = -\frac{1}{2}S_{BC} - Mg + S_{CD,y} \quad \Rightarrow \quad S_{CD,y} = \frac{3}{2}Mg \quad (6)$$

Damit lautet der Betrag von S_{CD} :

$$|S_{CD}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}Mg\right)^2 + \left(\frac{3}{2}Mg\right)^2} = \sqrt{\frac{3+9}{4}}Mg = \sqrt{3}Mg \quad (7)$$

S_{CD} kann wie folgt dargestellt werden:

$$S_{CD} = \sqrt{3}Mg \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{3}Mg \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (8)$$

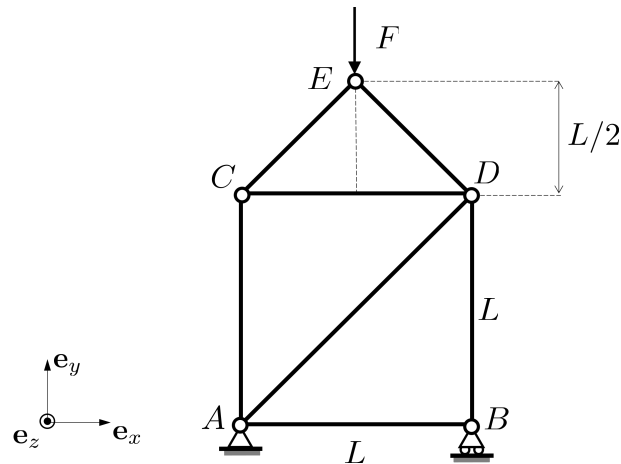
Und der Winkel wird:

$$\Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^\circ \quad (9)$$

Und damit ist Lösung (b) richtig.

Bemerkung: Da S_{BC} und Mg gleich sind, muss S_{CD} auf der Winkelhalbierenden zwischen den beiden Vektoren liegen. Da S_{BC} einen Winkel von 60° zu \mathbf{e}_y hat, muss der Winkel von S_{CD} zu \mathbf{e}_y die Hälfte sein: 30° .

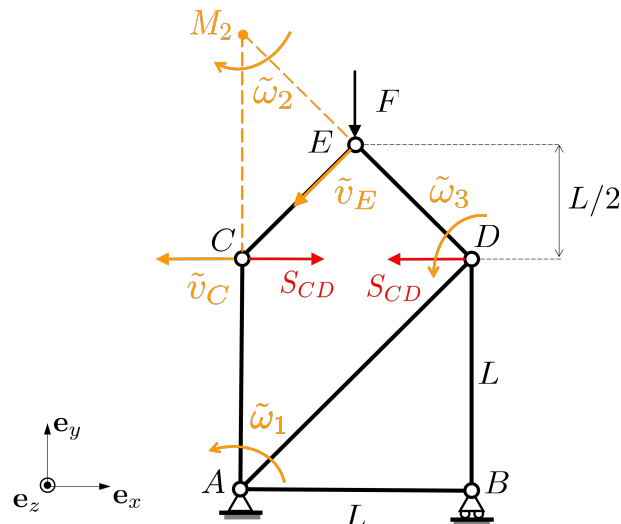
6. Das ebene Fachwerk in der Skizze besteht aus 7 reibungsfrei gelenkig miteinander verbundenen Stäben mit den in der Skizze gegebenen Längen. Im Punkt A ist es gelenkig gelagert, im Punkt B horizontal verschiebbar gelagert, sodass es nicht abheben kann. Im Punkt E greift eine Kraft vom Betrag F wie eingezeichnet an. Was ist die Stabkraft im Stab CD in Abhängigkeit der Kraft F ?



- (a) $S_{CD} = \frac{F}{4}$
 (b) $S_{CD} = F$
 (c) $S_{CD} = \frac{F}{\sqrt{2}}$
 ► (d) $S_{CD} = \frac{F}{2}$
 (e) $S_{CD} = \sqrt{2}F$

Lösung:

Der Stab CD wird entfernt und durch die Stabkraft S_{CD} ersetzt. Wir führen eine virtuelle Bewegung ein, wie in der Abbildung dargestellt:



Der Stab AC bewegt sich mit Rotationsschnelligkeit $\tilde{\omega}_1$ und hat Momentanzentrum A. Der Punkt C hat dann Geschwindigkeit \tilde{v}_C in negative x-Richtung

$$\tilde{v}_C = -L\tilde{\omega}_1. \quad (1)$$

Körper ABD kann keine (virtuelle) Bewegung ausführen, da sonst die Bindungen verletzt werden. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit im Punkt E senkrecht zum Stab ED steht und wir finden das Momentanzentrum M_2 vom Stab CE . Da Punkt C auch zum Stab CE gehört, gilt

$$\tilde{v}_C = -L\tilde{\omega}_1 = L\tilde{\omega}_2 \quad (2)$$

also

$$\rightarrow \quad \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}. \quad (3)$$

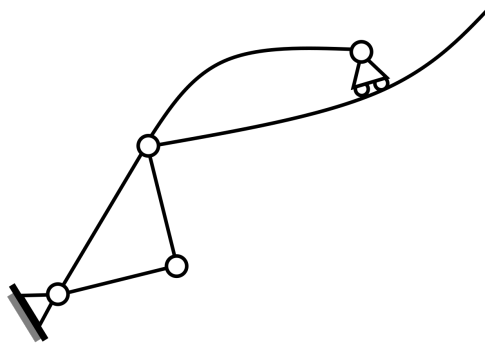
Der horizontale Abstand zwischen C und E beträgt $L/2$. Also lautet die y-Komponente der Geschwindigkeit im Punkt E

$$\tilde{v}_{Ey} = -\frac{L}{2}\tilde{\omega} \quad (4)$$

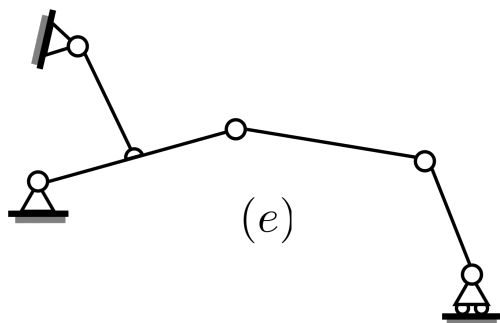
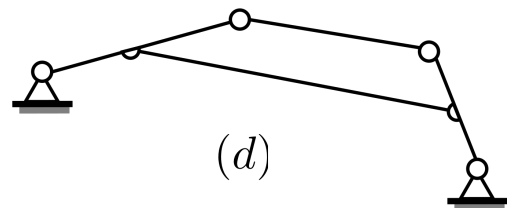
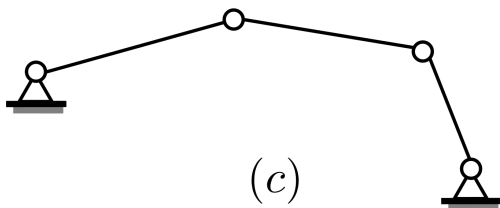
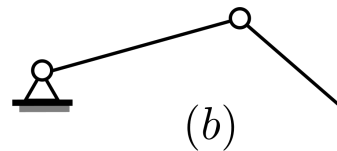
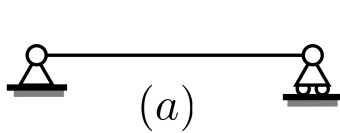
Jetzt können wir das PdvL anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= -\tilde{v}_C S_{CD} + \tilde{v}_{Ey} F = -L\tilde{\omega} S_{CD} + \frac{L}{2}\tilde{\omega} F = 0 \\ \Rightarrow \quad S_{CD} &= \frac{F}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

7. Betrachten Sie das unten abgebildete System, das aus starren gelenkig miteinander verbundenen Stäben besteht.



Welches der folgenden Systeme hat denselben Freiheitsgrad wie das obige?



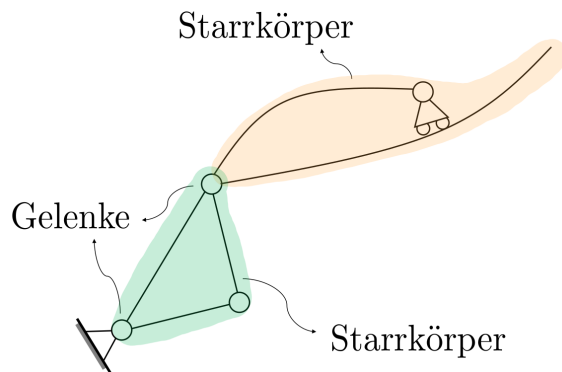
Lösung:

Die richtige Antwort ist (b).

Wir bezeichnen die Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Körper mit n und die Anzahl der (linear unabhängigen) Bindungsgleichungen mit b . Dann erhalten wir den Freiheitsgrad jedes Systems als

$$f = n - b. \quad (1)$$

Alle Einzelkörper der Mehrkörpersysteme liegen in der Ebene. Also besitzt jeder Körper 3 Freiheitsgrade (2 translatorisch, 1 rotatorisch).



Man kann bemerken, dass die Stäbe im abgebildeten System 2 Starrkörper bilden; daher ist die Summe der Freiheitsgrade $n = 3 \cdot 2 = 6$. Durch die 2 Gelenke reduzieren sich die Bewegungsmöglichkeiten um $b = 2 \cdot 2 = 4$; also ist $f = 6 - 4 = 2$.

Eine ähnliche Analyse liefert den Freiheitsgrad der anderen Systeme wie folgt:

- System (a): $n = 3; \quad b = 3 \quad \Rightarrow \quad f = 3 - 3 = 0$
- System (b): $n = 6; \quad b = 4 \quad \Rightarrow \quad f = 6 - 4 = 2$
- System (c): $n = 9; \quad b = 8 \quad \Rightarrow \quad f = 9 - 8 = 1$
- System (d): $n = 12; \quad b = 12 \quad \Rightarrow \quad f = 12 - 12 = 0$
- System (e): $n = 12; \quad b = 11 \quad \Rightarrow \quad f = 12 - 11 = 1$