

Technische Mechanik  
151-0223-10

**- Übung 1 -**

Dr. Paolo Tiso

26. September 2023

1. <sup>1</sup> Ein materieller Punkt  $P$  hat die Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{r}_P(t) = \left( \frac{6L}{5} + \frac{L}{4} \cos \pi t \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{6L}{5} + \frac{L}{4} \sin \pi t \right) \mathbf{e}_y.$$

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_P$  des Punktes  $P$  als Funktion der Zeit.
2. Bestimmen Sie die Schnelligkeit  $v_P$  des Punktes  $P$  als Funktion der Zeit.
3. Welche Bahn beschreibt der Punkt  $P$  ?

*Lösung:*

1. Die Geschwindigkeit des materiellen Punktes  $P$  ist durch die zeitliche Ableitung des Ortsvektor  $\mathbf{r}_P(t)$  gegeben als

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_P &= \frac{d}{dt}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y \\ &= -\frac{\pi L}{4} \sin(\pi t) \mathbf{e}_x + \frac{\pi L}{4} \cos(\pi t) \mathbf{e}_y \\ &= \frac{\pi L}{4} (-\sin(\pi t) \mathbf{e}_x + \cos(\pi t) \mathbf{e}_y). \end{aligned} \quad (1)$$

2. Wir erhalten die Schnelligkeit des Punktes  $P$  aus dem Betrag der Geschwindigkeit als

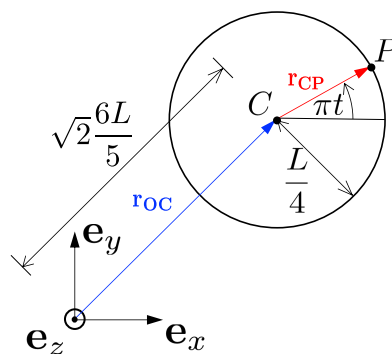
$$\begin{aligned} v_P = |\mathbf{v}_P| &= \sqrt{\left( -\frac{\pi L}{4} \sin(\pi t) \right)^2 + \left( \frac{\pi L}{4} \cos(\pi t) \right)^2} \\ &= \frac{\pi L}{4} \sqrt{\sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t)} = \frac{\pi L}{4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Aus diesem Ergebnis lässt sich erkennen, dass die Schnelligkeit des Punktes **konstant** ist.

3. Die Bahnkurve kann geometrisch dargestellt werden, indem der Ausdruck  $\mathbf{r}_P$  wie folgt leicht umgeformt wird:

$$\mathbf{r}_P = \frac{6L}{5}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + \frac{L}{4}(\cos(\pi t)\mathbf{e}_x + \sin(\pi t)\mathbf{e}_y) = \mathbf{r}_{OC} + \mathbf{r}_{CP}(t) \quad (3)$$

Hier kann man erkennen, dass  $\mathbf{r}_P$  als die Summe der Vektoren  $\mathbf{r}_{OC}$  und  $\mathbf{r}_{CP}$  ausgedrückt werden kann, wobei  $\mathbf{r}_{OC}$  ein konstanter Vektor und  $\mathbf{r}_{CP}$  ein im Kreis rotierender Vektor ist.



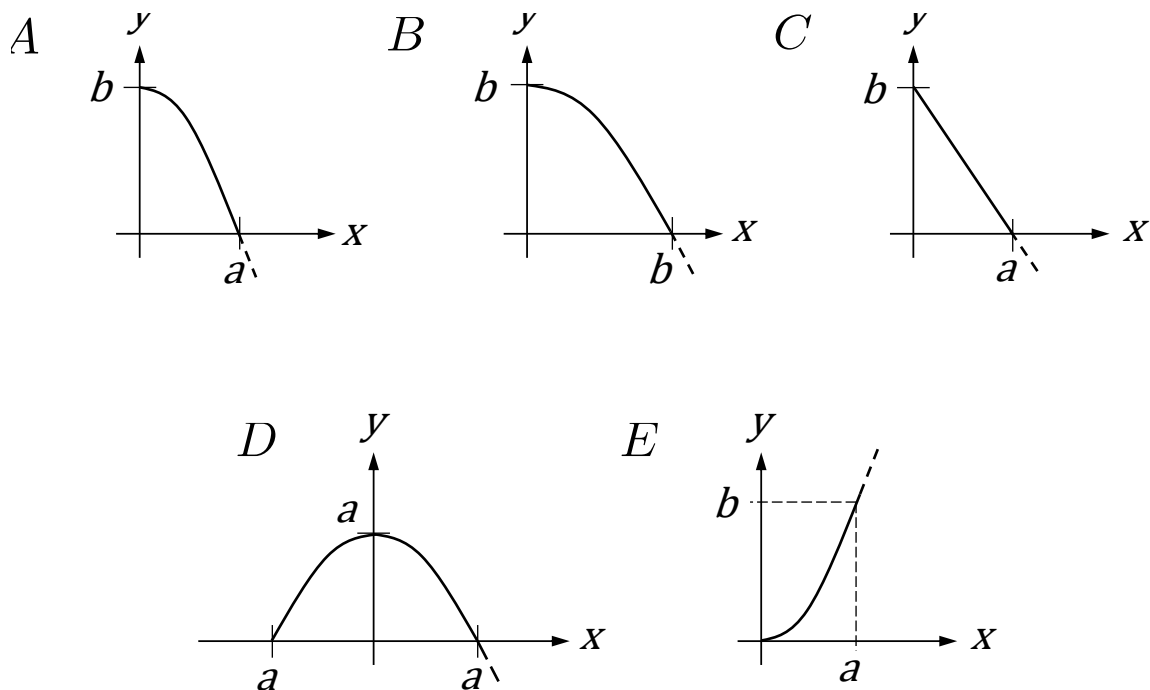
<sup>1</sup>Aufgabe aus der Übungsserie 1 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik », HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

Alternativ kann man bei Betrachtung der Bewegungsgleichungen von  $P$  bemerken, dass es sich um die Parameterdarstellung eines Kreises handelt. Dieser Kreis hat Radius  $R = L/4$  und Mittelpunkt  $C$ , mit  $\mathbf{r}_{OC} = (6L/5\mathbf{e}_x + 6L/5\mathbf{e}_y)$ . Der Punkt  $P$  umrundet also den Punkt  $C$  auf einer Kreisbahn.

2. Betrachten Sie die folgende Bahnkurve:

$$x(t) = at \quad y(t) = b - \frac{a^2}{b}t^2$$

Wobei  $a > 0$  und  $b > 0$  gegebene Konstanten sind und die Zeit  $t \geq 0$  als positiv betrachtet wird.



Welcher von der Graphen stellt die richtige Bahnkurve dar?

- (a) A
- (b) B
- (c) C
- (d) D
- (e) E

*Lösung:*

Die erste Gleichung kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$x = at \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{a} \quad (1)$$

Beim Einsetzen in die zweite Gleichung kann  $y$  anhand von  $x$  beschrieben werden:

$$y = b - \frac{a^2}{b}t^2 \quad \Rightarrow \quad y = b - \frac{a^2}{b} \left( \frac{x}{a} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad y = b - \frac{x^2}{b} \quad (2)$$

Gleichung 2 beschreibt eine negative Parabel, daher können die Lösungen C und E ausgeschlossen werden.

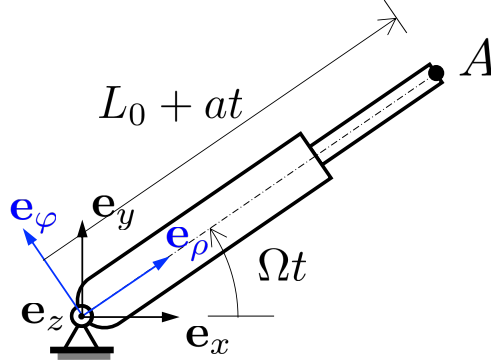
Die bleibenden Lösungen unterscheiden sich durch verschiedene Schnittstellen mit der x- und y-Axis. Diese können wie folgt berechnet werden:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = b - \frac{0}{b} = b \quad (3)$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = b - \frac{x^2}{b} \quad \Rightarrow \quad x^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{b^2} = \pm b \quad (4)$$

Aus  $t \geq 0$ ,  $a > 0$  und Gleichung 1, kann die Variable  $x$  nur positiv sein. Daraus folgt, dass die einzige Lösung mit den Schnittstellen  $x = b$  und  $y = b$  die Lösung  $(b)$  ist.

3. Ein Antrieb, der im Gelenk  $O$  drehbar gelagert wird, rotiert um die  $\mathbf{e}_z$  Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  und verlängert sich gleichzeitig gemäss dem Ausdruck  $L(t) = L_0 + at$ , wie in der folgenden Skizze dargestellt.



1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$  des Punktes  $A$  in Polar- und kartesischen Koordinaten.
2. Bestimmen Sie die Schnelligkeit  $v_A$  des Punktes  $A$ .

*Lösung:*

1. Die Lage des Punktes  $A$  kann in Polarkoordinaten bestimmt werden als

$$\mathbf{r}_{OA} = \rho \mathbf{e}_\rho = (L_0 + at) \mathbf{e}_\rho, \quad (1)$$

wobei

$$\mathbf{e}_\rho = \cos(\Omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\Omega t) \mathbf{e}_y. \quad (2)$$

der polare Einheitsvektor in radialer Richtung ist.

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$  lässt sich dann in Polarkoordinaten bestimmen als

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_{OA} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho \\ &= a \mathbf{e}_\rho + (L_0 + at) \dot{\mathbf{e}}_\rho \\ &= a \mathbf{e}_\rho + (L_0 + at) [-\Omega \sin(\Omega t) \mathbf{e}_x + \Omega \cos(\Omega t) \mathbf{e}_y] \\ &= a \mathbf{e}_\rho + \Omega (L_0 + at) \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin(\Omega t) \mathbf{e}_x + \cos(\Omega t) \mathbf{e}_y. \quad (4)$$

Wie in der Vorlesung gezeigt,  $\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$ , d.h.  $\mathbf{e}_\rho$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  stehen senkrecht zueinander.

Um  $\mathbf{v}_A$  in kartesische Koordinaten umzurechnen, kann man einfach (2) und (4) in (3) einsetzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= a \mathbf{e}_\rho + \Omega (L_0 + at) \mathbf{e}_\varphi \\ &= a (\cos(\Omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\Omega t) \mathbf{e}_y) + \Omega (L_0 + at) (-\sin(\Omega t) \mathbf{e}_x + \cos(\Omega t) \mathbf{e}_y) \\ &= [a \cos(\Omega t) - \Omega (L_0 + at) \sin(\Omega t)] \mathbf{e}_x + [a \sin(\Omega t) + \Omega (L_0 + at) \cos(\Omega t)] \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Ähnlicherweise kann man den Ortsvektor  $\mathbf{r}_{OA}$  in kartesischen Koordinaten ausdrücken als

$$\mathbf{r}_{OA} = (L_0 + at)[\cos(\Omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\Omega t)\mathbf{e}_y]. \quad (6)$$

Die Ableitung nach der Zeit ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= a[\cos(\Omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\Omega t)\mathbf{e}_y] + (L_0 + at)[- \Omega \sin(\Omega t)\mathbf{e}_x + \Omega \cos(\Omega t)\mathbf{e}_y] \\ &= [a \cos(\Omega t) - (L_0 + at)\Omega \sin(\Omega t)]\mathbf{e}_x + [a \sin(\Omega t) + (L_0 + at)\Omega \cos(\Omega t)]\mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Die Schnelligkeit  $v_A$  des Punktes  $A$  wird aus dem Betrag der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$  erhalten:

$$\mathbf{v}_A = a\mathbf{e}_\rho + \Omega(L_0 + at)\mathbf{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad v_A = |\mathbf{v}_A| = \sqrt{a^2 + \Omega^2(L_0 + at)^2}. \quad (8)$$

Man kann zeigen, dass der gleiche Ausdruck aus (7) bestimmt werden kann.

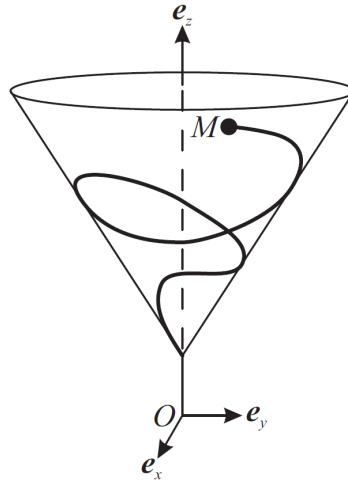
- 4.<sup>2</sup> Ein materieller Punkt  $M$  bewegt sich auf einer Kreiskegelfläche. Die Bewegung des Punktes wird in Zylinderkoordinaten durch die Gleichungen

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \cos \mu t)$$

$$\varphi = \sqrt{3}\mu t$$

$$z = 3 - \cos \mu t$$

gegeben ( $t$  wird in Zeiteinheiten gemessen und  $\mu$  ist eine dimensionslose Konstante).



1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von  $M$  in Zylinderkoordinaten.
2. Berechnen Sie die Schnelligkeit von  $M$ .
3. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von  $M$  in den kartesischen Koordinaten.

*Lösung:*

Die Basisvektoren der Zylinderkoordinaten ausgedrückt in kartesischen Koordinaten sind

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_\rho(\varphi) = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_\varphi(\varphi) = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{1}$$

Der Ortsvektor des materiellen Punktes  $M$  bezüglich des *ruhenden* Ursprungs  $O$  kann dann berechnet werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{OM} = \mathbf{r}_{OM}(t) &= \rho(t) \mathbf{e}_\rho(\varphi(t)) + z(t) \mathbf{e}_z \text{ mit } \rho(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \cos(\mu t)), \\ \varphi(t) &= \sqrt{3}\mu t, \\ z(t) &= 3 - \cos(\mu t). \end{aligned} \tag{2}$$

---

<sup>2</sup>Aufgabe aus der Übungsserie 1 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik », HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.



1. Die Geschwindigkeit von  $M$  in Zylinderkoordinaten kann aus der zeitlichen Ableitung von  $\mathbf{r}_{OM}$  berechnet werden unter Anwendung der Produkt- und Kettenregel als

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_M = \dot{\mathbf{r}}_{OM} &= \frac{d}{dt}(\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z \\
&= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi}(-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) + \dot{z} \mathbf{e}_z = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z \\
&= \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \mu \sin(\mu t) \mathbf{e}_\rho + \frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \cos(\mu t)) \sqrt{3} \mu \mathbf{e}_\varphi + \mu \sin(\mu t) \mathbf{e}_z \right) \\
&= \mu \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\mu t) \mathbf{e}_\rho + (1 - \cos(\mu t)) \mathbf{e}_\varphi + \sin(\mu t) \mathbf{e}_z \right).
\end{aligned} \tag{3}$$

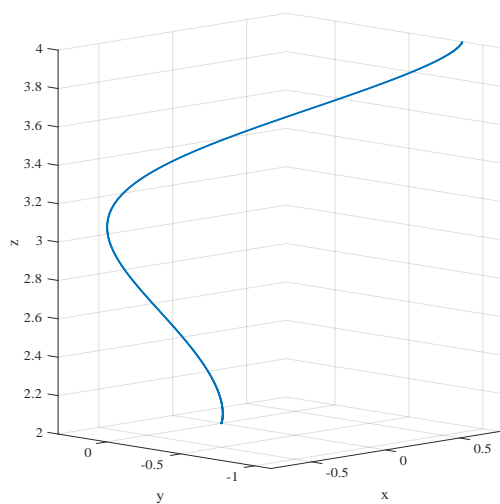
2. Die Schnelligkeit von  $M$  ist als Betrag der Geschwindigkeit aus (3) berechnet als

$$\begin{aligned}
v_M = |\mathbf{v}_M| &= \sqrt{\mathbf{v}_M \cdot \mathbf{v}_M} \\
&= \mu \sqrt{\left( \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\mu t) \right)^2 + (1 - \cos(\mu t))^2 + (\sin(\mu t))^2} \\
&= \mu \sqrt{\frac{1}{3} \sin^2(\mu t) + 1 - 2 \cos(\mu t) + \cos^2(\mu t) + \sin^2(\mu t)} \\
&= \mu \sqrt{2 + \frac{1}{3} \sin^2(\mu t) - 2 \cos(\mu t)}
\end{aligned} \tag{4}$$

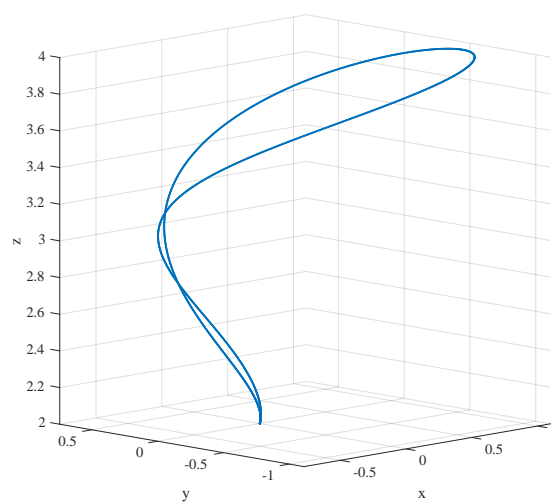
3. Ersetzen der zylindrischen Basisvektoren durch die kartesischen Basisvektoren gemäss (1) liefert die Geschwindigkeit von  $M$  in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_M &= \mu \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\mu t) (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \cos(\mu t)) (-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) + \sin(\mu t) \mathbf{e}_z \right) \\
&= \mu \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\mu t) \cos(\sqrt{3} \mu t) - (1 - \cos(\mu t)) \sin(\sqrt{3} \mu t) \right) \mathbf{e}_x \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\mu t) \sin(\sqrt{3} \mu t) + (1 - \cos(\mu t)) \cos(\sqrt{3} \mu t) \right) \mathbf{e}_y \right. \\
&\quad \left. + \sin(\mu t) \mathbf{e}_z \right].
\end{aligned} \tag{5}$$

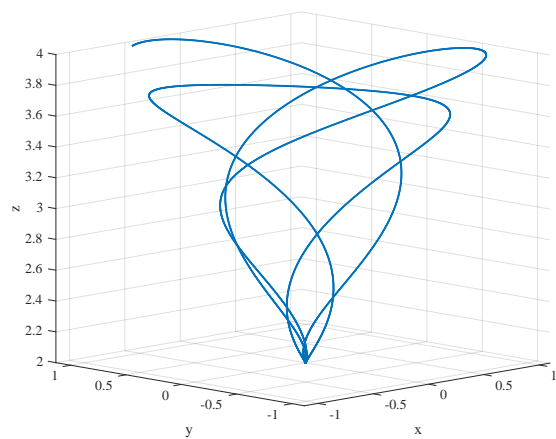
Zusatz:<sup>3</sup> Im Folgenden ist die Bewegung des Punktes  $M$  für  $\mu = \pi$  für unterschiedliche Zeitspannen  $t$  gegeben.



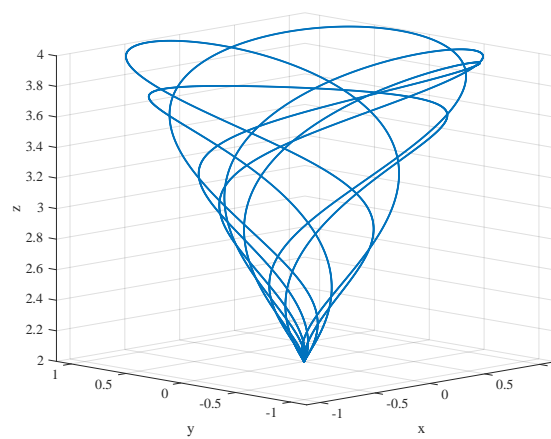
$0 < t < 1$



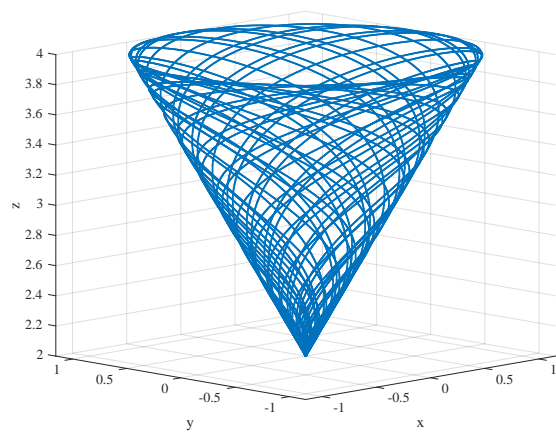
$0 < t < 2$



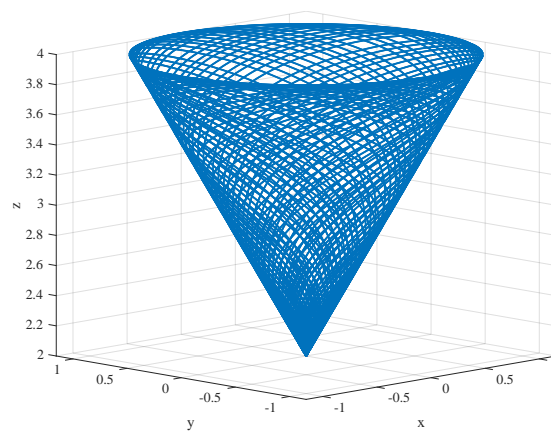
$0 < t < 5$



$0 < t < 10$



$0 < t < 50$



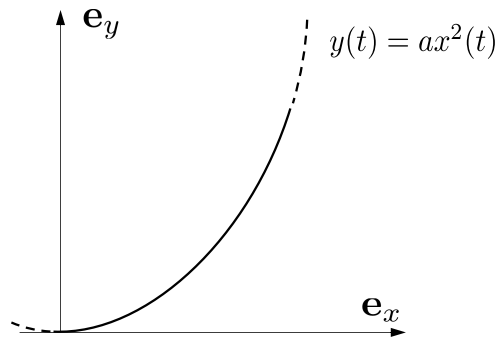
$0 < t < 100$

---

<sup>3</sup>Danke an Maximilian Stralz für dieses zusätzliche Material.

5. Gegeben sei die Bahnkurve  $y(t) = ax^2(t)$ . Zur Zeit  $t_1 = 1$  [s] sind  $x(t_1)$  und  $\dot{x}(t_1)$  gegeben als

$$x(t_1) = 1; \quad \dot{x}(t_1) = 1.$$



Was ist die Schnelligkeit  $v(t_1)$  ?

- (a)  $v(t_1) = \sqrt{2 + 4a^2}$
- (b)  $v(t_1) = \sqrt{2 - \frac{1}{2}a^2}$
- (c)  $v(t_1) = -\sqrt{1 + 4a^2}$
- (d)  $v(t_1) = \sqrt{2 + \frac{1}{2}a^2}$
- (e)  $v(t_1) = \sqrt{1 + 4a^2}$

*Lösung:*

Beim Ableiten der Bahnkurve nach der Zeit  $t$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(ax^2(t)) \\ &= \frac{dy(t)}{dx} \frac{dx(t)}{dt} = a \frac{d}{dx}(x^2(t)) \dot{x}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

also

$$\dot{y}(t) = 2ax(t)\dot{x}(t), \tag{2}$$

wobei man die Kettenregel beachten muss, da  $x = x(t)$  eine Funktion der Zeit ist.

Wenn  $x(t_1)$  und  $\dot{x}(t_1)$  in (2) eingesetzt werden, erhält man

$$\dot{y}(t_1) = 2ax(t_1)\dot{x}(t_1) \Rightarrow \dot{y}(t_1) = 2a \tag{3}$$

Laut Definition ist die Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten zur Zeit  $t_1$

$$\mathbf{v}(t_1) = \dot{x}(t_1)\mathbf{e}_x + \dot{y}(t_1)\mathbf{e}_y = 1\mathbf{e}_x + 2a\mathbf{e}_y. \tag{4}$$

Die Schnelligkeit  $v(t_1)$  wird aus dem Betrag der Geschwindigkeit zur Zeit  $t_1$  erhalten als

$$v(t_1) = |\mathbf{v}(t_1)| = \sqrt{1 + 4a^2}. \tag{5}$$