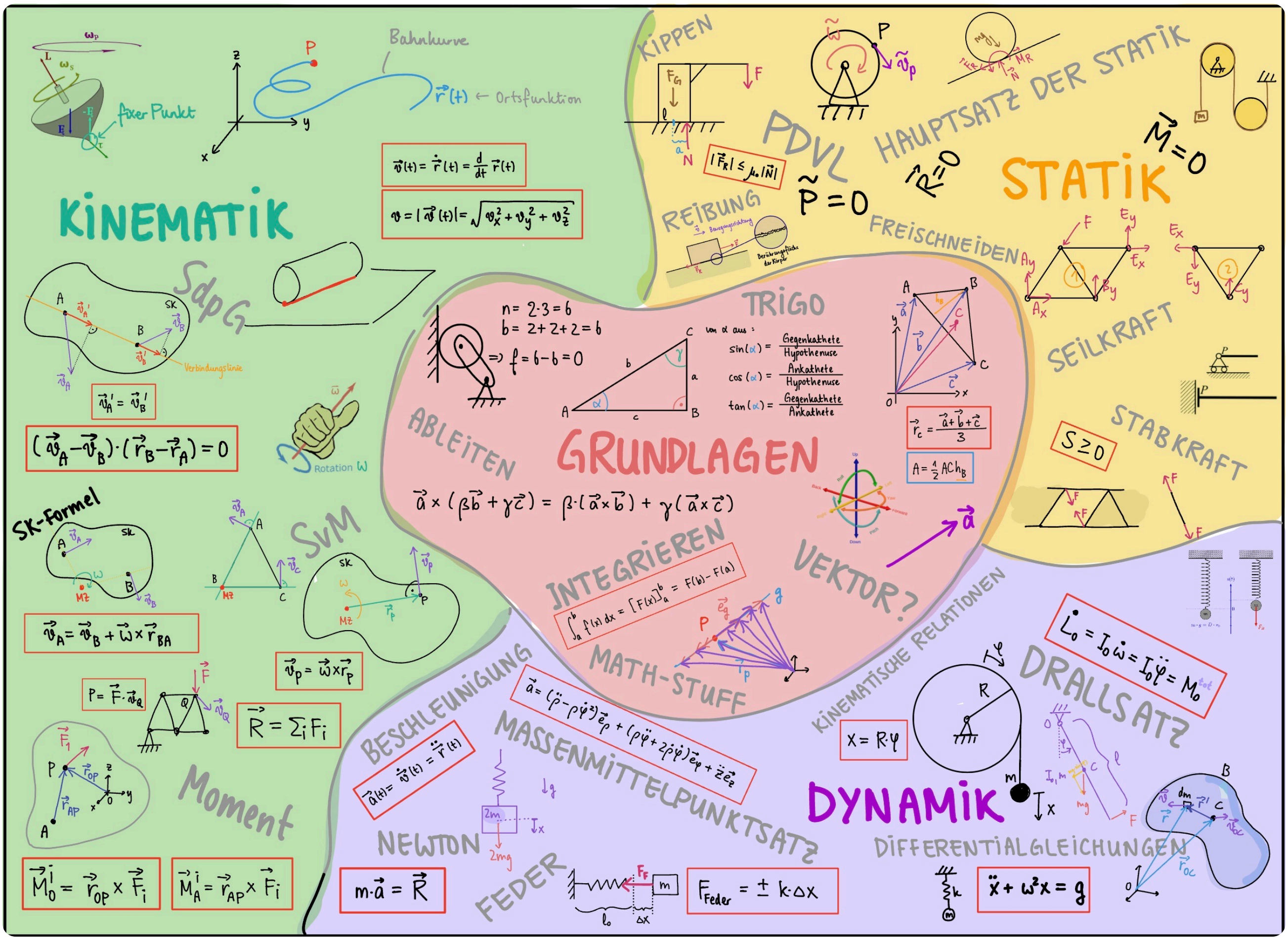
D-ITET / D-MAVT / D-USYS

Technische Mechanik

PVK



* Diese Abbildung enthält nicht alle Formeln!

Manuskript

ohne Lösungen, mit Lücken zum ausfüllen :)

Erstellt von Lina De Windt in Kollaboration mit Maximilian Stralz

Für die Vorlesung "Technische Mechanik" von Dr. P. Tiso

ETH Zürich Herbstsemester 2022

Revidiert & bearbeitet für HS23

Vorwort

Dieses Skript wurde im Rahmen des Technische Mechanik-PVK für D-ITET und D-USYS im HS22 erstellt. Es deckt nicht den Stoff der gesamten Vorlesung ab, sondern dient eher als Stoffüberblick oder Nachschlageort, falls Grundlagen eines bestimmten Themas nicht gut sitzen.

Alle Unterlagen zum PVK (unter anderem die Quizzes / Aufgaben zum Manuskript) findest du auf meiner Webseite oder in Max's Polybox:

Lina De Windt
n.ethz.ch
https://n.ethz.ch/~ldewindt/

Files - polybox
polybox.ethz.ch
https://polybox.ethz.ch/index.php/s/s6UrI7YqqAGfSHG

Für diese Unterlagen können wir keine Garantie für Korrektheit & Vollständigkeit geben. Wir sind jedoch froh bei Fehler informiert zu werden oder bei Fragen zu helfen:

Lina De Windt ldewindt@ethz.ch
Maximilian Stralz mstralz@ethz.ch

Zürich, der 06.01.2023

Revidiert am 02.01.2024

Übersicht der TechMech-PVK-Materialien:

- → Manuskript mit Lücken zum ausfüllen ← You are here
- Manuskript (mit Lösungen)
- Quizzes & Beispielaufgaben
- Quizzes & Beispielaufgaben mit ausführliche Lösungswege

- Kompakte Übersicht von TechMech

Themen aus der Vorlesung, die wir nicht im PVK besprechen werden:

- Parallele Kräfte

Latest Updates:

10.01.2023 Publikation

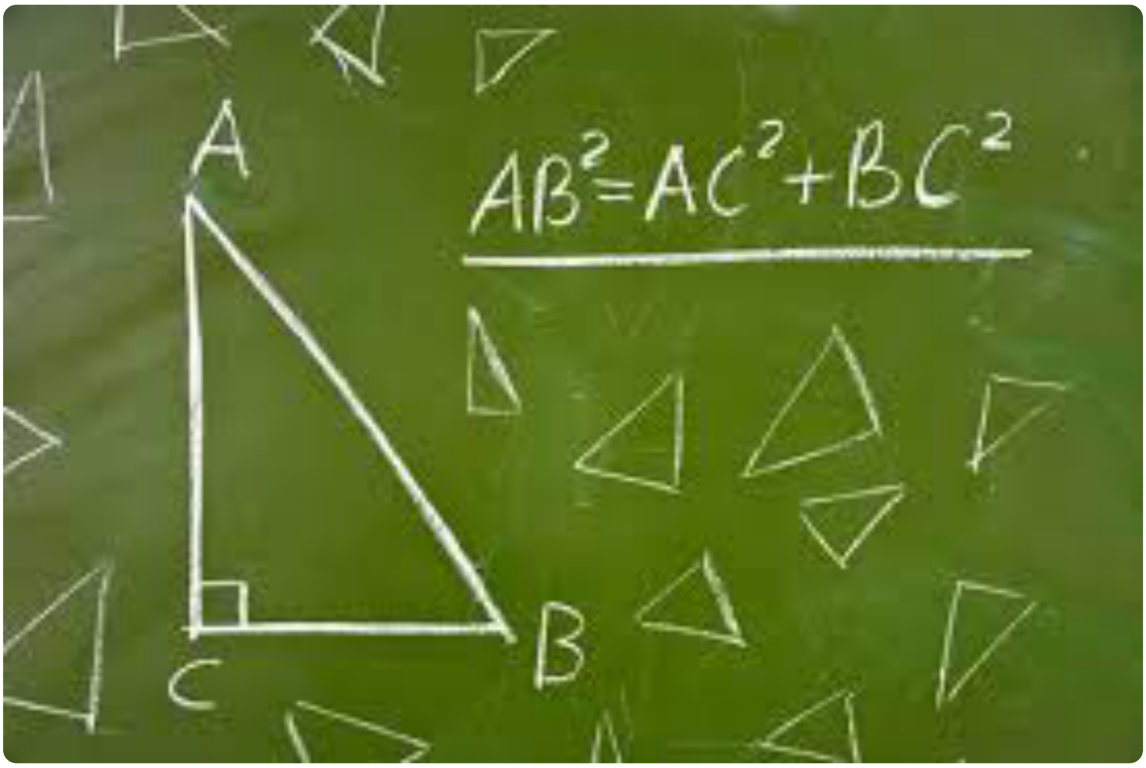
02.01.2024 Revision & Bearbeitung

Inhaltsverzeichnis

Seite | Timeline am PVK

16:00

Teil 1



Grundlagen

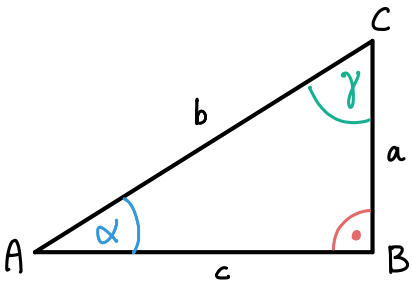
In diesem Kapitel werden die für TechMech (& auch (zumindest für ITET-people) für fast alle anderen Fächern im Studium) nötigen mathematischen & physikalischen Grundlagen (kurz & knapp, nur das Wichtigste) vorgestellt.

Dieses Kapitel werden wir nicht im Detail durchgehen im PVK. Es ist eher für das Selbststudium / als Nachschlageort gedacht. Falls gewisse Themen in diesem Kapitel noch nicht gut sitzen, raten wir euch auf jeden Fall euch noch einmal Zeit zu nehmen um diese Themen anzuschauen. Denn wenn die Grundlagen nicht gut sitzen, kommt man nicht sehr weit in den Aufgaben!

Trigonometrie

In der Trigonometrie werden die Beziehungen zwischen Seiten & Winkeln von Dreiecken untersucht.
Hier aufgelistet sind die Must-Knows von Trigonometrie für TechMech (& auch für das weitere Studium).

Trigonometrie im rechtwinklingen Dreieck



von α aus: (in diesem Bsp.)

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{c}$$

von γ aus: (in diesem Bsp.)

$$\sin(\gamma) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{c}{b}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{b}$$

$$\tan(\gamma) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{c}{a}$$

Merksprüche: ①

$$\overset{s}{\frac{G}{H}} \quad \overset{c}{\frac{A}{H}} \quad \overset{t}{\frac{G}{A}}$$

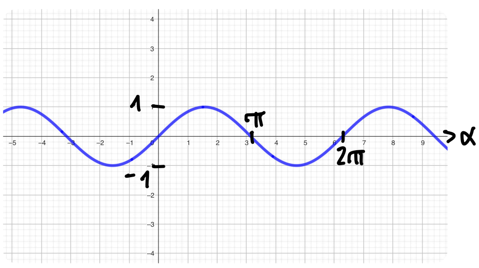
wenn man es dem gelben Pfeil nach liest: GAGHHA ("Lady Gaga")

② Aus dem englischsprachigen Raum: "SohCahToa" (Sin, Cos, Tan)

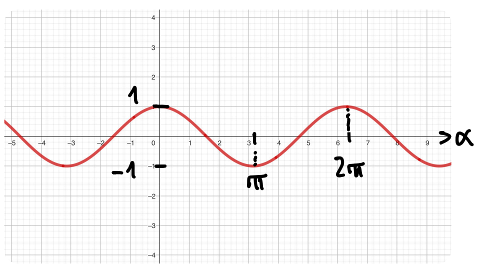
o: opposite (Gegenkathete)
a: adjacent (Ankathete)
h: hypothenuse

Wichtig: sin(α), cos(α), tan(α) sind (periodische) Funktionen. D.h, sie lassen sich graphisch darstellen!

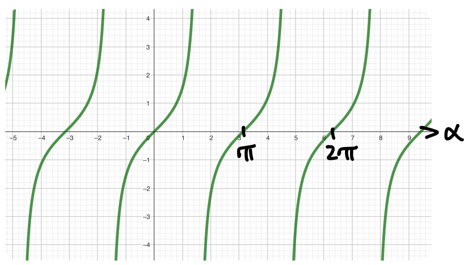
Graphen der wichtigsten trigonometrischen Funktionen



sin(α) 2π-periodisch



cos(α) 2π-periodisch



tan(α) π-periodisch

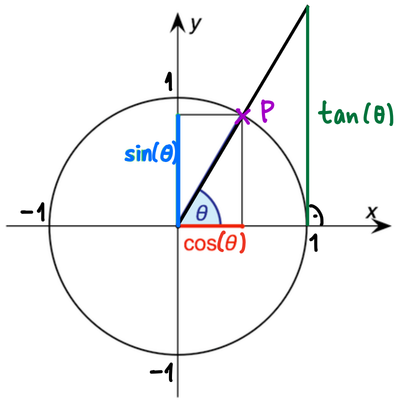
Wichtig: Die Umkehrfunktionen von sin(α), cos(α), tan(α) sind (der Reihenfolge nach) arcsin(a), arccos(a), arctan(a). (arcsin(a), arccos(a) nur definiert auf $a \in [-1,1]$)

Es ist wichtig zu wissen wie man diese verwenden kann bei Gleichungen mit trig. Funktionen.

Bsp.: $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, α gesucht.

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$$

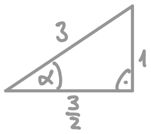
Definitionen der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis



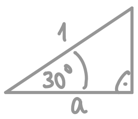
$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ ← x-Koordinate, ← y-Koordinate

x-Achse: Cosinus , y-Achse: Sinus

Trigonometrie, Anwendungen Beispiele:

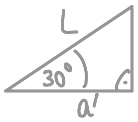
1) 

Bestimme α $\longrightarrow$ $\sin(\alpha) = \frac{G}{H} = \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow$ $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \approx \underline{\underline{19.47°}}$

2) 

Bestimme a $\longrightarrow$ $a = \cos(30°) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

Warum cos? → Stelle dir den Einheitskreis vor!

3) 

Bestimme a' $\longrightarrow$ $\frac{a'}{L} = \cos(30°) \Leftrightarrow a' = L \cdot \cos(30°) = \underline{\underline{L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}}$

ODER: Strahlensatz anwenden auf 2) $\longrightarrow$ $a' = L \cdot a = \underline{\underline{L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}}$

Wichtigste Eigenschaften / Trigrules

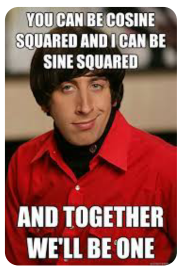
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ (Pythagoras über Einheitskreis!)
- $\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha)$

"gerade Funktion"

- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$ 2π-periodizität

"ungerade Funktion"

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$ 2π-periodizität



Winkeltabelle

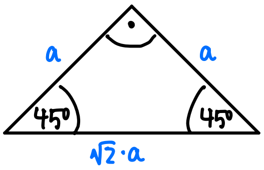
Gradmaß φ	0°	30°	45°	60°	90°
Bogenmaß b	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

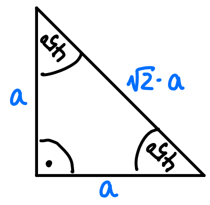
Merkregel

Gradmaß φ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

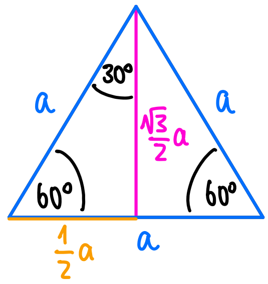
Dreiecke, die häufig vorkommen in TechMech

gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck

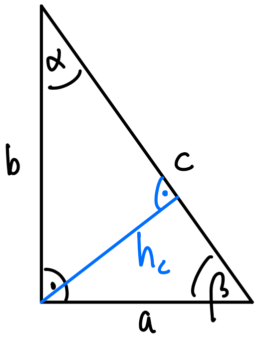




gleichseitiges Dreieck:



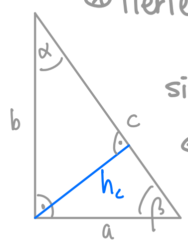
allg. rechtwinkliges Dreieck



$c = \sqrt{a^2+b^2}$ (Pythagoras)

$h_c = \frac{a \cdot b}{c}$ ⊛

⊛ Herleitung:



$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a}$

$\Leftrightarrow h_c = a \cdot \sin(\beta)$ ... ①

aber auch

$\sin(\beta) = \frac{b}{c}$

$\Leftrightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{b}{c}\right)$ ... ②

① & ② $\Rightarrow h_c = a \cdot \sin\left(\arcsin\left(\frac{b}{c}\right)\right)$

$\Leftrightarrow h_c = a \cdot \frac{b}{c}$ □

DEG vs. RAD

Winkel kann man entweder in DEG (Gradmass, °) oder RAD (Radmass, SI-Einheit für Winkelmasse) angeben.

Die Umformung zwischen DEG und RAD erfolgt wie folgt:

RAD → DEG

$$\boxed{\alpha \text{ RAD} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180°}$$

schreibt man normalerweise nicht.

DEG → RAD

$$\boxed{\alpha° = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi \text{ RAD}}$$

Wichtige Grössen:

$\frac{\pi}{2}$ (RAD) = 90°

·2 ·2

π (RAD) = 180°

·2 ·2

2π (RAD) = 360°

usw.

in Trig.Funktionen einsetzen: $\cos(\pi) = \cos(180°) = -1$

$\sin(\pi) = \sin(180°) = 0$

$\sin(2\pi) = \sin(360°) = 0$

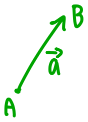
usw.

⚠ Passt auf dass ihr jeweils den Taschenrechner richtig einstellt! (RAD or DEG → jedes Mal überprüfen!)

Vektoren (2D & 3D)

Basics: Was sind Vektoren überhaupt? Im Rahmen der Technischen Mechanik Vorlesung sind Vektoren einfach gesagt Pfeile. Ein Vektor hat immer eine Länge und eine Richtung. (z.B. $\vec{a} = \underset{\text{Länge}}{a} \cdot \underset{\text{Richtung}}{\vec{e}_a}$)

Beispiel



$\vec{a}$ ist ein Vektor vom Punkt A zu Punkt B.

Ein Vektor kann auf zwei Arten beschrieben werden:

① 2D: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ← x-Komponente, ← y-Komponente

3D: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ ← x-Komponente, ← y-Komponente, ← z-Komponente

Vorteil dieser Schreibweise: übersichtlich

② $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$

Einheitsvektoren (Basis)

$\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$

Vorteil dieser Schreibweise: Basis (hier $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) sofort klar

Good to know: Notation von Vektoren (die folgenden Schreibweisen sind äquivalent):

- $\vec{a}$ Pfeil oben
- $\underline{a}$ Strich unten
- $\mathbf{a}$ fett

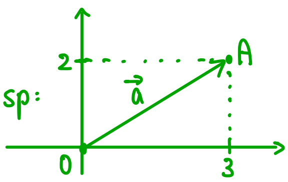
Ihr dürft die Schreibweise wählen die ihr möchtet, doch bleibt konsistent! Ich werde in meinen Übungsmaterialien die Schreibweise mit dem Pfeil oben ($\vec{a}$) benutzen.

Länge und Richtung: Die Länge (aka. Betrag, (zwei-) Norm) eines Vektors beschreibt, wie lang ein Vektor ist. Diese wird wie folgt bestimmt:

2D: $\boxed{|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$

3D: $\boxed{|\vec{b}| = b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

Bsp:



$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

↪ das ist eigentlich nichts anderes als Pythagoras.

kleine Übungen: Bestimme die Länge der folgenden Vektoren:

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 3) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

4) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 5) $\vec{e} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$a = |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$b = |\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

$c = |\vec{c}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 2} = \sqrt{\frac{19}{9}} = \frac{\sqrt{19}}{3}$

$d = |\vec{d}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$e = |\vec{e}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + 1 + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$

Die Richtung eines Vektors wird mit sogenannten Einheitsvektoren angegeben. Die Eigenschaft der Einheitsvektoren ist, dass sie immer die Länge 1 haben.

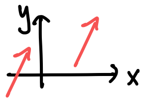
z.B. ist $\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor, da $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

Good to know: Einheitsvektoren schreibt man in der Regel so: $\vec{e}_j$

(wobei j der Index ist → d.h. an der Stelle von j kommen Zahlen / Buchstaben)

Nun wissen wir, wie Vektoren beschrieben werden: $\vec{a} = \underbrace{a}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{\vec{e}_a}_{\text{Richtungen}}$

Da ein Vektor einzig durch ihre Länge & Richtung definiert ist, ist es "egal", wo im Raum sie sich befindet. d.h.



diese 2 Vektoren sind genau dieselben Vektoren.

Good to know: dies ist die analytische Schreibweise von Vektoren. In TechMech sind die Einheitsvektoren i.d.R. die Basisvektoren ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ oder $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$). Deswegen musst du dich oft nicht wirklich um diese kümmern. Vor allem wenn du dein Ergebnis in diese Form: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ angibst, sind die Einheitsvektoren (in diesem Fall $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$) sozusagen schon mit inbegriffen.

Bsp: geben Sie Länge und Richtung der folgenden Vektoren an:

1) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Länge: $|\vec{p}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$

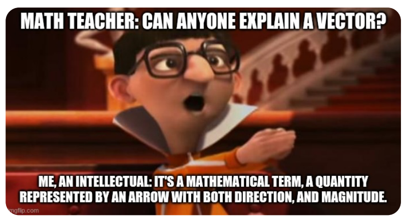
Richtung: $\vec{e}_p = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}}$

durch die Länge teilen

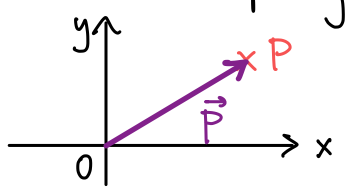
2) $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Länge: $|\vec{q}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38}$

Richtung: $\vec{e}_q = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{38}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}}$



Ortsvektor: verbindet einen Punkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems. Dieser ist eindeutig definiert.



$\vec{p}$ ist der Ortsvektor vom Punkt P.

Rechnen mit Vektoren:

Jetzt wo wir gelernt haben, was Vektoren sind, können wir anfangen mit diesen zu rechnen :)

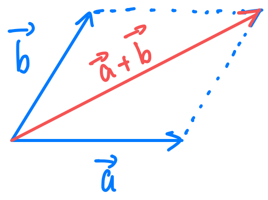
Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ zwei Vektoren. Dann:

Addition:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

Visuell:

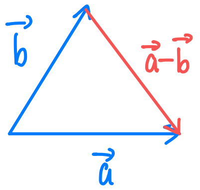


Subtraktion:

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

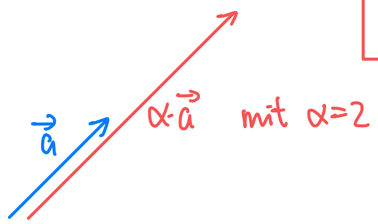
Visuell:



Multiplikation mit einem Skalar:

$$\boxed{\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_x \\ \alpha \cdot a_y \\ \alpha \cdot a_z \end{pmatrix}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Visuell:



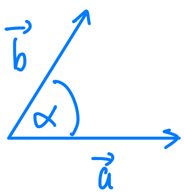
Bsp: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 + 15 + 2 = 25$

Good to know: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)}$



α: der von den beiden Vektoren eingeschlossener Winkel.

Good to know: orthogonale Vektoren: 2 Vektoren, dessen Skalarprodukt 0 ergibt, sind orthogonal (= senkrecht) aufeinander.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}}$$

orthogonal zu

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zusatzfrage: Wann sind 2 Vektoren ($\vec{a}$ und $\vec{b}$) parallel zueinander?

Lö: Wenn der Richtungsvektor gleich ist, oder wenn $|\vec{a}\times\vec{b}|=0$

Kreuzprodukt:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_y\cdot b_z-a_z b_y\\a_z\cdot b_x-a_x\cdot b_z\\a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x\end{pmatrix}}$$

← nur in 3D.

Bsp: $\begin{pmatrix}2\\7\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35-12\\4-10\\6-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\-6\\-1\end{pmatrix}$

Wie kann ich mir die Formel für das Kreuzprodukt merken? → 2 Tricks:

① Der 3-Fisch-Trick:

$$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_y\cdot b_z-b_y\cdot a_z\\a_z\cdot b_x-b_z\cdot a_x\\a_x\cdot b_y-b_x\cdot a_y\end{pmatrix}$$

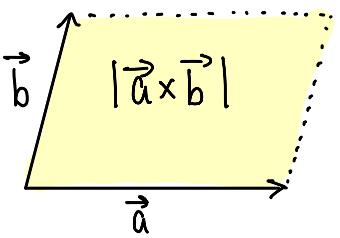
$$\begin{matrix}a_x & b_x\\a_y & b_y\end{matrix}$$

↑ die ersten 2 noch mal unten aufschreiben

② die platzsparende Methode:

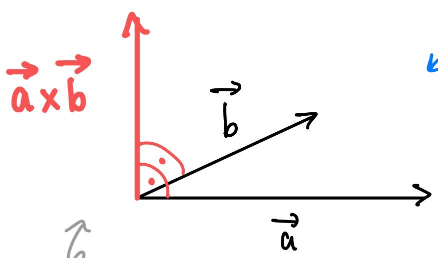
$$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_y\cdot b_z-b_y\cdot a_z\\a_z\cdot b_x-b_z\cdot a_x\\a_x\cdot b_y-b_x\cdot a_y\end{pmatrix}$$

Good to know: Geometrische Bedeutung des Kreuzprodukts:



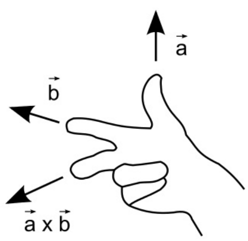
$|\vec{a}\times\vec{b}|$ ist die Fläche des Parallelogramms, welcher von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossen wird.

Good to know: $\vec{a}\times\vec{b}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ sowie $\vec{b}$.



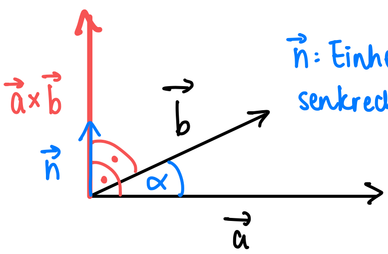
3D-Raum

hier gilt die Rechte-Hand-Regel:



Good to know: $\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\alpha)}$

auch: $\vec{a}\times\vec{b}=(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\alpha))\vec{n}$



$\vec{n}$: Einheitsvektor, welcher senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist

Rechnen mit Wurzeln

Beispiele:

Basics:

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ — $\sqrt{4+21} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{4} + \sqrt{21} \cong 6.58$
- $\sqrt{a^2} = |a|$ — $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3 = |-3|$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ — $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6 \overset{\checkmark}{=} \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3$
- $\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ — $\sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{5^2 \cdot 7} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — $\sqrt{\frac{4}{36}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \overset{\checkmark}{=} \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{36}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Brüche umformen: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$ — $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

häufig verwendeter Trick! das ist einfach $\cdot 1$, deswegen dürfen wir den Bruch so erweitern

Wichtig: Wenn Gleichungen dieser Form: $a^2 = b \iff a = \pm\sqrt{b}$! 2 Lösungen!

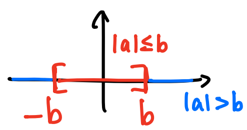
Rechnen mit der Betragsfunktion

Nützliche mathematische Eigenschaften der Betragsfunktion:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0 \iff a = 0$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \left(\text{und } |a^n| = |a|^n\right)$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \left(\text{und } \left|\frac{1}{a^n}\right| = \frac{1}{|a|^n}\right)$

⚠ • $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b \iff a \in [-1,1] \cdot b$



⚠ • $|a| \leq c \cdot |b| \iff -c \cdot b \leq a \leq c \cdot b \iff a \in c \cdot [-1,1] \cdot b$

- $|a+b| \leq |a| + |b|$

Ableiten, Basics

Sei eine Funktion f(t) gegeben. Dann kann man dessen Ableitung schreiben als:

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

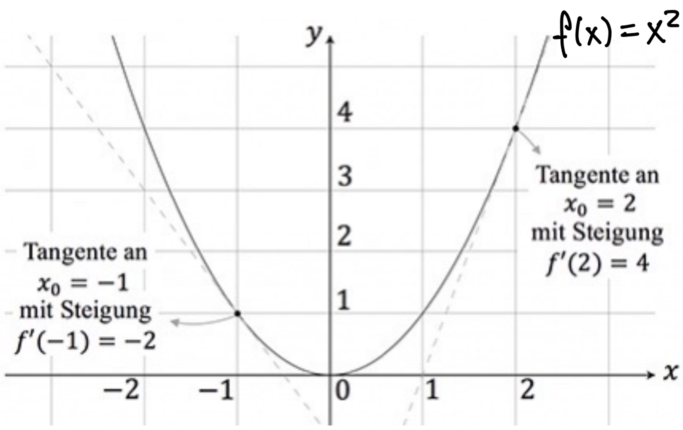
nur eine Variable!

⚠ in TechMech wirst du nur Funktionen einer Variable sehen (d.h. $x(t)$, $y(t)$, $f(x)$, $g(y)$).

Folglich werden wir immer (falls nichts anderes angegeben) nach dem Argument in der Funktion ableiten:

- $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$
- $\dot{x}(t) = x'(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

Geometrisch entspricht die Ableitung einer Funktion der Tangentensteigung:



In der folgenden Tabelle sind die Ableitungen einiger wichtiger Funktionen aufgelistet:

$f(x)$	$f'(x)$	
c	0	Konstante
$a \cdot x + b$	a	
x^p	$p \cdot x^{p-1}$	Polynome
$e^{a \cdot x}$	$a \cdot e^{a \cdot x}$	
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	
$\ln(x)$	$1/x$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$2x^4$	$8x^3$	
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	
$1/x$	$-1/x^2$	

Beim Ableiten muss man auf gewisse Regeln achten:

Beispiel:

Summenregel: $f(x) = u(x) \pm v(x) \longrightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$ — $f(x) := 3x + 5x^2 \rightarrow f'(x) = 3 + 10x$

Faktorregel: $f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Konstante}}}{C} \cdot u(t) \longrightarrow f'(x) = C \cdot u'(t)$ — $f(x) := 5x^3 \rightarrow f' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ — $f(x) := 3x^2 e^x$
$\rightarrow f'(x) = 3 \cdot 2x \cdot e^x + 3x^2 \cdot e^x$
$= 6xe^x + 3x^2 e^x$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ — $f(x) := \frac{4x^2}{x}$
$\rightarrow f'(x) = \frac{8x \cdot x - 4x^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{4x^2}{x^2} = 4$

Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \longrightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ — $f(x) := \sin(x^3)$
$\rightarrow f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$

Mit den Funktionen aus der Tabelle & diese Regeln kannst du bereits sehr viele Funktionen ableiten ! :)

Integrieren, Basics of the Basics

Integration ist die Umkehrung des Ableitens:

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\int dx"] \end{tikzcd}$$

$$f(x) = F'(x) \iff F(x) = \int f(x)\,dx$$

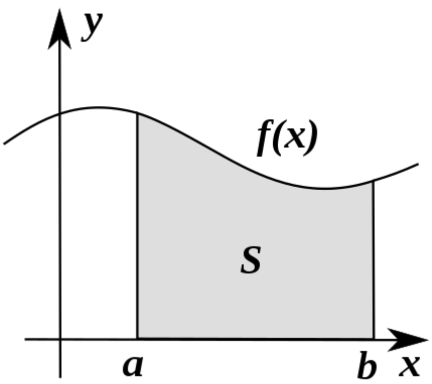
Stammfunktion

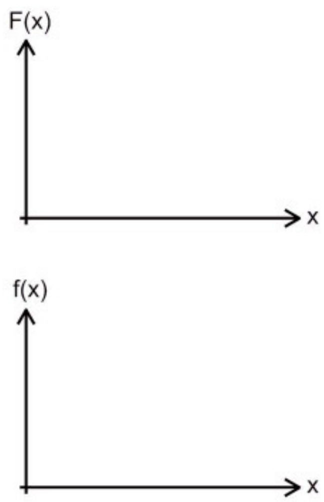
Der **Hauptsatz der Integralrechnung** besagt (vereinfacht, genauer in Ana / KomA), dass für jede Funktion f für welche eine Stammfunktion existiert, dessen Integral wie folgt berechnet werden kann:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Wobei a, b die **Integrationsgrenzen** sind.

Eine gute Interpretation des Integrals ist, dass sie den Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion f im Integrationsbereich von a bis b darstellt:





Einige wichtige Integrale:

Polynome: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, $n \in \mathbb{N}$

⚠ Wenn keine Grenzen: Integrationskonstante nicht vergessen!

Exponentialfunktion: $\int e^x\,dx = e^x + C$, $\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

Trig. funktionen: $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$, $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

$\int \sin(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) + C$, $\int \cos(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) + C$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

↪ mehr in Ana / KomA :) (für ITET)

Wichtig: Linearität vom Integral:

Seien $f(x)$ & $g(x)$ integrierbare Fkt. mit Stammfkt. $F(x)$ & $G(x)$ und α, β Konstanten $\in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

Dann gilt:

$$\boxed{\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx = \alpha \cdot (F(b) - F(a)) + \beta \cdot (G(b) - G(a))}$$

Beispiele: $\int 3x^2 + 5 \; dx = \int 3x^2\,dx + \int 5\,dx = 3 \cdot \int x^2\,dx + \int 5\,dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 5x = x^3 + 5x + C$

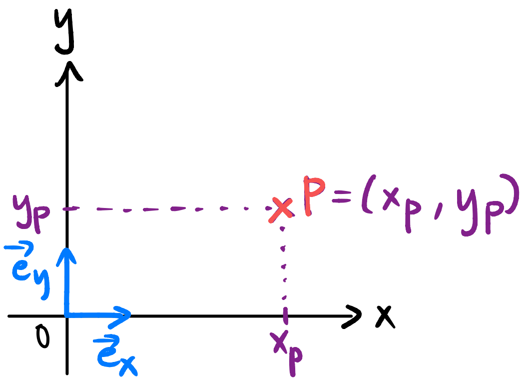
$\int (5x \cdot (x+1))\,dx = \int (5x^2 + 5x)\,dx = \int 5x^2\,dx + \int 5x\,dx = 5 \cdot \int x^2\,dx + 5 \cdot \int x\,dx = \frac{5}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 + C$

$$\int aspiri \; dn =$$

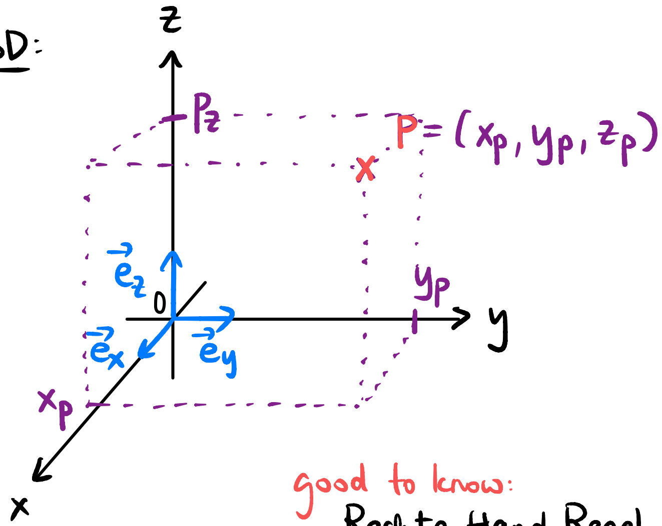
Koordinatensysteme

① kartesische Koordinaten:

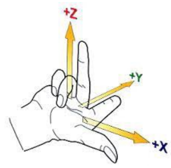
2D:



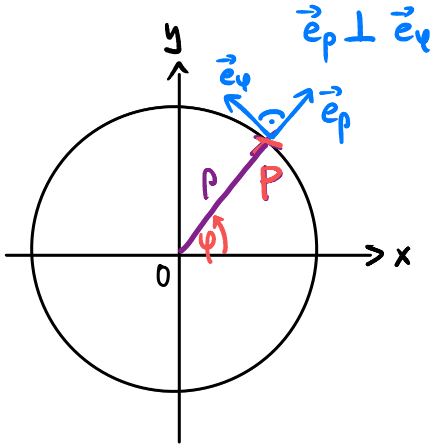
3D:



good to know:
Rechte Hand Regel beachten.



② Polarkoordinaten (nur 2D):



ρ ("rho") beschreibt den Radius.

Einheitsvektoren:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \cos(\varphi)\,\vec{e}_y\end{aligned}}$$

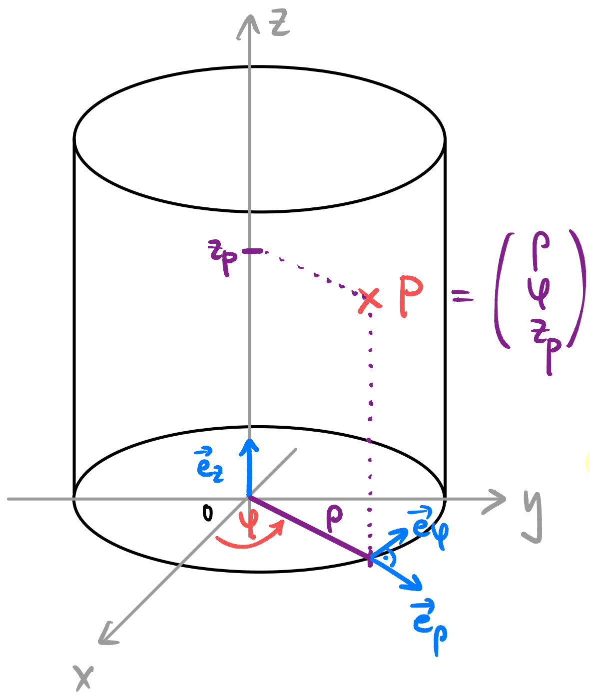
Umrechnung:

Polar → kartesisch	kartesisch → Polar
$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$	⊛ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

⊛ Für φ: Fallunterscheidung:

- falls $x, y > 0$: $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
- falls $x < 0$, y beliebig: $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180°$
- falls $x > 0$, $y < 0$: $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 360°$

③ Zylinderkoordinaten:

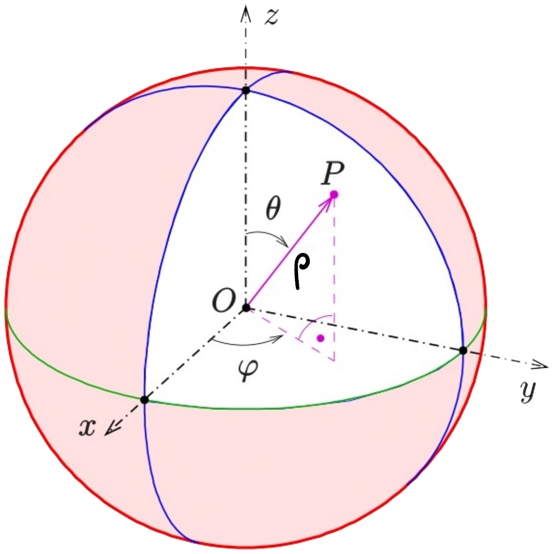


$$\boxed{\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \cos(\varphi)\,\vec{e}_y\end{aligned}}$$

Umrechnung:

Zylinder → kartesisch	kartesisch → Zylinder
$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$	⊛ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$	$z = z$

④ Kugelkoordinaten (nicht wichtig in TechMech aber z.B. in NuS schon :))



$$P = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Umrechnung:

Kugel → Kartesisch	Kartesisch → Kugel
$x = \rho \cdot \sin(\theta)\cos(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = \rho \cdot \cos(\theta)$	$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)$

Andere nützliche mathematische Formeln

(Kamen mal in den Serien vor)

Kreuzprodukt: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $\forall$ Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gilt:

Bilinearität: $\vec{a} \times (\beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \beta \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \gamma(\vec{a} \times \vec{c})$

$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \times \vec{c} = \alpha(\vec{a} \times \vec{c}) + \beta(\vec{b} \times \vec{c})$

$\Rightarrow \vec{a} \times (\beta\vec{b}) = \beta \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\beta\vec{a}) \times \vec{b}$

$\Rightarrow (\alpha\vec{a}) \times (\beta\vec{b}) = \alpha\beta(\vec{a} \times \vec{b}) = (\beta\vec{a}) \times (\alpha\vec{b})$

Skalare darf man raus/reinnehmen in das Kreuzprodukt!

⚠ Antikommutativität: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ nicht $\vec{a} \times \vec{b} \overset{\lightning}{=} \vec{b} \times \vec{a}$! ↯

Grassmann-identität: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

bzw.

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$

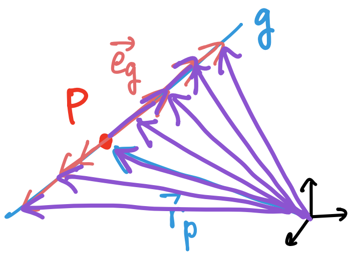
Geraden beschreiben in Vektorform

unsere "Laufvariable" α nimmt alle Zahlen $\in \mathbb{R}$ ein

Eine Gerade wird mathematisch so beschrieben: $g: \boxed{\vec{r}(\alpha) = \vec{r}_p + \alpha \cdot \vec{e}_g}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

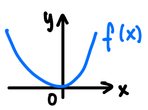
Ortsvektor zu IRGENDEIN Punkt auf der Geraden

Einheitsvektor in Richtung der Gerade

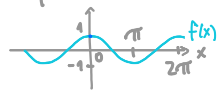


Funktionen: Streckung, Stauchung, Verschiebung, Spiegelung math. beschreiben:

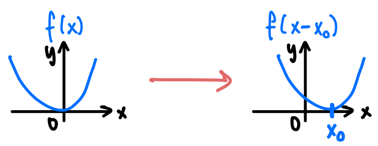
Sei $f(x)$ eine gegebene Funktion:



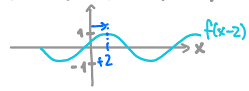
Bsp.: $f(x) = \cos(x)$



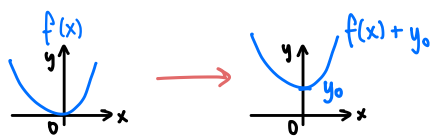
Translation in x: $f(x) \longrightarrow f(x - x_0)$



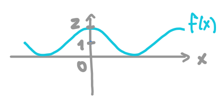
$f(x-2) = \cos(x-2)$



Translation in y: $f(x) \longrightarrow f(x) + y_0$

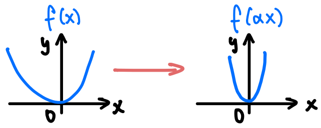


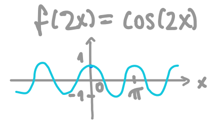
$f(x) + 1 = \cos(x) + 1$



Streckung / Verstauchung um x: $f(x) \longrightarrow f(\alpha x)$

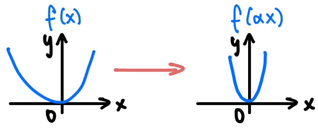
$\alpha<0$ $\qquad$ $\alpha>0$

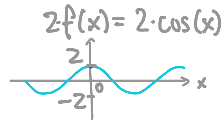




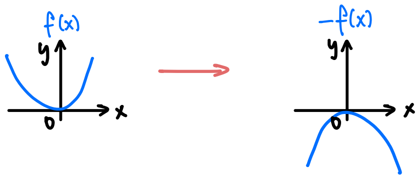
Streckung / Verstauchung um y: $f(x) \longrightarrow \alpha\cdot f(\alpha x)$

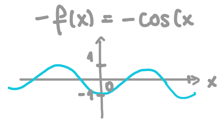
$\alpha<0$ $\qquad$ $\alpha>0$



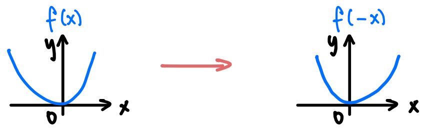


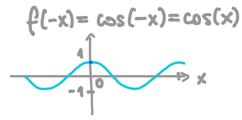
Spiegelung um x: $f(x) \longrightarrow -f(x)$





Spiegelung um y: $f(x) \longrightarrow f(-x)$

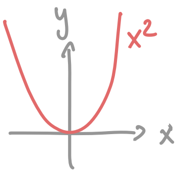




Bei Verschachtelungen: $f(\alpha x+\beta) = f\left(\alpha\cdot\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right)\right) = \underbrace{f(\alpha\cdot(x-x_0))}_{\text{in diese Form bringen.}}$, wobei $x_0 := -\frac{\beta}{\alpha}$

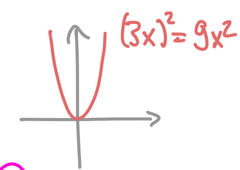
Dann: $\underbrace{\text{zuerst spiegeln/strecken um } \alpha}_{①}$, $\underbrace{\text{dann um } x_0 \text{ verschieben}}_{②}$.

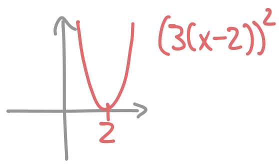
Bsp: $f(x) := x^2$



Skizziere $g(x) := f(3x-6)$

$\longrightarrow g(x) = f\left(3\cdot\left(x-\frac{6}{3}\right)\right) = f(\underset{\alpha}{3}\cdot(x-\underset{x_0}{2}))$





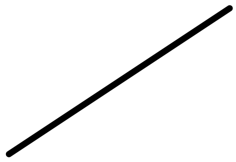
① $f(3x)$ zeichnen

② dann diese Fkt. um $x_0=2$ verschieben

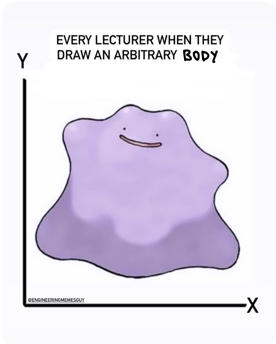
Starrkörper

Ein Starrkörper ist ein Körper, welcher sich nicht deformieren lässt. Alle Punkte auf einem Starrkörper haben jederzeit den selben Abstand zueinander!

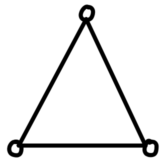
Beispiele Starrkörper in TechMech:



Stab



Stein (?)



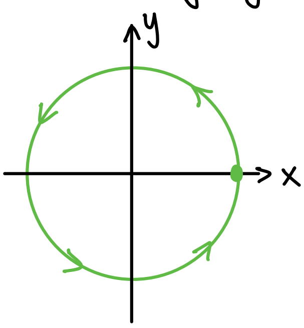
Dreieck aus Stäben & Gelenken

Zeitabhängige Funktionen & deren Parametrisierung

In Physik wollen wir häufig die Bewegung von Objekten beschreiben. Dafür verwenden Funktionen, die von der Zeit abhängen:

"Parametrisieren" heisst, einfach gesagt, dass wir diese Kurven mittels von Parametern beschreiben.

z.B. diese Kreisbewegung kann wie folgt parametrisiert werden:



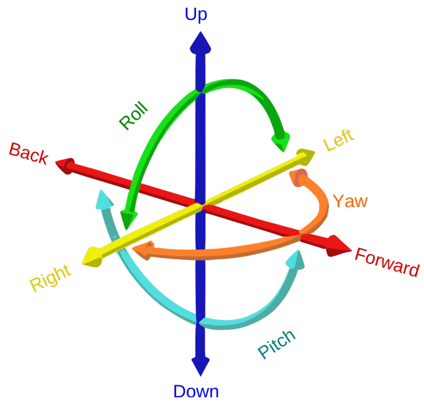
Go to ⇒ **Quiz 1**

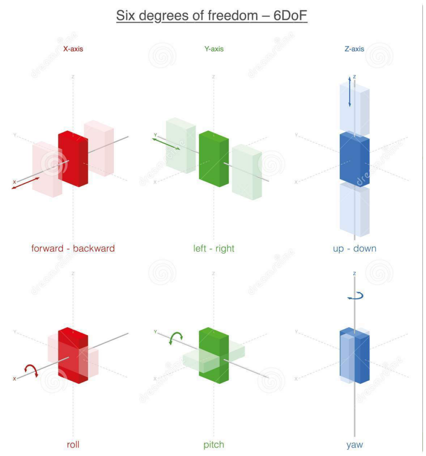
Der Freiheitsgrad

Der Freiheitsgrad ist die Anzahl unabhängiger Bewegungen, welcher ein Körper oder System machen kann.
Um den Freiheitsgrad eines Systems zu bestimmen, muss man salopp gesagt sich überlegen, in welche Richtungen sich das System unabhängig bewegen kann.
(Keine Angst es gibt gewisse Grundkenntnisse & eine Formel, welche man verwenden kann)

Schauen wir uns zuerst einfach einen einzelnen freien Körper im Raum an:

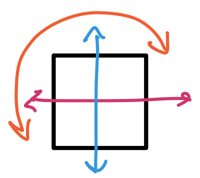
Freier Körper in 3D:





↑ kann sich in all diese Richtungen bewegen! Bzw. alle Bewegungen sind Kombinationen von diesen 6!

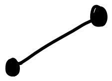
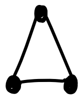
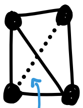
Freier Körper in 2D:



→ kann sich in 3 "Richtungen" (x, y, Rotation) bewegen

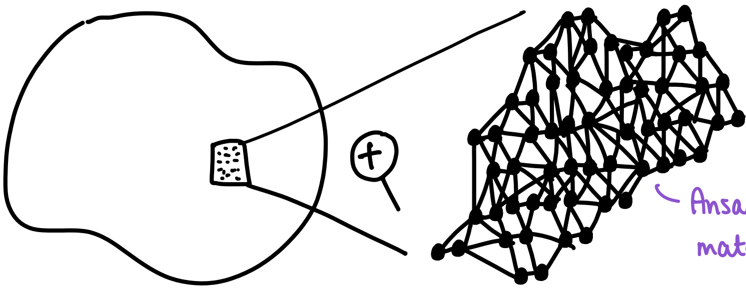
Nun wollen wir uns anschauen, wie man den Freiheitsgrad eines Systems (aus mehreren SK & Bindungen) bestimmen kann. Dafür haben wir folgende Formel:

Beispiele:

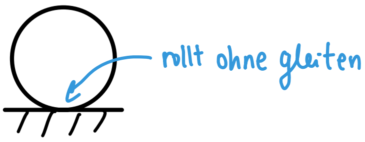
	2D	3D
• (ein Punkt)	$n=2$	$n=3$
	$n=2\cdot 2=4$ $b=1$ $\Rightarrow f=4-1=3$	$n=2\cdot 3=6$ $b=1$ $\Rightarrow f=6-1=5$
	$n=3\cdot 2=6$ $b=3$ $\Rightarrow f=6-3=3$	$n=3\cdot 3=9$ $b=3$ $\Rightarrow f=9-3=6$
 diese Bindung schränkt in 2D den Freiheitsgrad nicht weiter ein → nicht mitzählen!	$n=4\cdot 2=8$ $b=5$ $\Rightarrow f=8-5=3$	$n=4\cdot 3=12$ $b=6$ $\Rightarrow f=12-6=6$

⋮ ⋮ ⋮

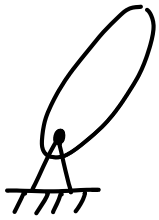
↳ wir haben hier eigentlich bewiesen, dass ein SK in 2D den Freiheitsgrad 3, in 3D den Freiheitsgrad 6 hat! (ein SK ist eine Ansammlung von zusammengebundenen materiellen Punkten)



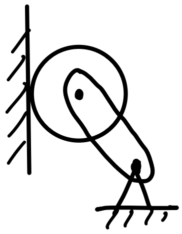
Beispiel: mehrere SK in 2D:



$n = 3$
$b = 2$
$\Rightarrow f = 3 - 2 = 1$



$n = 3$
$b = 2$
$\Rightarrow f = 3 - 2 = 1$



$n = 2 \cdot 3 = 6$
$b = 2 + 2 + 2 = 6$
$\Rightarrow f = 6 - 6 = 0$

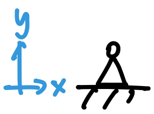
Tipp: b bestimmen: überlege, in welche / wie viele linear unabhängige Richtungen der Körper sich nicht mehr bewegen kann aufgrund des Lager / der Bindung.

z.B. 

$\rightarrow$ Translation in x-Richtung nicht möglich wegen Lager $\rightarrow +1$
Translation in y-Richtung nicht möglich wegen Lager $\rightarrow +1$
$\rightarrow b = 2$

Beispiele einiger Bindungen

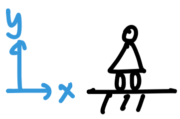
Lager:



2D: $b = 2$

3D: $b = 3$

unabhängige Bewegungen in x- und y- (& in 3D z-) Richtung nicht möglich



$b = 1$

$b = 1$

unabhängige Bewegungen in y-Richtung nicht möglich

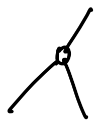
$\rightarrow$ mehr im Kapitel Statik

Gelenke:

2D:

3D:

unabhängige Bewegungen in x- und y-Richtung nicht möglich



Go to $\Rightarrow$ **Quiz 2**

Schwerpunktberechnung

← in TechMech nur in 2D :)

Der Schwerpunkt (auch: Massenmittelpunkt) ist der Punkt, wo die Gewichtskraft eines Körpers angreift. Die allgemeine Formel für die Schwerpunktberechnung ist wie folgt:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \cdot \iiint_B \vec{r}\, dm$$

← Keine Angst das Integral müsst ihr nicht verstehen/berechnen!

Vektor! Weil der Schwerpunkt durch seine x-, y- (& in 3D z-) Koordinate eindeutig beschrieben wird

Wir zerlegen diese Formel in die x- und y-Koordinaten:

Der Schwerpunkt ist dann:

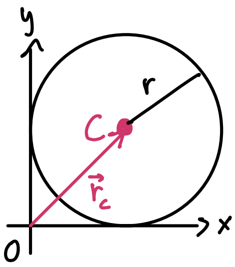
Doch um diese Formel anwenden zu können, brauchen wir die Schwerpunkte einiger simplen Körper!

Schwerpunkte & Flächen einiger simplen Körper

Mit Annahme alle Körper homogen!

⚠ Achte wo das Koordinatensystem ist!

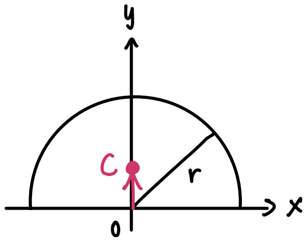
Kreis:



$$\vec{r}_c = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$$

$$A = \pi r^2$$

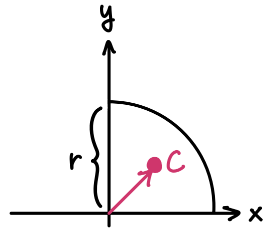
Halbkreis:



$$\vec{r}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4r}{3\pi} \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2$$

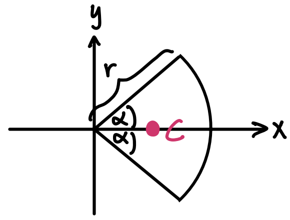
Viertelkreis:



$$\vec{r}_c = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\pi} r \\ \frac{4}{3\pi} r \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4}\pi r^2$$

Kreisausschnitt:

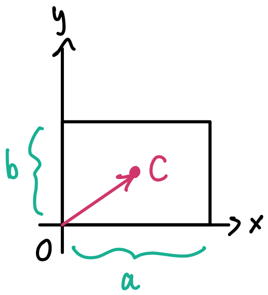


(α in RAD!)

$$\vec{r}_c = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \alpha \cdot r^2$$

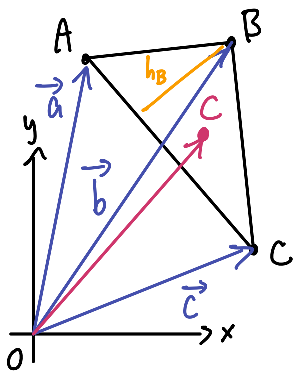
Rechteck:



$$\vec{r}_c = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix}$$

$$A = a \cdot b$$

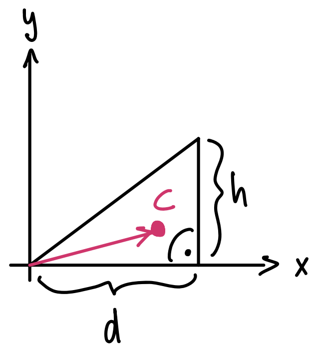
Dreieck:



$$\vec{r}_c = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} AC\, h_B$$

Rechtwinkliges Dreieck:

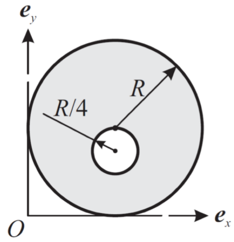


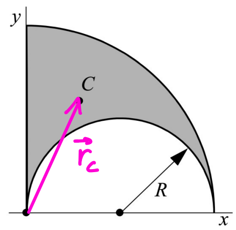
$$\vec{r}_c = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} d \\ \frac{1}{3} h \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} h \cdot d$$

Konzept Negative Massen:

Doch was macht man bei solchen Körpern mit "Löchern"?





Auch Schwerpunkte solcher Körper können mit derselben Methode berechnet werden, indem man "negative Körper" zulässt. z.B. ist der Körper rechts ein Viertelkreis minus ein Halbkreis.

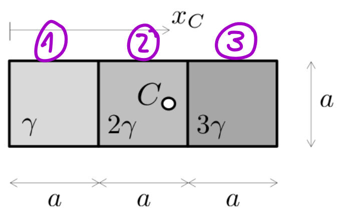
Also muss man die Masse & den Schwerpunkt des Halbkreises abziehen in der Rechnung:

$$\vec{r}_c = \frac{\text{"}\overrightarrow{\text{Schwerpunkt vom Viertelkreis}}\text{"} \cdot \text{"Fläche vom Viertelkreis"} \ominus \text{"}\overrightarrow{\text{Schwerpunkt vom Halbkreis}}\text{"} - \text{"Fläche vom Halbkreis"}}{\text{"Fläche vom Viertelkreis"} \ominus \text{"Fläche vom Halbkreis"}}$$

Konzept Körper mit verschiedenen Dichten

Was, wenn der Körper nicht komplett homogen ist? z.B. wie in diesem Fall:

Der in der Abbildung dargestellte ebene Körper besteht aus drei quadratischen Teilen mit den Seitenlänge a und den Dichten γ, 2γ bzw. 3γ.



Wie lautet die Koordinate x_C des Massenschwerpunkts des Körpers, gemessen von der linken Seite, wie dargestellt?

jeweils mit der Dichte multiplizieren!

$$\rightarrow x_c = \frac{\gamma \cdot x_{c_1} \cdot A_1 + 2\gamma \cdot x_{c_2} \cdot A_2 + 3\gamma \cdot x_{c_3} \cdot A_3}{\gamma \cdot A_1 + 2\gamma \cdot A_2 + 3\gamma \cdot A_3} = \frac{11}{6} a$$

(da $m = \rho \cdot A$ (Masse = Dichte × Fläche))

Mit diesem Wissen kannst du bereits den Schwerpunkt ganz vieler Körper berechnen! :)

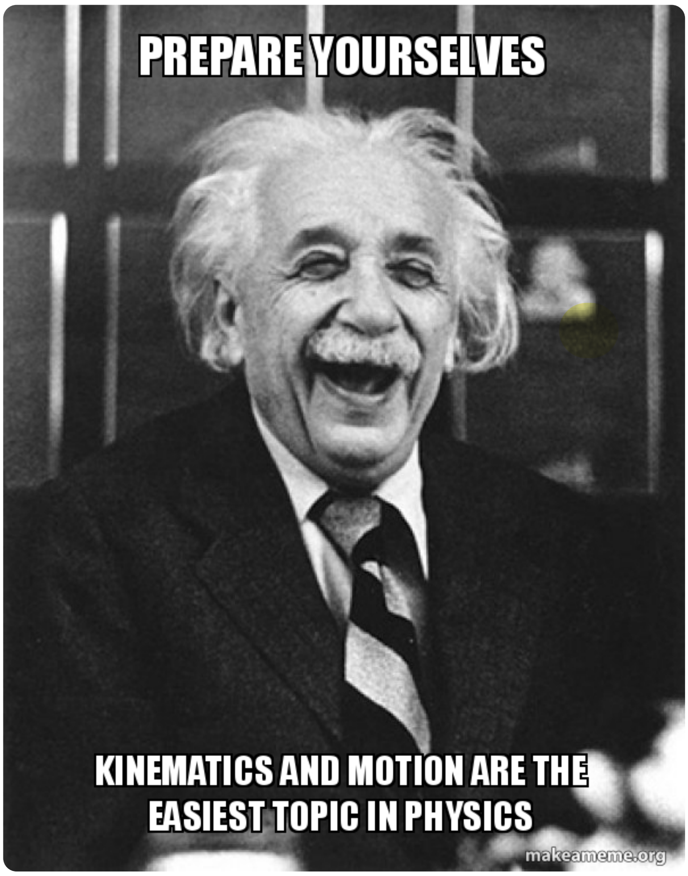
Tipps Schwerpunktberechnung:

- Symmetrien ausnutzen! Sofern die Masse homogen ist, liegt der Schwerpunkt auf der Symmetrieachse!

- Koordinatensystem anpassen, um Berechnungen zu vereinfachen!

Go to ⟹ **Quiz 3**

Teil 2



Kinematik

In Kinematik interessiert uns der **momentane Bewegungszustand** eines (Starr-) Körpers. D.h. wir wollen die **Geschwindigkeit** von bestimmten Punkten zu **bestimmten Zeitpunkten** wissen.

In diesem Kapitel werden wir viele wichtige Definitionen zur Kinematik & Sätze zum Berechnen von Geschwindigkeiten von materiellen Punkten kennenlernen. Ausserdem beschäftigen wir uns mit Kräften & deren Drehwirkung auf Körper (= Momente). Schlussendlich lernen wir Kräftegruppen zu charakterisieren und zu bestimmen wann 2 Kräftegruppen statisch äquivalent sind.

Materieller Punkt

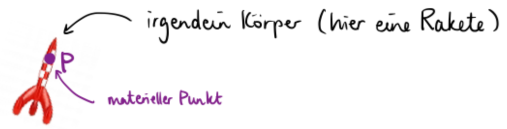
Materieller Punkt V.S. geometrischer Punkt

Materieller Punkt : als markiert gedachter Punkt eines Körpers

Geometrischer Punkt: geometrisch konstruierter Punkt (z.B. Schnittpunkte)

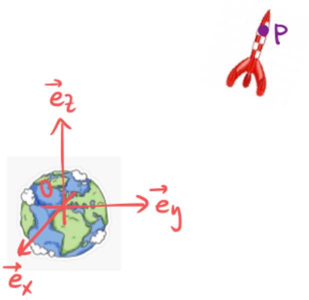
Bezugskörper, Bezugssystem, Ortsvektor

Ein materieller Punkt ist nichts anderes als ein Punkt eines Körpers.

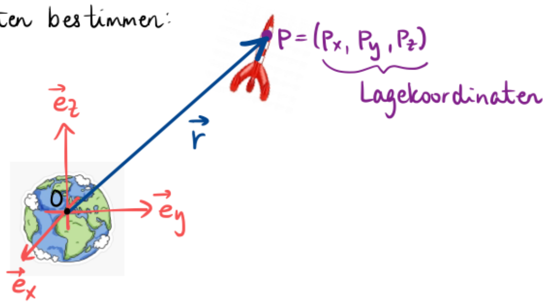


Doch mit nur einem Punkt im Raum können wir nichts anfangen. Deswegen führen wir Bezugskörper ein. z.B. wäre die Erde ein guter Bezugskörper für die Rakete:

Bezugskörper haben Bezugssysteme: das ist ein fancy-Wort für Koordinaten-system:



Wo wir jetzt ein Bezugssystem haben, können wir die Lage des Punktes durch die Lagekoordinaten bestimmen:



Der Ortsvektor : $\vec{r} = P_x \cdot \vec{e}_x + P_y \vec{e}_y + P_z \vec{e}_z$ oder $\vec{r} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$ (hier in kartesischen Koordinaten)

↳ Verbindet den Ursprung (0) mit dem materiellen Punkt (P)

Ein System: ist eine Menge von materiellen Punkten

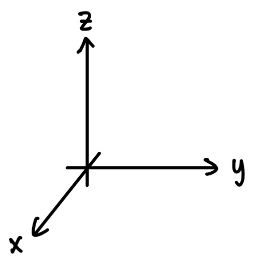
Zusammengefasst: Um die Lage eines materiellen Punktes zu beschreiben, benötigen wir:

1. Ein Bezugskörper (als starr idealisiert. z.B. die Erde, der Mond, etc.)
2. Ein Bezugssystem (Koordinatensystem, z.B. $\{0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$)

Die Lage eines materiellen Punktes können wir im Bezugssystem durch die Lagekoordinaten (z.B. (x, y, z) oder als Ortsvektor: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$) angeben.

Ortsfunktion eines materiellen Punktes

Ein sich im Raum bewegender Punkt kann durch eine von der Zeit abhängige Funktion beschrieben werden. Diese nennt man Orts-/ Bewegungsfunktion.



Eine solche Funktion könnte z.B. so aussehen:

t ist hierbei unsere Zeitvariable: $t \in [0, +\infty)$. Um sich die Bewegung vorzustellen / zu plotten muss man mit einem gewissen t anfangen und diesen "wachsen" lassen:

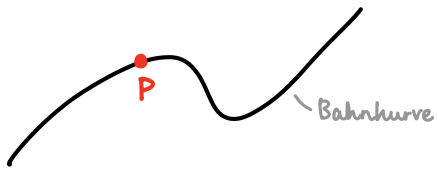
z.B. für $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$: $\vec{r}(0) =$

$\vec{r}(\pi) =$

$\vec{r}(2\pi) =$

Geschwindigkeit

Geschwindigkeit := zeitliche Ableitung der Ortsfunktion:



⚠ Die Geschwindigkeit ist ein Vektor!

⚠ Der Geschwindigkeitsvektor eines Punktes ist **tangential** zur Bahnkurve des Punktes.

⚠ Ableitung geschieht komponentenweise, d.h.:

2D: $\vec{v}(t) =$

3D: $\vec{v}(t) =$

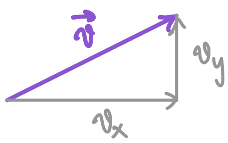
Schnelligkeit

Schnelligkeit :=

2D:

3D:

⚠ geometrisch gesehen ist die Schnelligkeit die Länge des Geschwindigkeitsvektors



⚠ Die Schnelligkeit ist eine skalare Grösse. (d.h. einfach eine Zahl, kein Vektor!)

Übersicht Geschwindigkeit & Schnelligkeit in verschiedenen Koordinaten

Das Ableiten von Vektoren in kartesischen Koordinaten ist recht intuitiv – jede Komponente ableiten.

Dies ist in anderen Koordinaten aber nicht der Fall. Deswegen hier eine Übersicht:

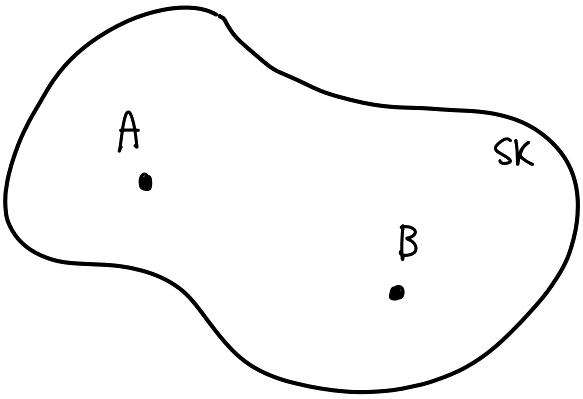
Koordinaten	Bewegungsgleichung	Geschwindigkeitsgleichung	Schnelligkeit
Kartesisch	$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$	$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$	$v(t) = \lvert\vec{v}(t)\rvert = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$
Zylindrisch	$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(t) + z\vec{e}_z$	$\vec{v}(t) = \dot{\rho}(t)\vec{e}_\rho(t) + \rho(t)\dot{\vec{e}}_\rho(t) + \dot{z}(t)\vec{e}_z$ $= \dot{\rho}(t)\vec{e}_\rho(t) + \rho(t)\dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi(t) + \dot{z}(t)\vec{e}_z$	$v(t) = \lvert\vec{v}(t)\rvert = \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2\dot{\varphi}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$
Polar	$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(t)$	$\vec{v}(t) = \dot{\rho}(t)\vec{e}_\rho(t) + \rho(t)\dot{\vec{e}}_\rho(t) =$ $= \dot{\rho}(t)\vec{e}_\rho(t) + \rho(t)\dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi(t)$	$v(t) = \lvert\vec{v}(t)\rvert = \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2\dot{\varphi}(t)^2}$

Beachte: Der Einheitsvektor $e_\rho = e_\rho(\varphi(t))$ ist abhängig von $\varphi(t)$, resp. $\psi(t)$ und $\theta(t)$. Dies muss beim Ableiten berücksichtigt werden.
Die zeitlichen Abhängigkeiten habe ich in der Tabelle weggelassen $x = x(t), y = y(t)$...

Go to Quiz 4

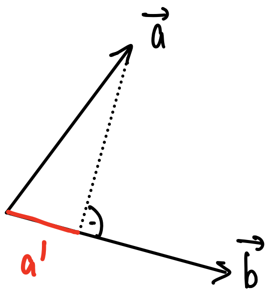
Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)

Dieser Satz besagt, dass die Projektionen (mit einem Strich ' gekennzeichnet) der Geschwindigkeiten von 2 Punkten auf einem Starrkörper auf ihre Verbindungslinie gleich sind:



⚠ Der SdpG gilt für alle Starrkörper.

So weit so gut, aber wie beschreibt man Projektionen mathematisch?



Die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ ist: $\boxed{a' = \vec{a} \cdot \vec{e}_b}$

Achtung das ist ein Skalar.
("Anteil von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$")

Falls ihr den Vektor braucht: $\vec{a}' = a' \cdot \vec{e}_b = (\vec{a} \cdot \vec{e}_b) \cdot \vec{e}_b$

Mit diesen Kenntnissen können wir den SdpG umformen zu:

$\Leftrightarrow$

Je nach Aufgabe kann die eine oder die andere Gleichung nützlich sein.
Im Kern sind diese Gleichungen alle äquivalent!

Go to $\Rightarrow$ **Quiz 5**

Ebene Bewegungen

Kinematik ist das Studium von Körpern & Systemen. Fangen wir unser Studium mit ebenen Bewegungen an:

Ebene Bewegungen sind einfach gesagt Bewegungen, die in Ebenen (2D) stattfinden.

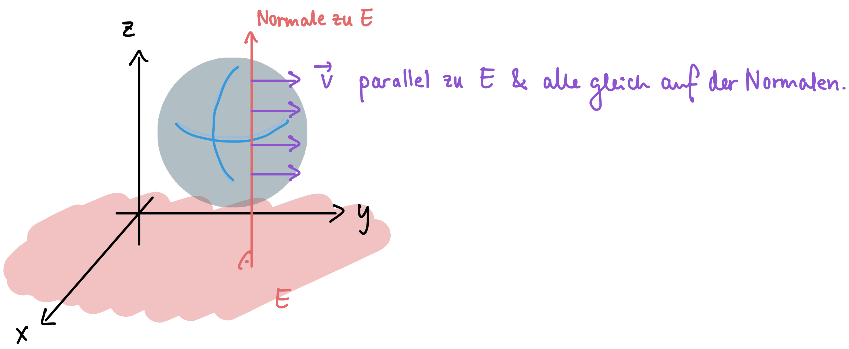
Eine ebene Bewegung bezüglich der xy-Ebene erfüllt folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} v_z = 0 \\ v_x = v_x(x,y) \text{ und } v_y = v_y(x,y) \end{cases}$$

keine Geschwindigkeit in z-Richtung $\Rightarrow$ alle $\vec{v}$ sind parallel zur xy-Ebene

Die Geschwindigkeiten hängen nur von der x- und y-Koordinate ab.
D.h. alle Punkte auf einer Normalen zu E haben die gleiche Geschwindigkeit.

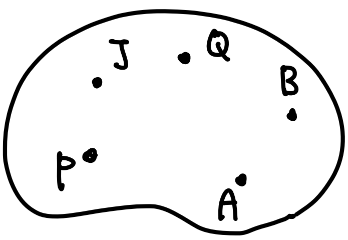
z.B. das wäre eine ebene Bewegung auf der xy-Ebene:



d.h. SdpG gilt $\forall t$

Eine (starre) ebene Bewegung ist momentan entweder eine Translation oder eine Rotation.

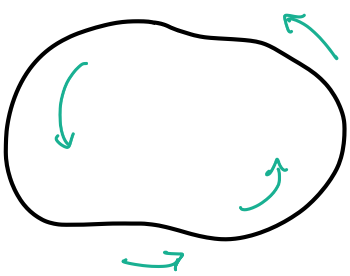
Translation



$\forall P, Q \in SK$

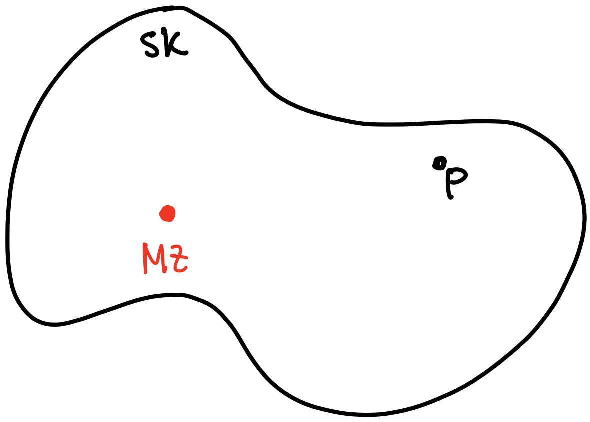
Alle Punkte auf dem Starrkörper haben die gleiche Geschwindigkeit

Rotation



(SvM)

Satz vom Momentanzentrum (SvM)



M / MZ: Momentanzentrum

$\vec{\omega}$: Rotationsgeschwindigkeit (ist ein Vektor)

ω: Rotationsschnelligkeit (ist ein Skalar) $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ (wichtig für Serie)

$\vec{r}_P$: Vektor vom MZ zum Punkt

⚠ falls $\vec{\omega} \perp \vec{r}_P$ (immer in 2D):

⚠ Eine eindeutige ω pro SK!

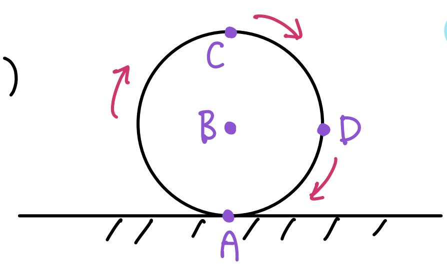
⚠ $\vec{v}_P$ ist immer senkrecht zu $\vec{r}_P$ (Verbindungsgerade vom MZ zum Pkt.)

Momentanzentrum

Aber... Was ist ein Momentanzentrum?

Definition!

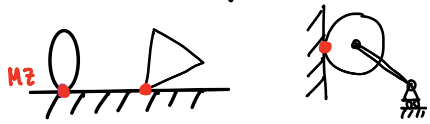
Beispiel Rad:
(gleitet nicht)



Quiz: Wo ist der MZ?

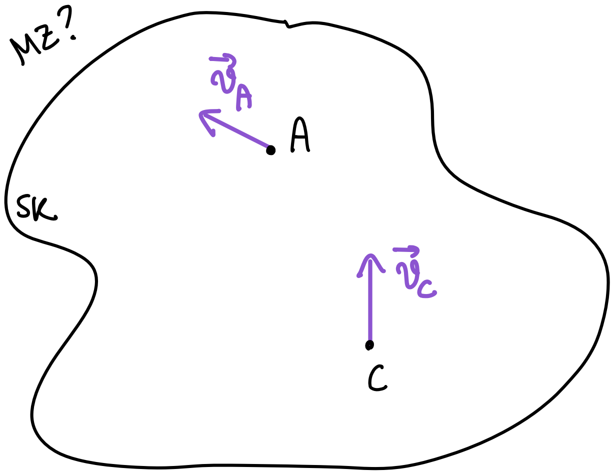
1) D
2) C
3) B
4) A

Tipp: Ein Punkt, der den Boden / die Wand berührt, ist ein Momentanzentrum.
(vorausgesetzt, der Boden / die Wand bewegt sich nicht & die Körper gleiten nicht)

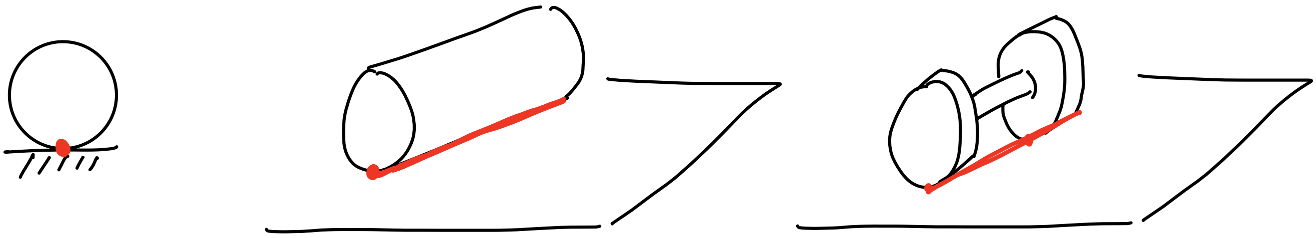


Bestimmung von Momentanzentren: Wir nutzen den Fakt aus, dass $\vec{v}_P \perp \vec{r}_{MP}$

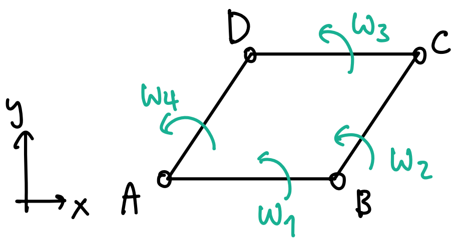
→ Konstruktion :)



⚠ MZ in 3D: Momentanzentrum ist die gesamte Kontaktlinie mit dem Boden!



⚠ Die Parallelogrammregel:



$\boxed{\omega_1 = \omega_3}$ und $\boxed{\omega_2 = \omega_4}$

(für Betrag & Richtung)

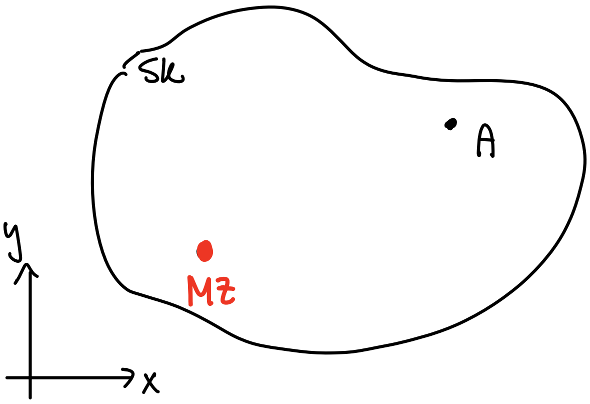
⚠ SvM in 2D:

$$\vec{v}_P = \begin{pmatrix} \pm r_{Py}\,\omega \\ \pm r_{Px}\,\omega \end{pmatrix}$$

Vorzeichen graphisch bestimmen:

Beispiel:

Vorgehen: 1.



$$\Rightarrow \vec{v}_A = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Vorzeichen bestimmt :)

2.

Herleitung: über Kreuzprodukt:

$\vec{v}$ in 2D:

nur z-Komponente →

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_{Ax} \\ r_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_{Ay}\,\omega \\ r_{Ax}\,\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist genau diese Formel

keine z-Komponente

ω positiv, wegen Rechte-Hand-Regel

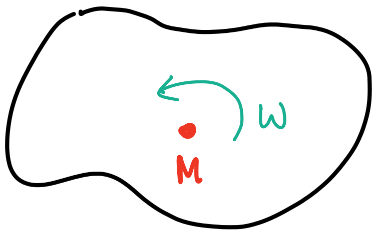
Go to ⇒ **Quiz 6**

⚠ $\vec{w}$ und w & die Rechte-Hand-Regel

$\vec{w}$ ist der Rotationsvektor. Aber warte mal ... Was heisst überhaupt Rotationsvektor?

⇒ Dieser ist folgendermassen definiert:

Sagen wir, wir haben einen SK, der um M dreht:

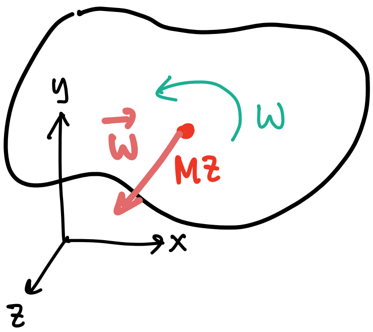


Dann zeichnen wir auch immer direkt w ein.

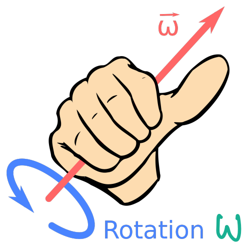
w ist der Betrag von $\vec{w}$, sprich

$$w = |\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

Doch wo ist $\vec{w}$?

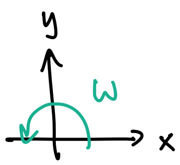
⇒ 

$\vec{w}$ ist nach der rechten-Hand-Regel mit w verwandt. In diesem Bsp. ist $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$

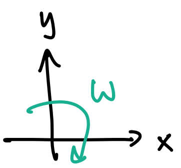


$\vec{w}$ zeichnen wir in 2D-Aufgaben schlicht nicht ein, weil dieser irrelevant ist (wenn $\vec{w}$ nur 1 Komponente hat brauchen wir nur w für unsere Berechnungen) & weil es nicht einfach ist ihn einzuzeichnen (kommt aus den Blatt raus / geht in das Blatt hinein)

Merkt euch einfach:

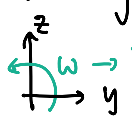


$\rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$

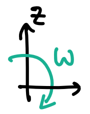


$\rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -w \end{pmatrix}$

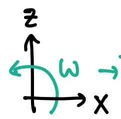
Falls sie gemein sind:



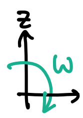
$\rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -w \\ 0 \end{pmatrix}$



$\rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{pmatrix}$

usw.

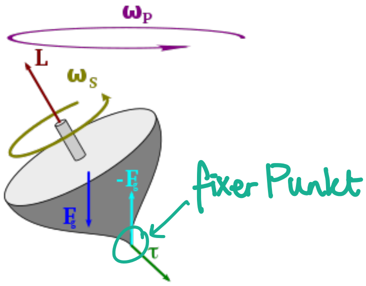
Räumliche Bewegungen

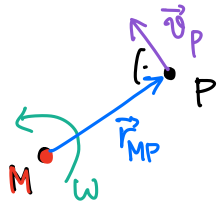
Jetzt wo wir uns ausführlich mit ebenen Bewegungen beschäftigt haben, wollen wir einen Schritt weiter gehen, und zwar mit räumlichen Bewegungen. Räumliche Bewegungen sind einfach gesagt allgemeine Bewegungen in 3D.

Eine spezielle räumliche Bewegungen ist die Kreiselung:

Kreiselung

Ist nichts anderes als eine Rotation, aber $\vec{\omega}$ "rotiert" auch. Dabei bleibt nur ein Punkt des SK fixiert.



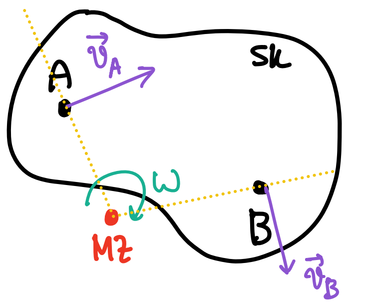


Eine Kreiselung ist momentan eine Rotation! d.h. $\boxed{\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MP}}$ (SvM) gilt immernoch.

Aus der Zusammensetzung von Translation und Kreiselung ergibt sich die allgemeine Bewegung eines Starrkörpers! :) Nun gibt es eine wichtige Formel, welche alle SK-Bewegungen erfüllen:

Starrkörperformel (SK-Formel, a.k.a. ABBA-Formel):

Ist die allgemeine Formel für eine Starrkörper-Bewegung. D.h., alle SK-Bewegungen erfüllen diese Formel!



Translation: $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B \ \forall$ Punkte $\in$ SK

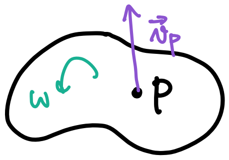
reine Rotation (um den Pkt. B): $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$ ← SvM!

Die Geschwindigkeit irgendeines Punktes auf einem SK ist also durch 2 Vektoren eindeutig bestimmt!

Die Kinemate

↳ beschreibt die Bewegung eines SK komplett.

Sie ist immer bezogen auf einem ausgewählten Punkt eines SK.

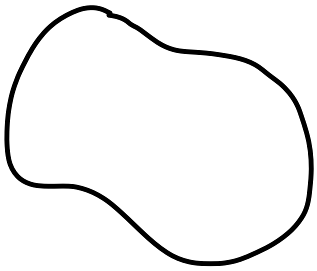


Kinemate von Punkt P =

Invarianten der Kinemate

"Invariant" heisst "es ändert sich nicht". Folglich sind die Invarianten der Kinemate für alle Punkte auf einem Starrkörper gleich.

1. Invariante: (Rotationsgeschwindigkeit)



2. Invariante:

Übersicht der Invarianten der Kinemate & entsprechender Bewegungszustand:

	$I_2 = 0$	$I_2 \neq 0$
$I_1 = 0$		
$I_1 \neq 0$		

Kraft

Eine Kraft macht sich durch ihre Wirkung auf Objekte bemerkbar. Sie hat immer einen Betrag, eine Richtung und einen Angriffspunkt.

Man stellt sie als **Vektoren** dar:

⚠ Kräfte dürfen vektoriell addiert werden, wenn sie denselben Angriffspkt. haben:

z.B.

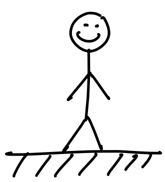
⚠ Eine <u>negative</u> Kraft heisst einfach, dass der Pfeil eigentlich in die andere Richtung zeigt (bzw. die Kraft in die andere Richtung wirkt) wie eingezeichnet:

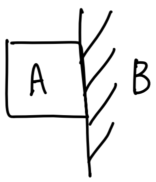
$$\nearrow F<0 \quad \underset{\text{gleich wie}}{\overset{(\cdot -1)}{\longleftrightarrow}} \quad \swarrow -F>0$$

Reaktionsprinzip

← sehr wichtig

Kräfte wirken immer wechselseitig. Übt A eine Kraft F_A auf B aus, so übt B eine gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Kraft auf A aus:



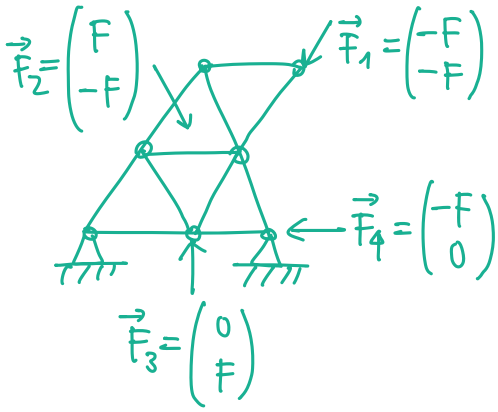


⚠ Beide Kräfte haben dieselbe Wirkungslinie!

Die Resultierende

Ist die vektorielle Summe aller Kräfte, die auf das System wirken.

Bsp:



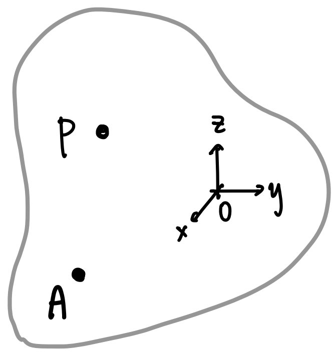
$\vec{R} =$

Moment

Das Moment beschreibt die Drehwirkung einer Kraft auf einen Körper.

Es ist ein Vektor & ist vom Bezugspunkt abhängig.

Moment von $\vec{F}_i$ bezüglich Punkt 0:



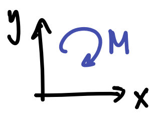
Moment von $\vec{F}_i$ bezüglich Punkt A:

⚠ Wenn $\vec{r} \perp$ Wirkungslinie von $\vec{F}$, kann der Betrag des Moments so berechnet werden:

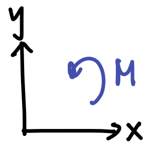
Tipp: Wenn ihr das Moment einzeichnen müsst, oder sie (in 2D-Aufgaben) in Vektorform angeben müsst:

die rechte-Hand-Regel benutzen: (analog zu $\vec{\omega}$, ω)

anwenden wenn

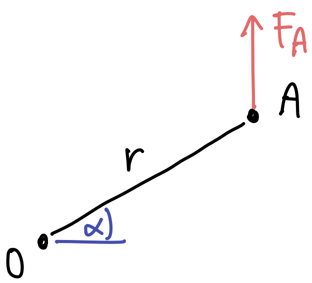


$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \end{pmatrix}$



$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}$

⚠ Momente berechnen in 2D:



Das resultierende Moment

Ist die Summe aller Momente auf einen Körper. Dieses ist auch bezogen auf einen Punkt des Körpers!

bezüglich 0:

bezüglich A:

Die Transformationsregel

Wenn das resultierende Moment bez. eines Punktes & die Resultierende bekannt ist, kann das resultierende Moment bez. eines anderen Pkt. mit dieser Formel bestimmt werden:

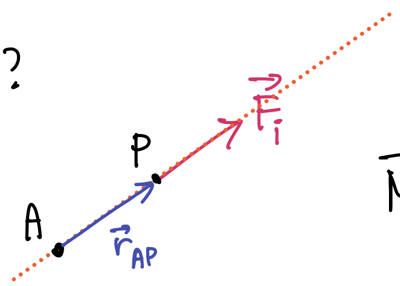
("analog" zur SK-Formel in Kinematik)

⚠ Wenn $\vec{R} = 0$, ist das Moment unabhängig vom Bezugspunkt.

Warum? → Traforegel: $\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \underbrace{\vec{r}_{PQ} \times \vec{R}}_{=0} = \vec{M}_Q \quad \Leftrightarrow \quad \vec{M}_P = \vec{M}_Q \; \forall P, Q$

⚠ Wenn die Wirkungslinie einer Kraft durch einen Punkt geht, dann ist das Moment dieser Kraft bez. dieses Punktes 0.

Warum?



$\vec{M}_A^{\,i} = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}_i = \vec{0}$

Kreuzprodukt von 2 parallelen Vektoren ergibt immer 0 !

ausserdem: Wenn man physikalisch überlegt kann man auch einsehen, dass eine solche Kraft keine Drehwirkung auf diesen Punkt hat.

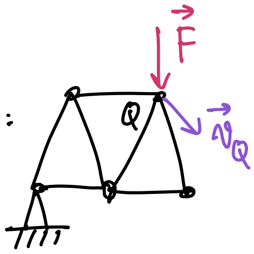
Go to ⇒ Quiz 7

Leistung

Die Leistung bezeichnet die in einer Zeitspanne umgesetzte Energie bezogen auf diese Zeitspanne.

Für eine Kraft $\vec{F}$ mit Angriffspunkt Q ist die Leistung definiert durch:

z.B.:



Die Gesamtleistung ist die Summe aller Teilleistungen:

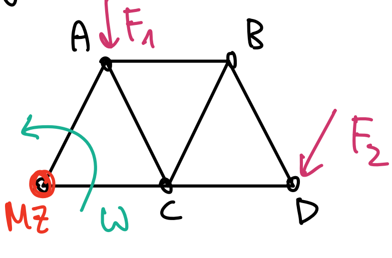
⚠ Bei einer reinen Rotation gilt

⚠ Wenn alle Kräfte & Momente nur an einem SK angreifen:

↳ nützlich wenn die Kinemate $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ & das Moment $\vec{M}_B$ bez. eines Pktes bekannt ist.

Kochrezept Gesamtleistung berechnen:

1. Geschwindigkeiten der Punkte berechnen, an welchen eine Kraft angreift:



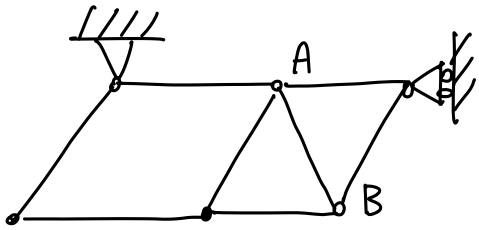
⟹ $\vec{v}$ von A und D bestimmen. $\vec{v}$ von B und C interessieren uns nicht für die Berechnung der Gesamtleistung!

2. Mit den in 1. bestimmten Geschwindigkeiten die Leistung berechnen:

$$P_{tot} = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_A + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_D$$

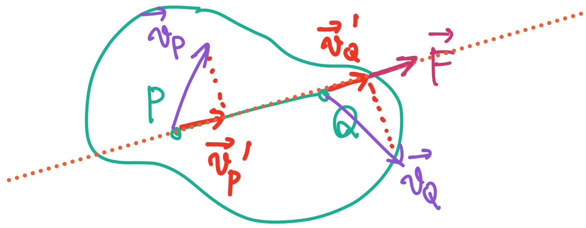
Wichtig: Für die Bestimmung von Momenten & Leistungen darf man die Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschieben. Wählt deswegen einen Punkt aus, bei dem die Geschwindigkeit einfach zu bestimmen ist.

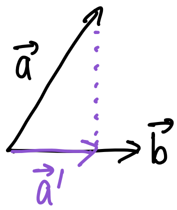
Bsp:



⚠ gilt nur für Starrkörper!

↳ Warum? → Wegen SdpG!





Die Dyname

Weil $\vec{R}$ und $\vec{M}^{tot}$ so wichtig sind, fasst man sie zu einem Paar zusammen: die Dyname.
(analog wie bei der Kinemate)

Die Dyname eines Punktes P auf einem Starrkörper ist:

Eine Kräftegruppe kann immer auf ihre Dyname reduziert werden. Analog zur Kinemate beschreibt die Dyname eine Kräftegruppe komplett & besitzt 2 Invarianten.

Invarianten der Dyname

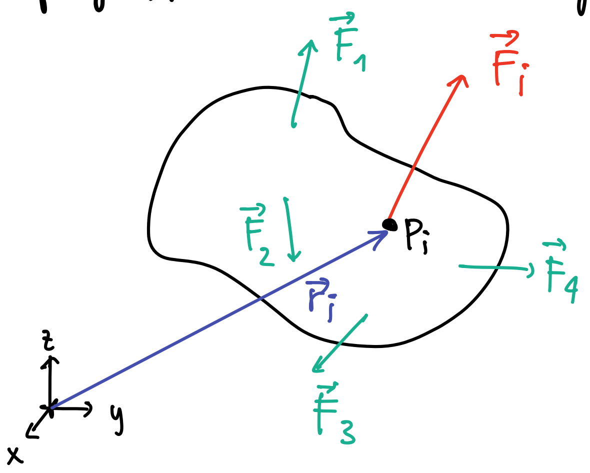
1. Invariante:

2. Invariante:

Äquivalenz und Reduktion von Kräftegruppen

Charakterisierung von Kräftegruppen:

Kräftegruppe: Ist eine Sammlung von Kräften, die an einem Körper angreifen.



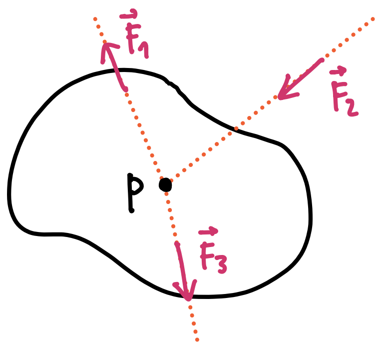
$$\boxed{\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\}}$$

P_i ist dabei der Angriffspunkt der Kräftegruppe

$\vec{r}_i$ ist der Ortsvektor zu P_i.

Zentrale Kräftegruppe:

Wenn die Wirkungslinien aller Kräfte einer Kräftegruppe durch einen Punkt gehen



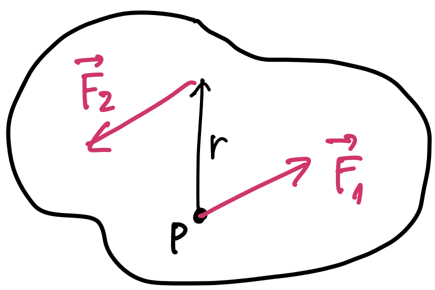
$$\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$$

Dann ist $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \neq 0$

und $\boxed{\vec{M}_P = \vec{0}}$

das Moment bezüglich P (Pkt. wo alle Wirkungslinien durchgehen)

Kräftepaar: besteht aus 2 entgegengesetzt gerichteten Kräften gleichen Betrags.



$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |F|$; $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$

$\vec{R} = 0$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Abstandsvektor zw. den 2 Angriffspunkten

das Moment ist in diesem Fall unabhängig vom Bezugspunkt!

Nullsystem / System im Gleichgewicht:

Eine Kräftegruppe ist ein Nullsystem (bzw. das System (d.h. Körper und Kräftegruppe) ist im Gleichgewicht) wenn:

$\boxed{}$ und $\boxed{}$

Symbolisch: $\boxed{}$

Nun stellt sich die Frage, wann 2 Kräftegruppen an einem SK dieselbe Wirkung haben. Dann heissen diese Kräftegruppen (statisch) äquivalent.

Statische Äquivalenz

Definition: 2 Kräftegruppen sind statisch äquivalent, wenn ihre Gesamtleistungen gleich sind:

$\boxed{}$ $\forall$ SK-Bewegungen

Math Magic

D.h. also:

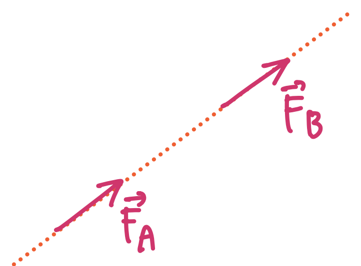
Wenn 2 Kräftegruppen in einem beliebigen Punkt die ______________ haben, sind sie ______________

Statische Äquivalenz von 2 Kräften:

2 Kräfte $\vec{F}$ und $\vec{G}$ sind statisch äquivalent wenn:

$\vec{F} = \vec{G}$ und Wirkungslinie von $\vec{F}$ = Wirkungslinie von $\vec{G}$

Bsp:



$\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ sind statisch äquivalent

Reduktion von Kräftegruppen

Charakterisierung einer Kräftegruppe mittels der (Invarianten der) Dyname:

Kräftepaar ($\hat{=}$ Moment): $\vec{R} = 0$ und $\vec{M}_P \neq 0$

Einzelkraft: $\vec{R} \neq 0$ und $I_2 = 0$

Nullsystem: $\vec{R} = 0$ und $\vec{M}_P = 0 \quad \forall P \in SK$

Schraube: $I_2 \neq 0 \quad (\vec{R} \neq 0)$

Für 2 Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_i\}$: statisch äquivalent wenn

$$\vec{R}\{\vec{F}_i\} = \vec{R}\{\vec{G}_i\} \quad \text{und} \quad \vec{M}_P\{\vec{F}_i\} = \vec{M}_P\{\vec{G}_i\}$$

beliebig, aber gleicher Pkt.

When all the forces on an object cancel each other out

Go to → Quiz 8

Go to → Beispielaufgabe 1

Teil 3

Statik

In Statik befinden sich unsere Systeme in Ruhe. Wir werden lernen, was das genau bedeutet und werden Prinzipien & Methoden kennenlernen, welche uns erlauben, Kräfte & Bedingungen für die Ruhelage zu bestimmen.

Hauptziele in Statik sind:
- Konzept des Freischnitts verstehen.
- Lagerkräfte in der Ruhelage bestimmen
- Stabkräfte von Fachwerken bestimmen
- Stand- & Rutschfestigkeit eines Systems analysieren

⚠ Aufgaben mit einer konstanten Geschwindigkeit (d.h. keine Beschleunigung) sind auch Statik-Aufgaben!

Statik (Mechanik)

Die **Statik** ist ein Teilgebiet der Mechanik, das sich mit unbewegten, ruhenden Körpern befasst. Bei diesen befinden sich alle Kräfte im Gleichgewicht; die Statik wird daher auch als „Lehre vom Gleichgewicht“ bezeichnet. Mit beschleunigten Körpern befasst sich die Kinetik. Die Methoden und Erkenntnisse der Statik sind auch auf Körper anwendbar, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, da diese keine Beschleunigung erfahren.

Definition Ruhelage/Ruhe

Ein System ist in Ruhe, wenn alle Geschwindigkeiten 0 sind. Eine Ruhelage eines Systems ist eine Lage, in der das System in Ruhe bleibt, wenn es zu einem beliebigen Zeitpunkt in Ruhe war.

Statische und kinematische (Un-) bestimmtheit

Mithilfe der statischen / kinematischen Bestimmtheit kann man prüfen, ob sich ein System im mechanischen/kinematischen Gleichgewicht befindet.

Das heisst: Inwiefern das vorhandene System in seiner Beweglichkeit aufgrund von Lagern oder Gelenken eingeschränkt ist.

$f = 0$		*Statisch Bestimmt* (~~*Kinematisch Bestimmt*~~) ↳ muss nicht sein!	Gleichgewicht immer möglich
$f < 0$		*Statisch unbestimmt* (~~*Kinematisch Bestimmt*~~) ↳ muss nicht sein!	Bindungskräfte können nicht durch Gleichgewichtbedingugen bestimmt werden
$f > 0$		*Statisch unbestimmt* *Kinematisch unbestimmt* *(Mechanismus)*	Gleichgewicht nur für spezielle Belastungsfälle möglich

Erinnerung: $\boxed{f = n - b}$ wobei n = Summe der Freiheitsgrade aller Starrkörper

b = # linear unabhängiger Bindungen
(≙ # — " — Gleichgewichtsbedingungen)

Wichtige Zusammenhänge:

- "Ein System aus starren Teilen ist genau dann statisch bestimmt, wenn es [...] weder statisch unbestimmt noch kinematisch unbestimmt ist."
  ↳ aus Skript S.57
- Ein kinematisch unbestimmtes System kann nicht statisch bestimmt sein.
- Ein System kann gleichzeitig kinematisch <u>und</u> statisch unbestimmt sein.
- ⚠ $f > 0 \xRightarrow{\text{impliziert}}$ kinematisch Unbestimmt. Achtung nicht $\Leftrightarrow$!

d.h. insbesondere: $f = n - b \neq 0 \not\Rightarrow$ kinematisch bestimmt

Kleine Bemerkung:

Kleine Uneinheitlichkeit bei der Definition von statischer (Un-) Bestimmtheit:

Literatur (insbesondere Skript, alte Prüfungen (& auch meine Z.F.)):

$f = 0$ statisch bestimmt. → alle Reaktionskräfte bestimmbar mittels GGW-Gl.en

$f < 0$ statisch unbestimmt. → Reaktionskräfte nicht bestimmbar mittels GGW-Gl.en

$f > 0$ statisch überbestimmt (also weder statisch bestimmt noch statisch unbestimmt), Mechanismus → Reaktionskräfte in Spezialfällen bestimmbar mittels GGW-Gl.en.

↪ auf jeden Fall richtig. Also an der Prüfung könnt ihr auch mit mit diesen Definitionen antworten.

Hauptsatz der Statik (HS)

Hauptsatz der Statik:

In einer Ruhelage eines Systems müssen alle (äusseren) Kräfte im Gleichgewicht sein:

(2.16)

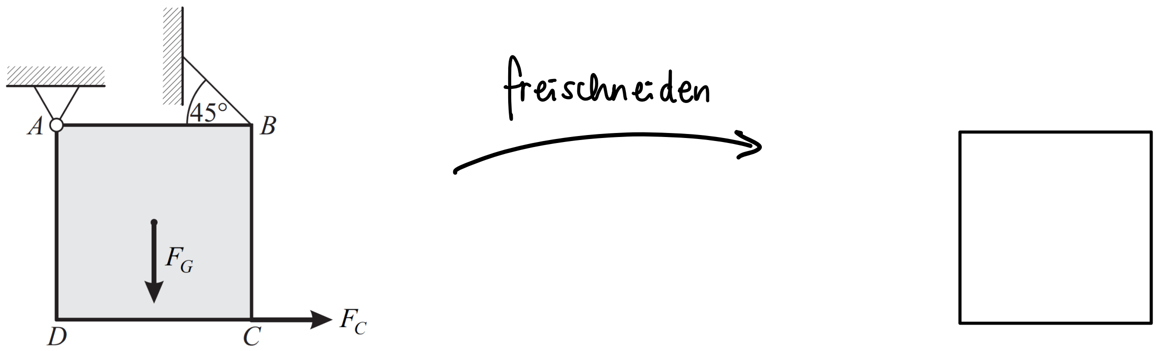
⚠ Für Systeme ist der Hauptsatz der Statik eine nötige, aber nicht hinreichende Bedingung für Ruhe!

Anwendung: Meistens verwendet man den HS, um die Bindungs- & Lagerkräfte eines SKs (oder Systems) in einer Ruhelage zu bestimmen.

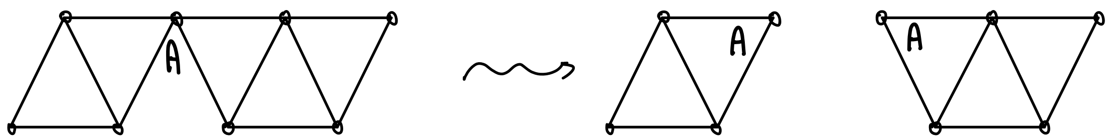
Freischneiden

Beim Analysieren eines Systems (d.h. Bindungskräfte bestimmen usw.) muss man immer als allerersten Schritt alle Starrkörper freischneiden. Dabei zeichnet man alle Kräfte (auch Bindungskräfte!) ein, die am System angreifen.

Bsp: (aus Serie 6, A1)

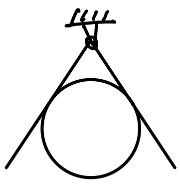


⚠ Wenn man ein System trennt: Actio = Reactio nicht vergessen an den Trennungspunkten:

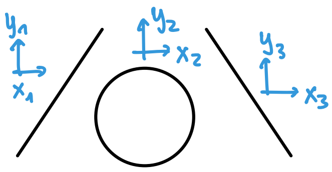


⚠ Koordinatensysteme darf man für **jeden SK** beliebig einführen:

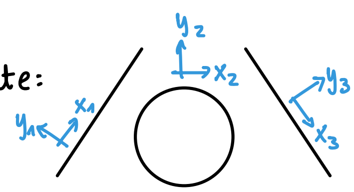
z.B.:



1. Variante:



2.Variante:

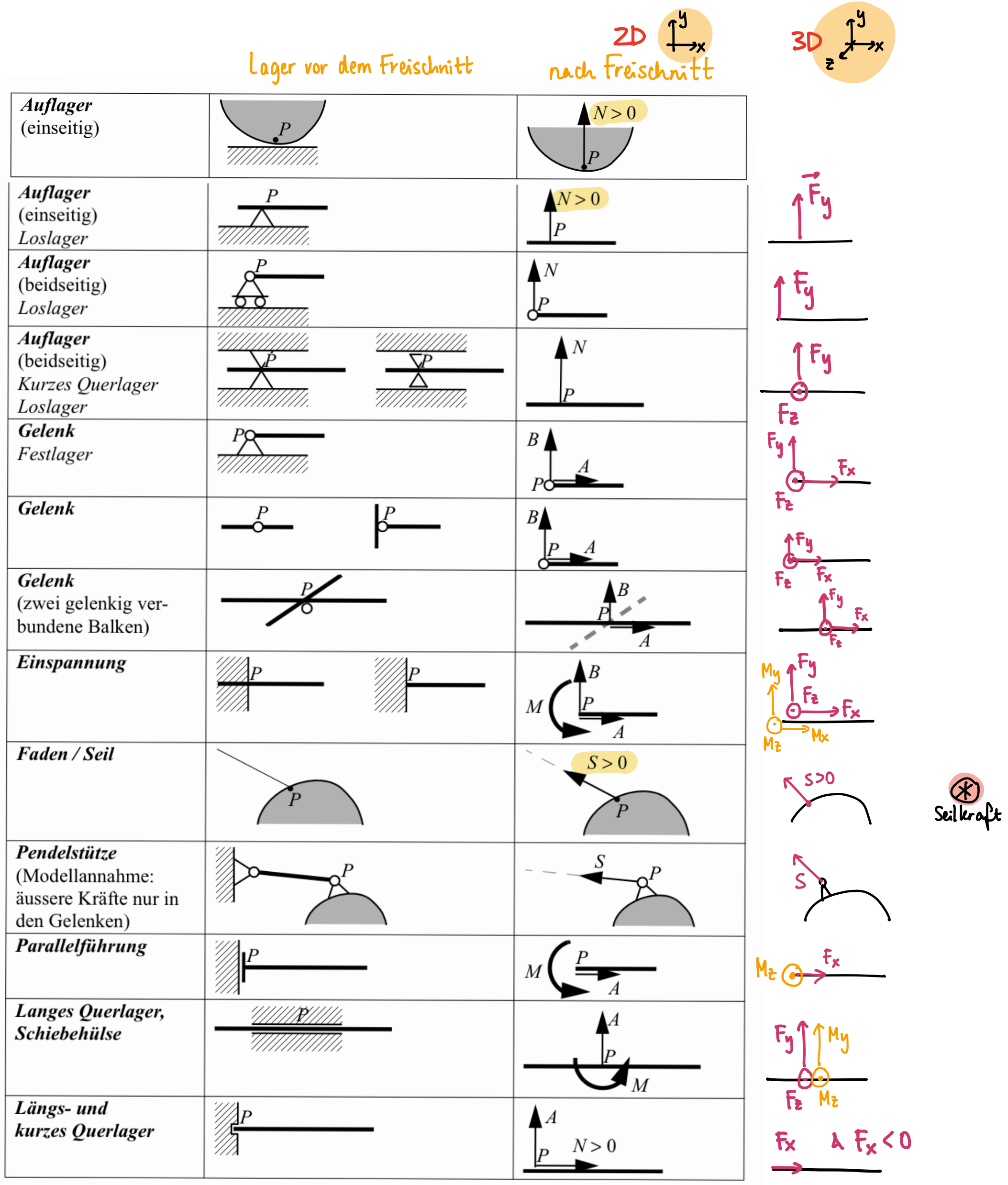


usw.

↳ aufpassen: konsistent bleiben! Alle Kräfte mit den eingeführten Koordinaten beschreiben & auch alle GGW-Gleichungen.

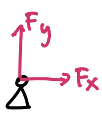
Lager-/ Bindungskräfte

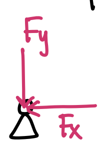
Beim Freischneiden muss man die Lagerkräfte wie folgt einzeichnen:



↳ aus Skript S.54~55

⚠ Man zeichnet die Kräfte / Momente dort ein, wo die Bewegung / Rotation in diese Richtung vom Lager aufgehalten wird. D.h. dort wo die Bewegung wegen dem Lager nicht zugelassen ist.

⚠ Es ist egal, ob ihr die Kräfte / Momente in plus oder minus Richtung einzeichnet (d.h. z.B. 

oder 

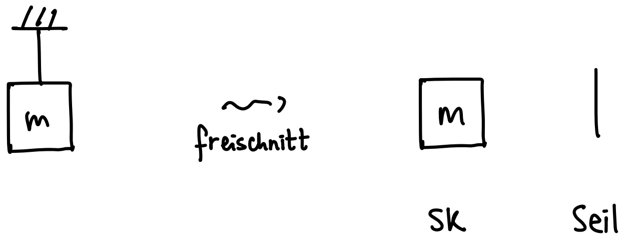
egal)

⇒ Bei den Aufgaben / an der Prüfung wird die Skizze berücksichtigt!
(Deswegen auch: zeichnet die Kräfte sauber ein beim Freischneiden)

⊛ **Seilkräfte:** Seile können nur auf Zug belastet werden. Das heisst:

- Seilkräfte immer auf Zug (weg vom Körper) & in Seilrichtung zeichnen
- Bedingung: $\boxed{\quad\quad}$ überprüfen S: Seilkraft

Bsp:



Kochrezept für HS-Aufgaben:

1) Koordinatensystem einführen & Freischnittskizze erstellen.

wie ihr wollt! aber macht euer leben nicht unnötig schwer ...

- Lager ersetzen durch Lagerkräfte gemäss Tabelle (Seile auch)
- Alle äusseren Kräfte & Momente eintragen
- Falls nicht masselos → Gewichtskräfte eintragen

2) Gleichgewichtsbedingungen formulieren:

3D: $R = R_x = R_y = R_z = 0$ & $M = M_x = M_y = M_z = 0$ 6 Gleichungen pro SK

2D: $R = R_x = R_y = 0$ & $M = M_z = 0$ 3 Gleichungen pro SK

& nach gesuchten Kräften / Momenten auflösen.

3) Diskussion über Ruhe (d.h. am Schluss noch überprüfen, ob alle Kräfte aus 2) tatsächlich aufgebracht werden können.)

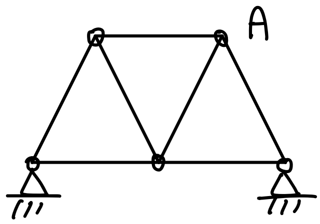
- Seilkräfte nur auf Zug belastet → $S > 0$ erfüllt $\forall$ Seilkräfte?
- Auflager hebt nicht ab → $F_y > 0$ erfüllt $\forall$ Auflager?

Go to ⇒ **Quiz 9**

Virtueller Bewegungszustand

Ein virtueller Bewegungszustand ist ein (irgendein!) gedachter Bewegungszustand, der keinen Bezug zu den wirklich möglichen Bewegungszuständen haben muss. Virtuell heisst also, dass wir uns diese Bewegungen einfach nur vorstellen!

z.B.:



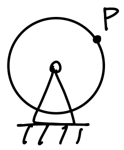
Um virtuelle Bewegungen von wirklichen Bewegungen zu unterscheiden, bezeichnen wir sie mit einer Tilde "~".

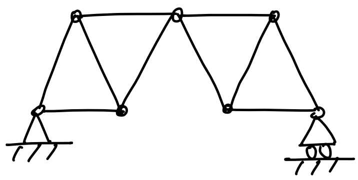
Die Kinemate $\{\vec{\tilde{v}}, \vec{\tilde{\omega}}\}$ ist dann ein virtueller SK-Zustand.

Wir unterscheiden zwischen zulässigen und unzulässigen Bewegungszuständen:

Zulässiger Bewegungszustand: Wenn der virtuelle Bewegungszustand keine Bindungen verletzt.

z.B.



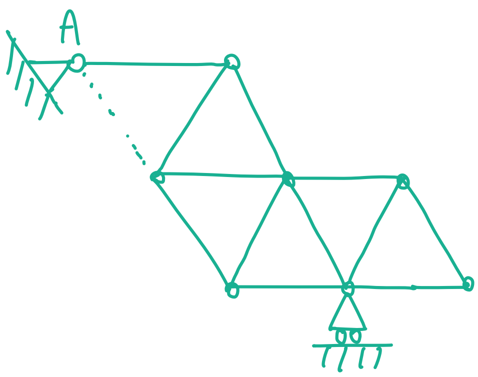


⚠ Wir werden uns v.a. mit zulässigen Bewegungszuständen beschäftigen!

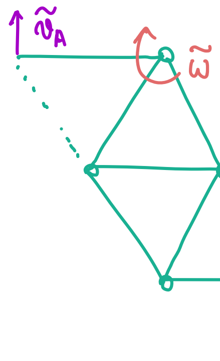
Unzulässiger Bewegungszustand:

Wenn der virtuelle Bewegungszustand mindestens 1 Bindung verletzt.

z.B.



$\rightsquigarrow$



Lager im Punkt A wird verletzt!

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):

Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet (und die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen).

d.h. $\boxed{}$ $\forall \{\tilde{v}\}$

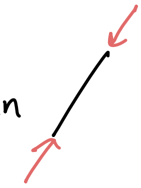
~ heisst virtuell.

⚠ Das PdvL stellt nicht sicher, dass das vorliegende System die für Ruhe nötigen Kräfte tatsächlich aufnehmen kann. Wir müssen wie beim Hauptsatz der Statik zusätzliche Bedingungen prüfen: Zeigen Seilkräfte in die richtige Richtung? Hält das Material die Kräfte aus? usw.

⚠ Das PdvL ist ein sehr mächtiges Instrument und ermöglicht es uns, beispielsweise Stabkräfte zu bestimmen.

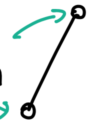
Stabkräfte (bzw. Pendelstäbe)

Pendelstab:
- ist an beiden Enden gelenkig gelagert
- kann nur Kräfte in Stabrichtung aufnehmen



↳ Zug- / Druckkräfte

↳ keine Querkräfte V Biegemomente!

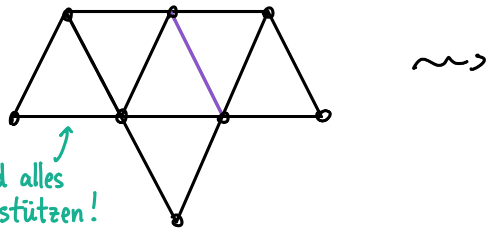
- externe Kräfte greifen nur an Knotenpunkten  an.

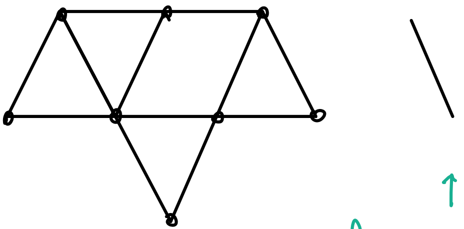
→ dh. der Freischnitt ist recht einfach!

Wir werden uns nur mit solchen Stäben beschäftigen

⚠ Ein Fachwerk besteht aus lauter Pendelstäben!

Bsp: Wir wollen den violetten Stab wegnehmen & mit den entsprechenden Stabkräften ersetzen:

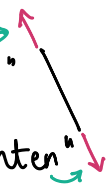




das sind alles Pendelstützen!

freigeschnittener Stab

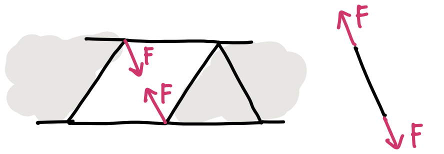
⚠ Wegen dem Reaktionsprinzip (Newton) ist:

- Beim Stab ist die Kraft "oben"  gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet zu der Kraft "unten", da der Stab ein SK ist und sich somit nicht verformen darf. → gilt ∀ Stäbe in TechMech!

- Die Stabkräfte, die wir im Fachwerk einzeichnen, sind gleich gross & entgegengesetzt gerichtet zu den Kräften, die wir beim Stab einzeichnen.

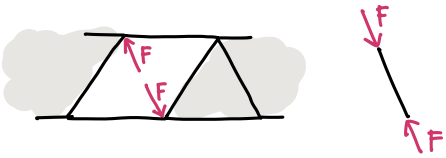
Zug- / Druckstab: Beim Bestimmen ob ein Stab ein Zug- oder Druckstab ist, muss man aufpassen, denn je nach dem, wie man die Stabkraft beim Freischnitt einzeichnet, sind die Vorzeichen anders:

Wenn man die Stabkraft so eingezeichnet hat:



falls $F \geq 0 \Rightarrow$
falls $F < 0 \Rightarrow$

Wenn man sie so eingezeichnet hat:



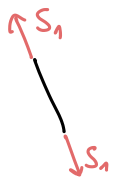
falls $F \geq 0 \Rightarrow$
falls $F < 0 \Rightarrow$

So merke ich es mir: Die Kräfte, die wir einzeichnen, sind die Kräfte, welche auf das System wirken. D.h. ich sage mir im Kopf:

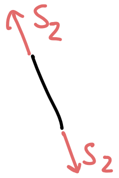
"Der Stab / das Fachwerk wird": $\begin{cases} \text{gezogen} \rightarrow \text{Zugstab} \\ \text{gedrückt} \rightarrow \text{Druckstab} \end{cases}$

Wenn Vorzeichen negativ ist, einfach sich vorstellen, dass die Pfeile in die andere Richtung wie eingezeichnet zeigen & genau dasselbe Gedankenexperiment machen.

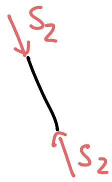
Bsp:



$S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} F \leadsto$



$S_2 = -\frac{1}{2} F \leadsto$



$S_2 = \frac{1}{2} F \leadsto$

↑ So muss man nicht immer überlegen mit den Vorzeichen :)

Kochrezept PdvL für die Bestimmung einer Stabkraft:

1.3 Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

1. Stab mit der gesuchten Stabkraft entfernen und an seiner Stelle Stabkraft einführen. Externe Kräfte und Momente in Skizze übernehmen.
2. Bewegung einführen, die möglich ist. In der Regel eine Rotation um ein Festlager
3. Starre Körper identifizieren, Momentanzentren und Winkelgeschwindigkeiten bestimmen, Geschwindigkeit an den Knoten berechen, an denen Kräfte angreifen
4. Gesamtleistung der Bewegung berechen und gleich null setzen.

$$\boxed{P_{tot} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{\tilde{v}}_i + \sum_i \underline{M}_i \cdot \underline{\tilde{w}}_i = 0}$$

Beachte: $\underline{F}_i \cdot \underline{v}_i = F_i \cdot v_i \cdot cos(\alpha)$

5. Nach gesuchter Stabkraft auflösen. Das eingeführte w kürzt sich heraus.

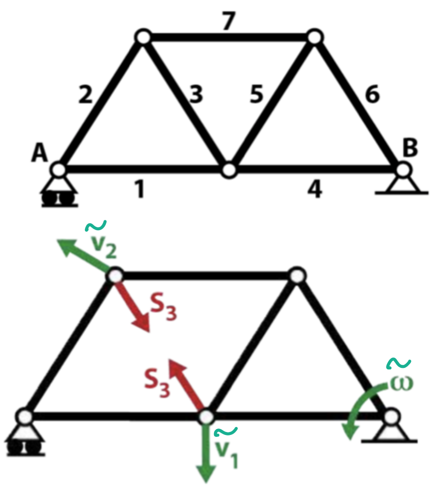


Abbildung 2: PdvL

Beachte: Lager nicht durch Lagerkräfte ersezten sondern als Lager lassen.

Notation: $\sim$: $\tilde{P}, \tilde{\omega}, \tilde{v}$: steht für virtuell

⚠ Auch wenn wir hier auf Stabkräfte fokussiert haben: PdvL ist auch für andere Sachen als für die Stabkraftbestimmung nützlich!

→ z.B. untersuchen, unter welchen Bedingungen ein ganzes System in Ruhe ist.

Go to ⇒ **Quiz 10**

⚠ HS vs. PdvL

HS: 1SK : Körper in Ruhe $\Leftrightarrow$ $\vec{R}=0, \vec{M}=0$

mehrere SK (System) : System in Ruhe $\Rightarrow$ $\vec{R}=0, \vec{M}=0$

PdvL: 1SK als auch mehrere SK (System) : Körper/System in Ruhe $\Leftrightarrow$ $\tilde{P}=0$

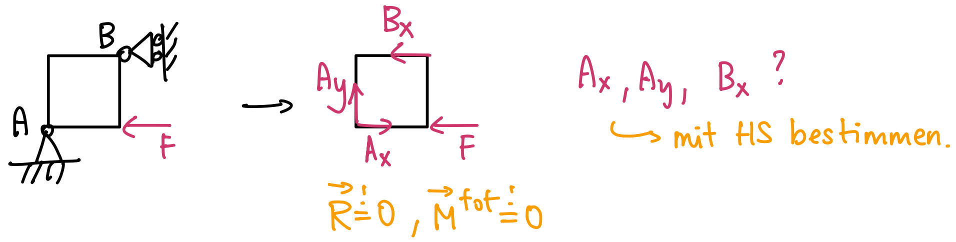
⚠ Das PdvL ist **mächtiger** als der HS! (PdvL impliziert sogar den HS, d.h. PdvL gilt $\Rightarrow$ HS gilt. Herleitung in VL für diejenigen, die es interessiert)

Weitere Methoden zum Lösen von Statik-Aufgaben

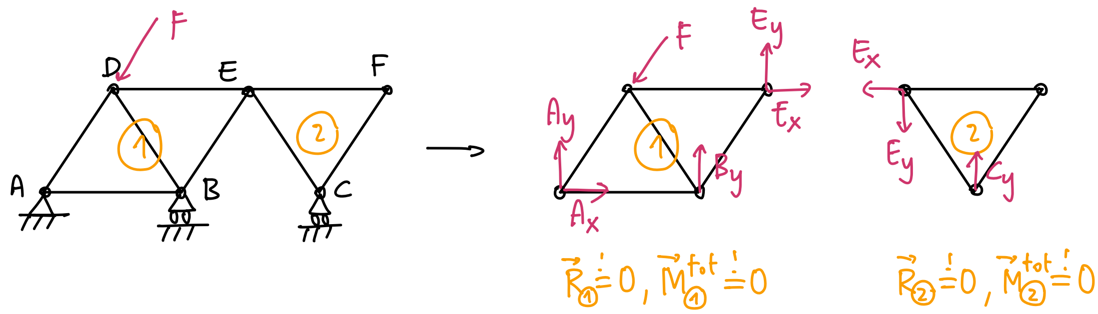
Wir haben bereits den Hauptsatz der Statik kennengelernt:

$$\boxed{\text{1 Starrkörper in Ruhe (im GGW)} \Leftrightarrow \vec{R}=0,\ \vec{M}^{tot}=0}$$

Diesen Satz verwenden wir, um z.B. die Bindungskräfte eines SKs im Fall der Ruhe zu bestimmen:



Bei **Systemen mit mehren Starrkörpern** haben wir die Starrkörper **getrennt**, die internen Kräfte im Freischnitt eingezeichnet und den HS auf **jeden einzelnen** Starrkörper angewendet:



Nun schauen wir uns 2 **andere Methoden** an, ein System zu **trennen**:

Knotengleichgewicht

→ verwenden, wenn man alle Stabkräfte eines Systems bestimmen möchte.

Vorgehen: ① alle Knoten des Starrkörpers / Systems freischneiden

② alle an diesem Knoten angreifenden Kräfte einzeichnen:

↳ äussere Kräfte
↳ interne Kräfte (Stabkräfte)

③ bei all diesen Knoten den HS anwenden um die gesuchten Kräfte zu bestimmen.

Go to ⇒ Quiz 11

Kräfteschnitt

→ anwenden, wenn man mehrere Stabkräfte gleichzeitig bestimmen möchte.

Vorgehen:

1. System dort "schneiden", wo man die (Stab-) Kräfte bestimmen möchte.
2. alle Kräfte im Freischnitt einzeichnen
   - ↳ äussere Kräfte
   - ↳ innere Kräfte: Kräfte, die an den "Schnittstellen" angreifen!
3. HS anwenden um die gesuchten Kräfte zu bestimmen.

Go to ⇒ **Quiz 12**

Übersicht aller Methoden zum Lösen von Statik-Aufgaben

Statikaufgaben, Ziele:
- Bindungs-, Lager-, Seil-, Stabkräfte eines sich in Ruhe befindenden Systems bestimmen
- (Kräfte-) Bedingungen für Ruhe bestimmen

Methoden:

① Hauptsatz der Statik (HS):

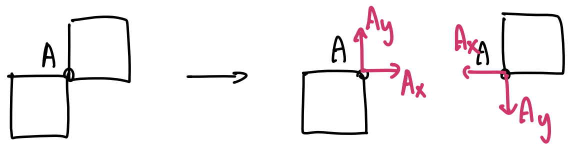
1 SK ist in Ruhe (in GGW) $\Leftrightarrow$ $\vec{R}=0$, $\vec{M}^{tot}=0$

n SK in Ruhe (in GGW) $\Rightarrow$ $\vec{R}=0$, $\vec{M}^{tot}=0$
↳ $\in \mathbb{N}_{>1}$

Wann verwenden?
↳ Lager- & Bindungskräfte gesucht
↳ falls mehrere SK → Trennen → alle Bindungskräfte bestimmen

Möglichkeiten, das System aufzutrennen:

↳ Alle Starrkörper trennen & HS auf jeden SK anwenden.
  ↳ Achtung interne Kräfte jeweils mit entgegengesetztem Vorzeichen einzeichnen!



↳ Knotengleichgewicht → alle Stabkräfte bestimmen
↳ 3-Kräfteschnitt → mehrere Stabkräfte gleichzeitig bestimmen

② Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

$$\boxed{\text{System in Ruhe } (\hat{=} \text{ im GGW}) \Longleftrightarrow \tilde{P}^{tot}=0}$$

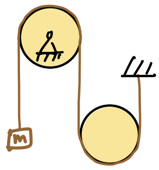
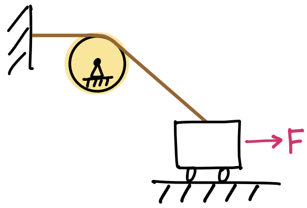
Wann verwenden?
↳ Wenn bei einem System nur eine/wenige Kräfte (z.B. Stabkraft) gesucht sind.
↳ Auch sonst, das PdvL ist das mächtigste Werkzeug in Statik!

Tipps für Flaschenzug-Aufgaben (oder Umlenkungen / Seile i.A.)

Reibungsfreie Umlenkungen:

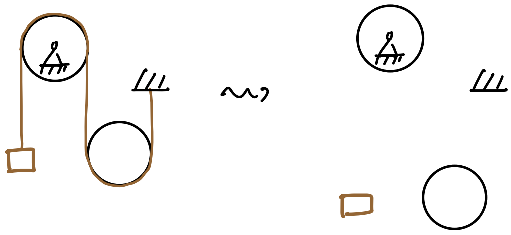
In real-life:  

rollt hier reibungsfrei

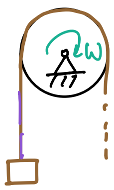
In den Aufgaben:  

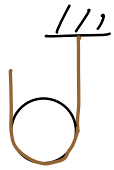
Seil:

- In Statik (Achtung in Dynamik gilt das i.A. nicht mehr!) sind die Seilkräfte an beiden Enden gleich gross:

Auch wenn Umlekung dazwischen: 

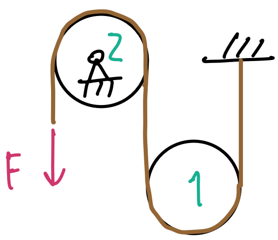
- Wenn das Seil gespannt & unverformt bleibt, dann sind dort die Geschwindigkeiten aller Punkte gleich. (gilt auch in Dynamik)

Beispiel: 

Gegenbeispiel: 

Annahme: keine Bewegung in x-Richtung

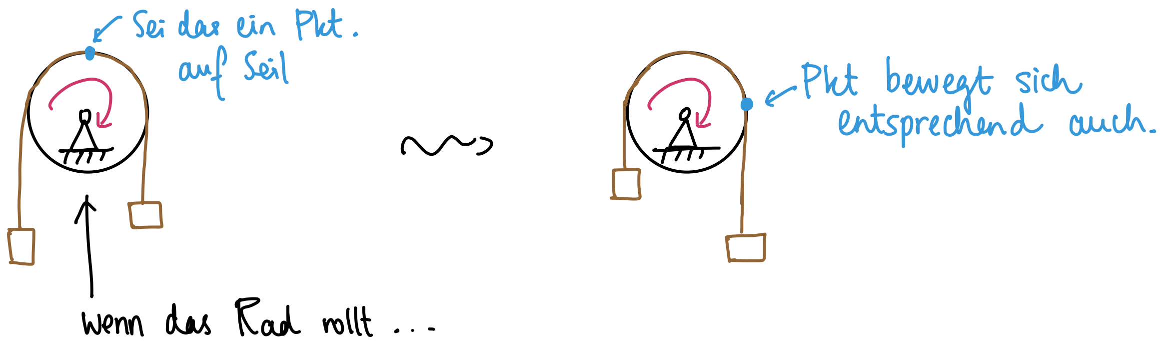
- Wenn ein Seil an der Wand / an die Decke angehängt ist, dann sind alle Pkte des Seils die <u>direkt</u> in Verbindung stehen mit der Wand/Decke in Ruhe.



Annahme: Seil bewegt sich nicht in x-Richtung.
(d.h. gespannt)

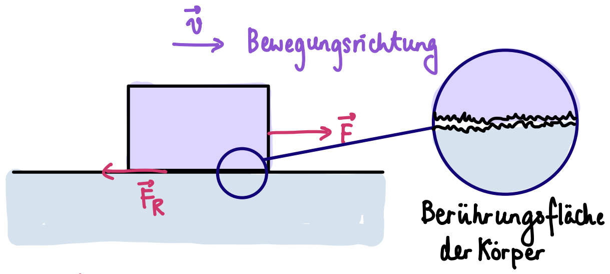
$\Rightarrow$ so kann man ganz einfach Momentanzentren von Umlenkungen finden.

- Wenn ein Rad / eine Umlenkung rollt, dann "rollt" das Seil auch mit, d.h.

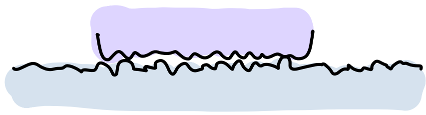


Reibung

Körper sind in der Realität nicht reibungsfrei, sondern es treten Reibungskräfte auf.



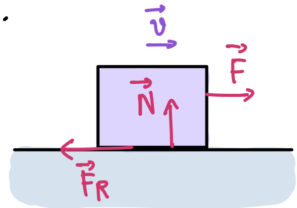
$\vec{F}$: Kraft, die die Bewegung hervorruft
$\vec{F}_R$: Reibungskraft

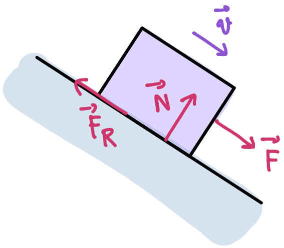


Intuitiv: je grösser F_R, desto schwieriger ist es, den Klotz zu bewegen.

Was bedeutet das für uns?
→ Wenn in einer Aufgabe angegeben wird, dass Reibung stattfindet, müssen wir einfach auch die Reibungskräfte im Freischnitt einzeichnen & in den Berechnungen berücksichtigen.

Die Reibungskraft wirkt entgegen der Bewegungsrichtung und ist immer senkrecht zur Normalkraft.



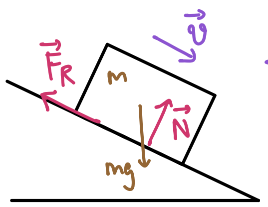


Bem: Reibungskräfte treten zwischen 2 Körpern auf.

Wir unterscheiden zwischen Haftreibung, Gleitreibung und Rollreibung.

Haftreibung

Bei der Haftreibung findet keine Bewegung der Körper zueinander statt.

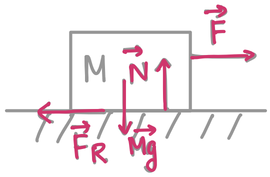


$\vec{v} = 0$

← Das ist die Bedingung, s.d. der Körper haftet!

μ_0 heisst Haftreibungskoeffizient.

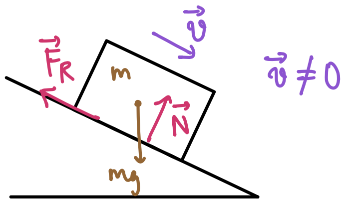
Bem: Haften liefert uns eine zusätzliche Bedingung!

Bsp: 

Sei $\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ Mg \end{pmatrix}$, $\vec{F}_R = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix}$. Wie gross muss μ_0 mind. sein, s.d. der Quader haftet?

Gleitreibung

Bei der Gleitreibung bewegen sich die Oberflächen der Körper relativ zueinander. Dabei gleitet der Körper und erfährt eine konstante Reibungskraft.

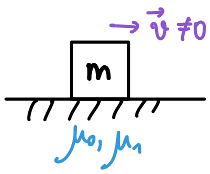


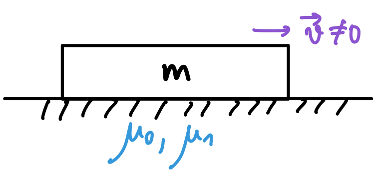
μ_1 heisst Gleitreibungskoeffizient.

Bem: Gleiten liefert eine zusätzliche Gleichung!

Zusatzinfos zu μ_0, μ_1:

μ_0, μ_1 sind Materialeigenschaften. Sie sind unabhängig von $\vec{N}$ und der Grösse der Berührungsfläche. Es gilt $\mu_0, \mu_1 > 0$.

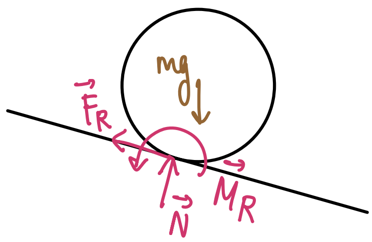




μ_0, μ_1 bleiben gleich!

Rollwiderstand (≙ Rollreibung)

Rollreibung tritt auf, wenn ein Körper über einen anderen Körper rollt. Sie ist auch entgegen der Bewegung gerichtet. Wichtig: Rollreibung ist ein ____________



$\vec{M}_R$ beschreibt das Rollmoment.

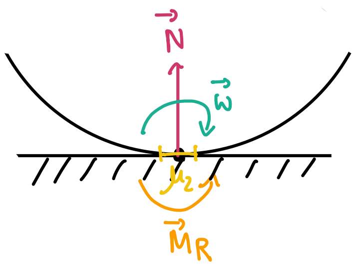
Beim Rollwiderstand unterscheiden wir auch zwischen Körper in Ruhe & in Bewegung (relativ zueinander!)

im Fall der Ruhe: (auch "Haftreibung")

im Fall der Bewegung: (auch "Gleitreibung")

Vektoriell: $\vec{M}_R = -\mu_2 \cdot |\vec{N}| \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$

μ_2 heisst **Rollwiderstandslänge** / Rollreibungslänge

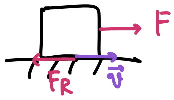


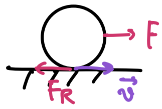
Tipp: $\vec{N}$ immer von der Standfläche weg & Reibungskräfte immer entgegen der Bewegung einführen, wenn die Bewegungsrichtung aus der Aufgabenstellung / Skizze klar ist.

→ Dann kann man auch die Betrachsstriche weglassen (unter Vorsicht geniessen! Nur wenn ganz sicher, dass die Kraft nicht (auch) in die andere Richtung zeigen wird.)

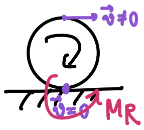
⚠ Reibung vs. Rollwiderstand nicht verwechseln!

& aus Aufgabenstellung genau lesen, was wo auftritt.

Passt auf, Haften / Gleiten 

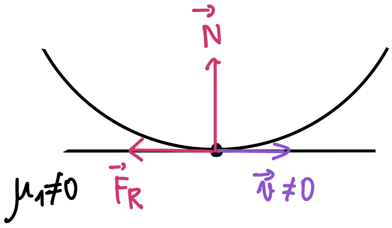


nicht mit

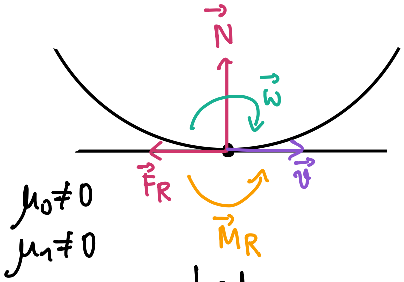
Rollwiderstand 

zu verwechseln! Lest die Aufgabenstellungen genau & schaut, was man einführen muss und was nicht.

V.a: tritt nur Reibung oder auch Rollwiderstand auf?

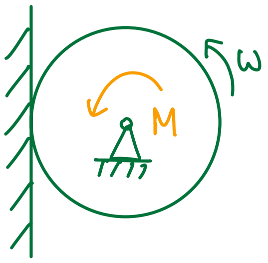


nur Reibung

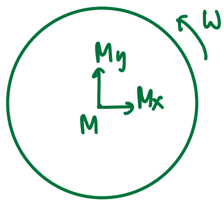


beides

Bsp: Rotierende Welle an einer Wand:



freischnitt



Good to know: Eine Berührung ist ideal rau, wenn $\mu_0 = \infty$, $\mu_2 = 0$.

Alles auf einen Blick:

Reibung:

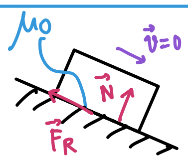
Haften: $\boxed{|\vec{F}_R| \leq \mu_0 |\vec{N}|}$

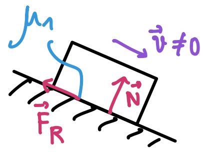
μ_0 = Haftreibungskoeffizient

Gleiten: $\boxed{|\vec{F}_R| = \mu_1 |\vec{N}|}$

μ_1 = Gleitreibungskoeffizient

⚠ $\vec{F}_R \perp \vec{N}$





Rollwiderstand:

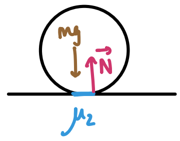
im Fall der Ruhe: $\boxed{|\vec{M}_R| \leq \mu_2 |\vec{N}|}$

zusätzliche Bedingung

im Fall der Bewegung: $\boxed{|\vec{M}_R| = \mu_2 |\vec{N}|}$

zusätzliche Gleichung

μ_2 = Rollwiderstandslänge / Rollreibungslänge



Kochrezept Aufgaben mit Reibungskräften

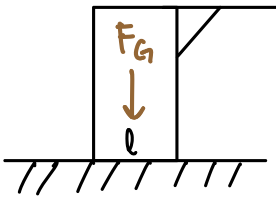
1. System freischneiden & geeignetes Koordinatensystem einführen.
2. Lagerkräfte einzeichnen (inkl. Normalkräfte → Abstandsvariable nicht vergessen!)
3. Reibungs- & Rollwiderstandskräfte als unbekannte Grössen einführen:
   Entgegen der zur erwartenden Bewegungsrichtung (wenn nicht klar, dann egal) und Senkrecht zur Normalkraft.
4. Gleichgewichtsbedingungen aufstellen (Gleiten liefert zusätzliche Gleichungen!)
5. Diskussion (über Wertebereich von μ_0, μ_1, μ_2, über gewisse Kräfte usw.)

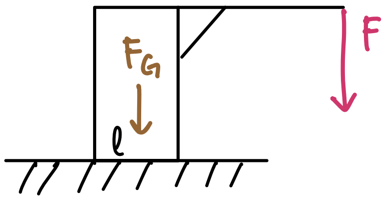
Go to → **Quiz 13**

(Nicht) Kippen

Um zu prüfen, in welchem Fall ein Körper kippt, muss die Normalkraft mit der Ebene, auf die der Körper steht, eingeführt werden.

Damit der Körper nicht kippt, muss die Kraft innerhalb der Kontaktfläche / Standfläche angreifen:

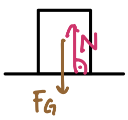


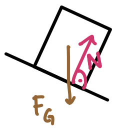


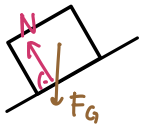
kippt nicht

kippt !

Bem: Die Normalkraft N muss man immer senkrecht zur Auflagefläche einführen!

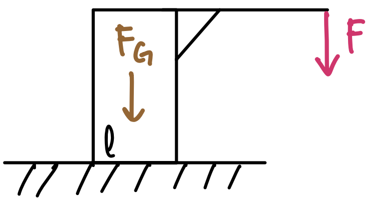






Doch wie können wir Bedingungen für das (nicht) Kippen berechnen?

1. Wir führen eine Abstandsvariable für N ein:

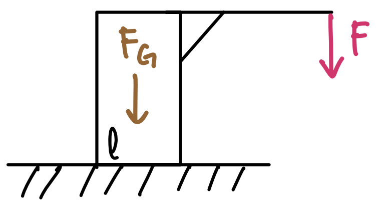


2. Und wir stellen eine Bedingung für diese Abstandsvariable auf:

nicht kippen: $\boxed{}$ wenn a wie oben eingeführt wurde*

*Wir dürfen die Variable beliebig einführen, doch dann muss man die Gleichung für (nicht) kippen entsprechend anpassen.

z.B. wenn wir es so einführen:

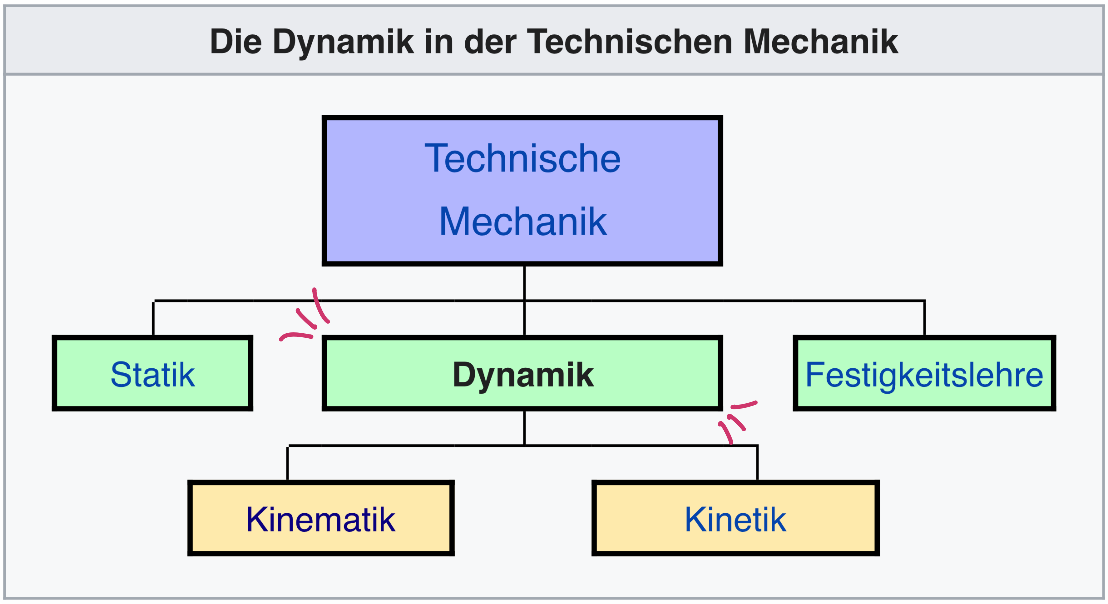


Dann ist die Bedingung für nicht kippen:

Go to ⟹ **Quiz 14**

Go to ⟹ **Beispielaufgabe 2**

Teil 4



Dynamik

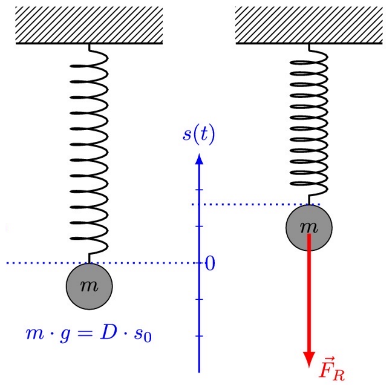
Dynamik beschreibt die Bewegung & die Gestaltänderung von Körpern unter dem Einfluss von Kräften. In der Dynamik sind die Körper im Gegensatz zur Statik nicht in Ruhe, sondern bewegen sich!

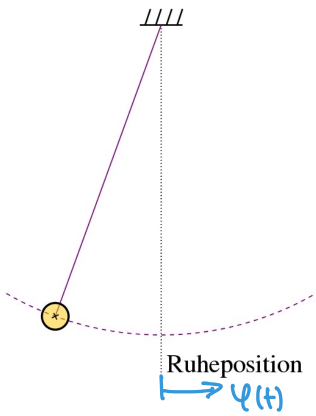
Das **Hauptziel** für uns in Dynamik ist es, mithilfe des Newton'schen Bewegungsgesetzes und des Drallsatzes **Bewegungsgleichungen** für diese Bewegungen aufzustellen.

Diese Gleichungen sind Differenzialgleichungen (DGL). Wir werden einige typische DGL & deren Lösungsweg kennenlernen. → die Lösung einer solchen DGL ist dann die Bewegungsfunktion unseres Körpers!

Kleine **Zusatzmotivation** (für ITET-people): Die Sätze / Methoden, die in diesem Kapitel vorgestellt werden, kommen im weiteren Studium immer wieder vor! Physik 1 & 2, SigSys 2, ...

Also lohnt es sich sehr, diese gut zu verstehen :)



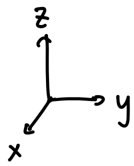


s(t) ?

φ(t) ?

Beschleunigung

Die Beschleunigung gibt an, wie schnell sich die Geschwindigkeit eines Körpers ändert.
Sie ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit (bzw. 2 Ableitung der Bewegungsfkt.)



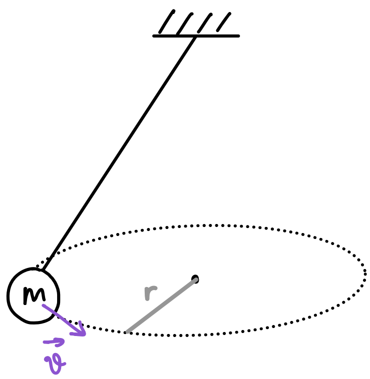
In kartesischen Koordinaten:

In Zylinderkoordinaten:

Erinnerung: $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$

Falls r konstant ist:
(z.B. bei einem Pendel)

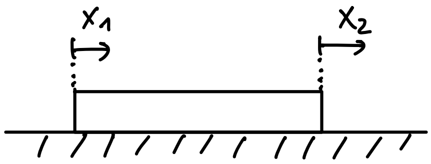
$\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$



Go to → **Quiz 15**

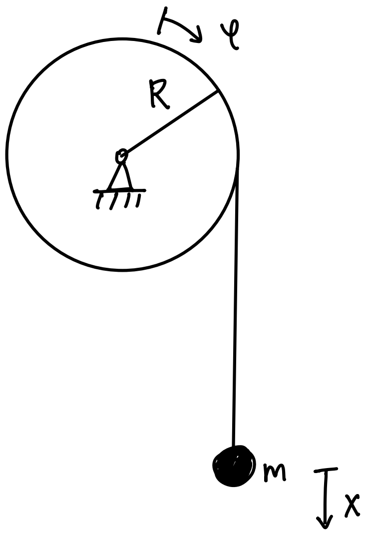
Kinematische Relationen

Wenn wir **mehr Koordinaten** haben als **Freiheitsgrade**, sind die Koordinaten voneinander abhängig. Man sagt, dass diese Koordinaten eine kinematische Relation haben. Unsere Aufgabe ist es, Gleichungen aufzustellen, welche diese Relationen beschreiben:



Oft treten kinematische Relationen bei Rollen auf:

Allgemein:



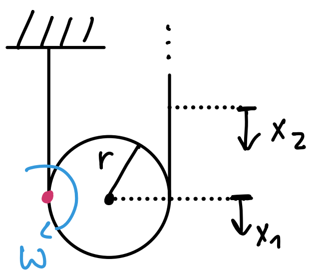
Erinnerung:

ω = Kreisfrequenz = $2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \dot{\varphi}$

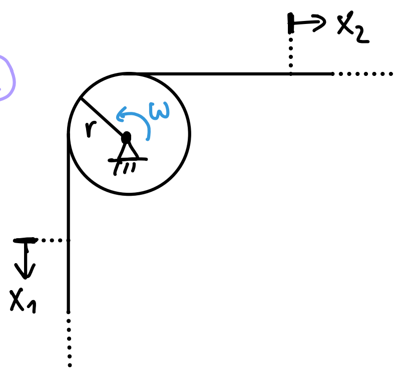
$\hat{=}$ Rotationsgeschwindigkeit

Weitere Beispiele:

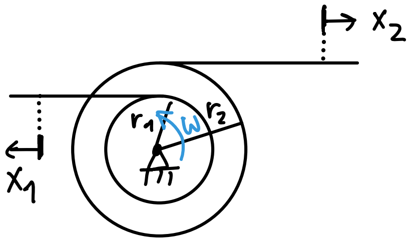
1



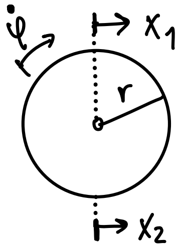
2



③



④

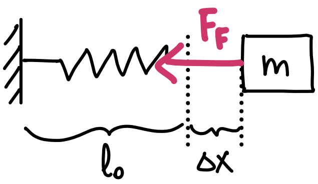


Feder

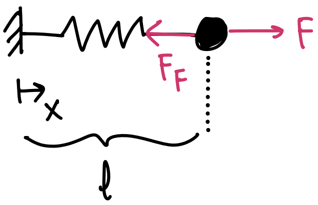
Wir zeichnen sie so

Eine Feder ist ein Bauteil, der sich elastisch verformen lässt:

Wenn sie gezogen / gedrückt wird, übt sie eine Kraft in die entgegengesetzte Richtung aus. ("Sie will in die ursprüngliche Lage zurück"). Diese Kraft kann man nach dem **Hookeschen Gesetz** bestimmen:

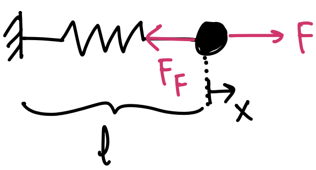


⚠ Aufpassen, wo die entspannte Lage und wo die Koordinate ist:



entspannte Lage bei $x=0$ →

entspannte Lage bei $x=\ell$ →



entspannte Lage bei $x=-\ell$ →

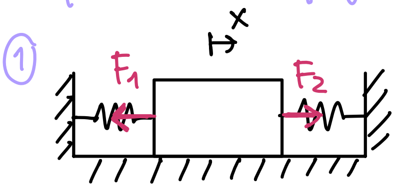
entspannte Lage bei $x=0$ →

⚠ Aufpassen mit dem Vorzeichen (anders, je nach dem in welche andere Richtung man F_F eingezeichnet hat):

entspannte Lage bei $x = 0$:

Beispiele: Im folgenden haben alle Feder die Federkonstante k.

①

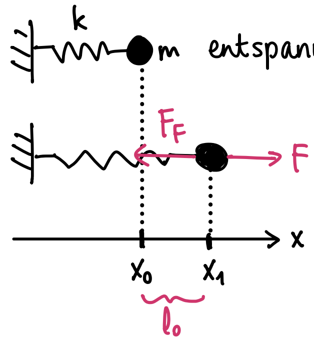


beide Feder sind in ihrer entspannten Lage

$F_1 =$

$F_2 =$

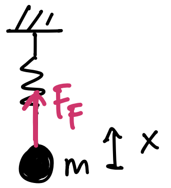
②



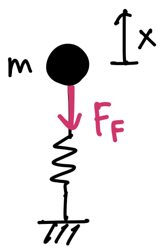
entspannte Lage

$F_F =$

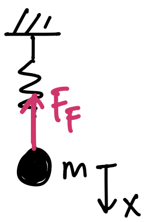
③ alle sind in entspannter Lage



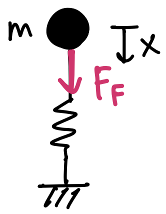
$F_F =$



$F_F =$



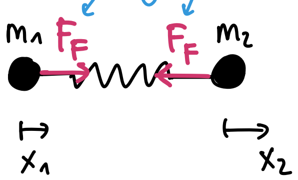
$F_F =$



$F_F =$

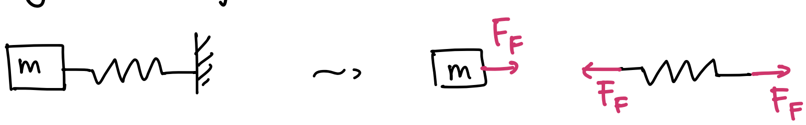
④

wegen dem Reaktionsprizip auf beide Seiten gleich!



$F_F =$

Wichtig!: Beim Freischneiden einer Feder sind die Kräfte auf ihre beiden Enden gleich gross (wegen dem Reaktionsprinzip von Newton)



Wichtig!: Federn verringern den Freiheitsgrad eines Systems <u>nicht</u>.

Impuls

Der Impuls ist folgendermassen definiert:

Sie beschreibt die "Wucht" oder der "Schwung" eines Körpers.

⚠ Achtung nicht mit Leistung (P) verwechseln!

⚠ Der Impuls $\vec{p}$ ist ein Vektor!

Newton'sches Bewegungsgesetz

(≙ Impulssatz)

In der Dynamik sind die Körper im Gegensatz zur Statik nicht in Ruhe, sondern bewegen sich. Daher führen wir neue Gleichungen ein, um diese Bewegungen beschreiben zu können:

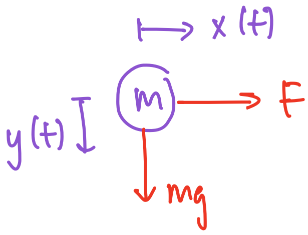
Newton

oder äquivalent:

$\vec{p} = m\vec{v}$ = Impuls

⚠ Wenn ihr mit Beträgen arbeitet: R = Resultierende in Richtung der Koordinate!

D.h. also z.B.:



$m\ddot{x}(t) =$

$m\ddot{y}(t) =$

NICHT! $m\ddot{x}(t) =$

Diese Gleichungen heissen Bewegungsgleichung und es sind Differenzialgleichungen. Da es sich um physikalische Systeme handelt, haben diese Gleichungen auch gewisse Anfangsbedingungen:

Diese werden wir auch brauchen, um die DGL's komplett lösen zu können.

⚠ Um eine eindeutige Lösung zu den Bewegungsgleichungen (die DGLs sind) zu erhalten, benötigt man **gleich viele Anfangsbedingungen wie der Grad der DGL.**

⚠ Falls mehrere Körper/Massepunkte gegeben sind, muss man für jeden Massepunkt das Newton'sche Bewegungsgesetz aufstellen und die dazugehörigen Anfangsbedingungen bestimmen.

Must know's about Differenzialgleichungen (DGL)

↳ für mehr Details: Dokument "Crash Course DGL" auf meiner Webseite / Polybox von Max anschauen :)

Um diese DGL's zu lösen gibt es Lösungsansätze, die an der Prüfung meistens gegeben sind. Der folgende Ansatz kommt sehr häufig vor:

Falls die DGL in diese Form umgeformt werden kann:

↳ meistens möglich!!

Dann löst dieser Ansatz die DGL:

Wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind, die durch das Einsetzen der Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen. q und ω sind Konstanten, die durch die DGL bestimmt sind. Nach dem Bestimmen von c_1 und c_2 können wir die Werte für ω und q einsetzen und das ist unsere Lösung :)

Go to ⟹ Quiz 16

Das Newton'sche Bewegungsgesetz gilt für alle Massepunkte. ($\hat{=}$ materielle Punkte)
Nun wollen wir auch Bewegungssätze haben, welche für beliebige starre oder deformierbare Körper gelten: der Massenmittelpunktsatz und der Drallsatz.

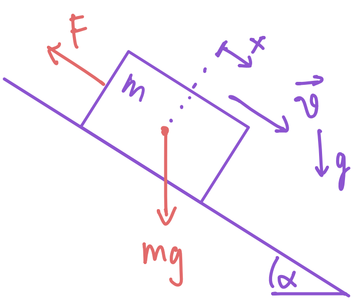
Massenmittelpunktsatz

Um Bewegungen von Körpern zu beschreiben:

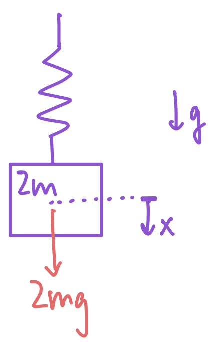
Anwendung: In TechMech benutzen wir den Massenmittelpunktsatz gleich wie das Newton'sche Bewegungsgesetz. (Nur die Herleitung ist anders).
↳ für uns egal :))

Beispiele:

1



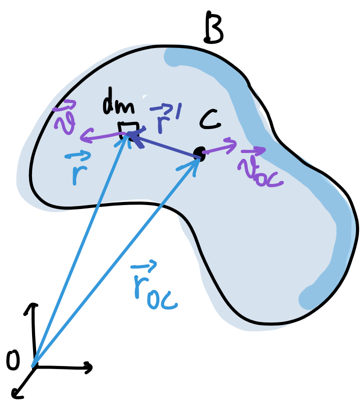
2



Nun wollen wir auch Bewegungen von rotierenden Körpern beschreiben können:

Drall

Der Drall (bzw. Drehimpuls) ist eine physikalische Grösse, welche den Bewegungs-zustand eines rotierenden starren Körpers bestimmt. Sie beschreibt sozusagen den "Schwung" der Rotation. Den Drall kann man bezüglich eines inertialen Punktes (d.h. ein Punkt in Ruhe) O oder bezüglich des Massenmittelpunktes bestimmen:



Bezüglich inertialer Punkt O:

Bezüglich Massenmittelpunkt C:

keine Angst ihr müsst den Drall nie berechnen.
Es ist aber gut zu wissen wie sie definiert ist :)

mit $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{OC}$

$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_{OC}$

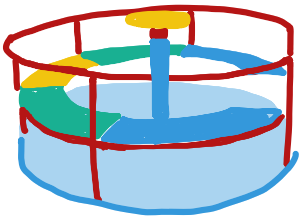
Satz von Steiner (Transformationsregel für den Drall)

Wie beim Moment gibt es für den Drall auch eine Transformationsregel:

Drallsatz

Der Drallsatz ist ein physikalisches Gesetz, das besagt, dass zur Änderung des Drehimpulses eines Körpers ein Drehmoment an ihm aufgebracht werden muss.

z.B. Wenn wir ein Spielplatzkarussel haben:



Um diesen Karussel in Drehung zu versetzen, muss man es anstossen (≙ ein Moment aufbringen, das dem Karussel Drehimpuls zuführt). Um die Drehung aufzuhören muss man wieder ein Moment in Gegenrichtung aufbringen, um den Drehimpuls zu verändern und es zum anhalten zu bringen. (Das machen in der realen Welt Reibungsmomente im Lager und der Luftwiderstand).

Die mathematische Formulierung dieses Gesetzes lautet wie folgt:

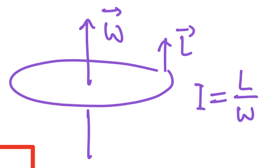
Drallsatz bezüglich des inertialen Punktes O :

Drallsatz bezüglich des Massenmittelpunktes C :
(≙ relativer Drallsatz)

⚠ Den Drallsatz kann man "nur" bezüglich 2 Punkte aufstellen!

Drallsatz für ebene Rotationen von Starrkörpern:

Bei ebenen Rotationen kann der Drall und folglich auch der Drallsatz vereinfacht werden:



Drall bezüglich Inertialpunkt 0:

$\Rightarrow$ Drallsatz bezüglich Inertialpunkt 0:

Drall bezüglich Massenmittelpunkt C:

$\Rightarrow$ Drallsatz bezüglich Massenmittelpunkt C:

wobei I_0 bzw. I_C das Massenträgheitsmoment ist.

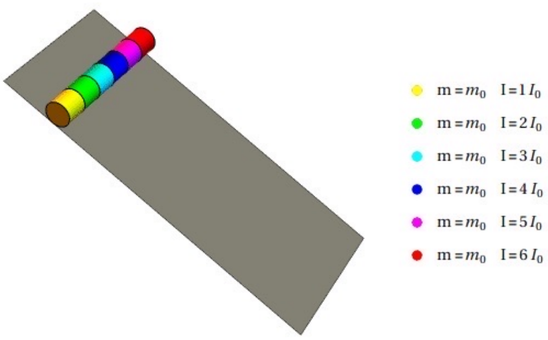
⚠ Der Drall und das Moment müssen in dieselbe Richtung positiv gerechnet werden!

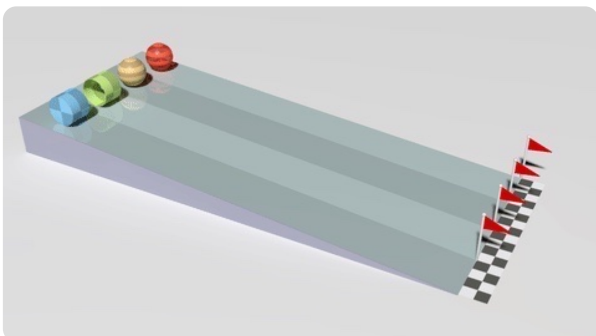
Massenträgheitsmoment (≙ Inertialmoment):

bezüglich 0:

bezüglich C:

Sie gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Rotationsgeschwindigkeit bei der Drehung um eine gegebene Achse an. Sie ist abhängig von der Geometrie und Masse des Körpers.





Four objects with identical masses and radii racing down a plane while rolling without slipping.

From back to front:
- spherical shell,
- solid sphere,
- cylindrical ring, and
- solid cylinder.

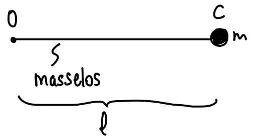
The time for each object to reach the finishing line depends on their moment of inertia. (OGV version)

⚠ Der Massenträgheitsmoment eines aus homogenen Teilen zusammengesetzten Körpers ist die Addition der einzelnen Massenträgheitsmomente.

⚠ Das Massenträgheitsmoment ist bei einer ebenen SK-Bewegung konstant.
↳ Grund warum wir aus dem Drall $L_0 = I_0 \omega$ den Drallsatz $\dot{L}_0 = I_0 \dot{\omega}$ erhalten :)

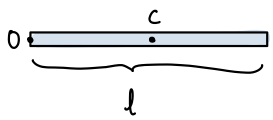
⚠ Umrechnung zwischen I_0 & I_c:

Beispiele Massenträgheitsmoment:



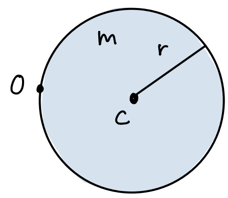
$I_c = 0$

$I_0 = m\ell^2$



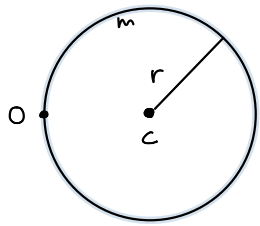
$I_c = \frac{1}{12} m\ell^2$

$I_0 = \frac{1}{3} m\ell^2$



$I_c = \frac{1}{2} mr^2$

$I_0 = \frac{3}{2} mr^2$



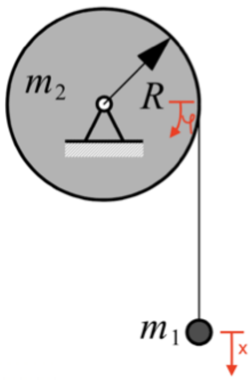
$I_c = mr^2$

$I_0 = 2mr^2$

Go to → **Quiz 17**

Kochrezept Dynamikaufgaben

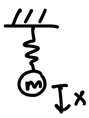
1. Identifiziere die allgmeine Lage, die unterschiedlichen Starrkörper und deren Verbindungen
2. Freischnittsskizze für die einzelnen Starrkörper (von der allgemeinen Lage) erstellen:
   (a) Körper freischneiden und Verbindungskräfte (z.B. Seilkräfte) einführen
   (b) alle externen Kräfte einführen
   (c) geeignetes Koordinatensystem für jeden Körper einführen. Koordinaten sollten in die Richtung zeigen, in den sich der Körper bewegen wird. Der Ursprung dieser Koordinaten sollte in der Skizze deutlich erkennbar sein (wichtig für Anfangsbedingungen).
   (d) Freiheitsgrad ermitteln, falls danach gefragt ist
3. Newtonsches Bewegungsgesetz für jeden Körper, Drallsatz für jeden *rotierenden* Körper aufstellen
$$\underline{R} = m\underline{a} \qquad \& \qquad M_O = \dot{L}_O = I_O\ddot{\varphi}$$
4. Bei System mit mehreren Körpern: Kinematische Relationen aufstellen → Zusammenhang zwischen den einzelnen Variablen der unterscheidlichen Körpern finden. Häufig gilt: $x = R\varphi$ (siehe Skizze rechts)



5. Anfangsbedingungen aufstellen (um später die Integrationskonstanten zu bestimnmen)
$$x(0) = ... \quad \& \quad \dot{x}(0) = ... \quad \text{oder} \quad \varphi(0) = ... \quad \& \quad \dot{\varphi}(0) = ...$$
6. DGL lösen - mithilfe von Lösungsansatz oder bei einfachen DGLs durch Integration
7. Anfangsbedingungen in Lösungen der DGL einsetzten und Integrationskonstanten bestimmen

Wichtigste DGL für TechMech

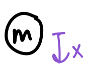
Federschwinger:



Math. Pendel:

Phys. Pendel:

Freier Fall:



Kleine Zusammenfassung von Dynamik

In Dynamik bewegen sich unsere Systeme. Mit den Sätzen, die wir in diesem Kapitel kennengelernt haben, können wir für diese Bewegungen die entsprechende Bewegungsgleichung (die DGL's sind) aufstellen. Wie man diese aufstellt, für...

... **Massenpunkte:** Newton'scher Bewegungsgesetz: $\boxed{m\vec{a} = \vec{R}} = \dot{\vec{p}}$ auch: Impulssatz

... **Starre & deformierbare Körper:**

Impulssatz: $\dot{\vec{p}} = \vec{R} \xRightarrow{m\vec{r}_c = \iiint_B \vec{r}\,dm}$ Massenmittelpunktsatz: $\boxed{m\vec{a}_c = \vec{R}}$

Drallsatz: bezüglich $\underset{\text{Inertialpunkt (= Pkt. in Ruhe)}}{0}$ $\boxed{\dot{\vec{L}}_0 = \vec{M}_0}$ wobei $\vec{L}_0 = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v}\, dm$

bezüglich $\underset{\text{Massenmittelpunkt}}{C}$ $\boxed{\dot{\vec{L}}_c = \vec{M}_c}$ wobei $\vec{L}_c = \iiint_B \vec{r}\,' \times \vec{v}\,'\, dm$

Umrechnung zw. L_0 und L_c: **Satz von Steiner:** $\boxed{\vec{L}_0 = \vec{r}_{0c} \times \vec{P} + \vec{L}_c}$

(Transformationsregel für den Drall)

... **Ebene Rotationen von starren Körpern:**

Drallsatz: bezüglich $\underset{\text{Inertialpunkt}}{0}$: $\boxed{\dot{L}_0 = I_0\dot{\omega} = I_0\ddot{\varphi} = M_0^{tot}}$ da Drall: $\boxed{L_0 = I_0\omega}$

bezüglich $\underset{\text{Massenmittelpunkt}}{C}$: $\boxed{\dot{L}_c = I_c\dot{\omega} = I_c\ddot{\varphi} = M_c^{tot}}$ da Drall: $\boxed{L_c = I_c\omega}$

↳ in TechMech: Massenmittelpunkt = geom. Schwerpunkt

wobei I_0, I_c das Massenträgheitsmoment (≙ Inertialmoment) ist

bezüglich 0: $I_0 = \iint_B r^2\, dm$

bezüglich C: $I_c = \iint_B r'^2\, dm$

Umrechnung zwischen I_0 & I_c: $\boxed{I_0 = m r_{0c}^2 + I_c}$

sehr Wichtig: Der Drall und das Moment müssen in dieselbe Richtung positiv gerechnet werden.

Go to ⇒ **Beispielaufgabe 3**

Teil 5

Tipps für die Prüfung & die restliche Lernphase

In der Lernphase

⇒ 2 wichtige Dinge:
- Theorie wiederholen
- Üben, üben, üben!

↳ Das wichtigste ist, dass die Basics sitzen:
→ Mathe-Grundlagen (Vektoren, Trigonometrie, ...)
→ Grundkonzepte aus der Vorlesung verstehen (SdpG, SvM, PdvL, ...).
→ Beweise und Herleitungen sind für die Prüfung nicht so wichtig.
→ Ihr sollt wissen, was die unterschiedlichen Sätze bedeuten und wie man sie anwendet.

↳ Sobald die Basics sitzen ist das Nächstwichtigste ÜBEN, ÜBEN, ÜBEN:
→ Einige Aufgaben aus den Serien noch einmal anschauen (vor allem jene, bei denen ihr unter dem Semester Schwierigkeiten hattet / die ihr noch nicht gemacht habt.). Auch MC und Clicker nochmal anschauen.

→ Alte Zwischenprüfungen / Prüfungen rechnen:
- Zunächst Beispiel für Beispiel einer Prüfung rechnen und nach jeder Aufgabe mit Musterlösung vergleichen.

- Dann Prüfungen unter „Prüfungsbedingungen" rechnen:
  → Timer auf 2h setzen.
  → Handy aus.
  → Prüfungssituation "simulieren"
  (auch empfehlenswert: zusammen mit anderen Studenten)

→ Nur Zusammenfassung als Hilfsmittel verwenden.

→ Keine Musterlösung (erst nach der „Prüfung")

→ Nur die Prüfungen vom letzten Jahr sind von eurem Prof. (Tiso), aber ältere Prüfungen sind auch eine gute Übung (falls also etwas dabei ist, was nicht in der Vorlesung drankam: einfach ignorieren und weglassen).

→ Meine Empfehlung: Zuerst ältere Prüfungen lösen und dann Tiso-Prüfungen als Generalprobe

Pro-Tipp: helft euch gegenseitig, besprecht Unklarheiten mit euren Mitstudenten ;)

ENGINEERING FACT

One does not simply do an individual assignment individually.

→ Trainiert auch die Herangehensweise. Für mich hilfreich:

- Alle Aufgaben überfliegen.
- Mit der Aufgabe anfangen, die mir am meisten liegt - gesicherte Punkte sammeln und Selbstvertrauen aufbauen.
- Wenn die Zeit knapp wird: Wo kann ich noch schnell Punkte holen?
- Nicht nervös werden, wenn etwas nicht sofort klar ist. Einfach zur nächsten Aufgabe gehen und später nochmal versuchen.

Don't forget: nicht zu viel stressen lassen, plant weiterhin genug Pausen / Ausgleich ein :)

↳ Zusammenfassung

→ Selbst verfasst oder aus anderer Quelle (z.B. AMIV)

→ Haltet euch dabei aber an die Vorgaben!

→ Übt mit eurer Zusammenfassung:

- Alle Aufgaben und Prüfungen mit eurer Zusammenfassung lösen. Ihr müsst unbedingt wissen, wo was auf eurer Zusammenfassung steht, damit ihr es in der Prüfung schnell findet und keine Zeit verliert.

Bei der Prüfung

⇒ Nehmt eine Uhr für euer Zeitmanagement mit.

⇒ Geht so durch die Prüfung, wie ihr es geübt habt (Herangehensweise).

⇒ **! KEINE ZEIT VERSCHWENDEN !**

⇒ ETH-Prüfungen können zeitlich knapp sein, aber wenn man in Technischer Mechanik zügig arbeitet, geht sich die Prüfung im Normalfall in der Zeit gut aus.

⇒ Anders als in der Schule: Wenn es heißt: „Die Zeit ist um.", ist die Zeit auch um - keine Empfehlung aufzuhören zu schreiben, sondern wirklich aufhören. Ansonsten gilt die Disziplinarverordnung der ETH - UNANGENEHM.

⇒ Vergesst nicht eure Legi mitzunehmen.

⇒ Nehmt Essen, Trinken und/oder einen Glücksbringer mit - was auch immer euch die Prüfung angenehmer gestaltet.

⇒ Nicht schummeln - Es gilt die Disziplinarverordnung der ETH - UNANGENEHM.

⇒ Und das wichtigste:

Nicht nervös sein, durchatmen und ihr schafft das!

- Checkliste Sachen zum Mitnehmen:
  - ☐ ETH-Karte (Legi)
  - ☐ Zusammenfassung
  - ☐ Massstab, Geodreieck
  - ☐ farbige Stifte (achtung darf nicht radierbar sein)
  - ☐ Verpflegung: Wasser, etwas zum essen usw.
  - ☐ Uhr (keine smart watches)
- Anreise planen (genug früh hingehen → ihr wollt kein Stress vor der Prüfung!)
- Lest euch die ganze Prüfung durch
- Legt eure eigene Reihenfolge fest
  - ↳ als erstes die Aufgaben machen, die euch leicht fallen
  - ↳ überspringe Aufgaben falls ihr nicht weiterkommt
- Ihr braucht nicht alles richtig haben!

macht das auch, wenn ihr mit alten Prüfungen übt
→ viele Prüfungen sind ähnlich aufgebaut
→ "Strategie" erstellen

- Nutzt eure Zusammenfassung
- Wenn ihr noch Zeit habt: schaut was ihr noch auf der Zsmf habt, lest euch alles nochmal durch
- Fragt die Assistenten, wenn ihr etwas nicht versteht!
- Sich paar Sekunden Zeit nehmen, um die Lösung zu "analysieren":
  - ↳ macht die Grössenordnung Sinn?
  - ↳ macht das Vorzeichen Sinn?
  - ↳ Einheiten-check wo möglich

Viel Erfolg !!