

Technische Mechanik

Klausur III

 08. Dezember 2015, 17¹⁵ - 18¹⁵

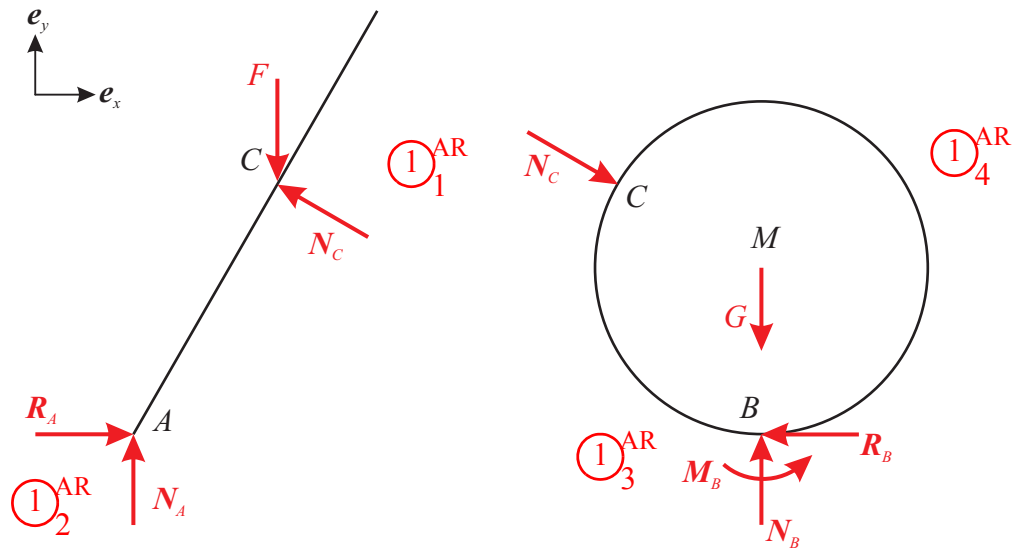
Dr. Stephan Kaufmann

Musterlösung

Herbstsemester 2015

Aufgabe 1 (18 Punkte)

a) Freischnittskizze



Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen:

Leiter:

$$\text{KB}(x): \quad 0 = R_A - \frac{\sqrt{3}}{2} N_C \quad (1)$$

$$\text{KB}(y): \quad 0 = N_A + \frac{1}{2} N_C - F \quad (2)$$

$$\text{MB}(A, z): \quad 0 = \sqrt{3} r N_C - \frac{\sqrt{3}}{2} r F \quad (3)$$

Rolle:

$$\text{KB}(x): \quad 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} N_C - R_B \quad (4)$$

$$\text{KB}(y): \quad 0 = N_B - \frac{1}{2} N_C - G \quad (5)$$

$$\text{MB}(M, z): \quad 0 = M_B - r R_B \quad (6)$$

Auflösen des linearen Gleichungssystems:

$$(3): \quad N_C = \frac{1}{2}F$$

$$(2): \quad N_A = \frac{3}{4}F \quad \textcircled{1}_{9}^{\text{AR}}$$

$$(1): \quad R_A = \frac{\sqrt{3}}{4}F$$

$$(4): \quad R_B = \frac{\sqrt{3}}{4}F$$

$$(5): \quad N_B = G + \frac{1}{4}F \quad \textcircled{1}_{10}^{\text{AR}}$$

$$(6): \quad M_B = \frac{\sqrt{3}}{4}rF$$

Bedingung für Haften im Punkt A:

$$|R_A| \leq \mu_{0,L} N_A, \text{ also } \frac{\sqrt{3}}{4}F \leq \frac{3}{4}\mu_{0,L}F \quad (7) \quad \textcircled{1}_{11}^{\text{KR}}$$

Bedingung für Haften im Punkt B:

$$|R_B| \leq \mu_{0,R} N_B, \text{ also } \frac{\sqrt{3}}{4}F \leq \mu_{0,R} \frac{4G+F}{4} \quad (8) \quad \textcircled{1}_{12}^{\text{KR}}$$

Bedingung für Rollwiderstand im Punkt B:

$$|M_B| \leq \mu_2 N_B, \text{ also } \frac{\sqrt{3}}{4}rF \leq \mu_2 \frac{4G+F}{4} \quad (9) \quad \textcircled{1}_{13}^{\text{KR}}$$

b)

Bedingung für Haften im Punkt A vereinfacht sich zu: $1 \leq \frac{3}{2}$. $\textcircled{1}_{14}^{\text{AR}}$

Diese Gleichung ist immer erfüllt, demnach kommt es im Punkt A niemals zu Gleiten.

Gleichung (8) vereinfacht sich zu: $F \leq \frac{4G+F}{9}$.

Daraus folgt $F \leq \frac{G}{2}$. $\textcircled{1}_{15}^{\text{AR}}$

Gleichung (9) vereinfacht sich zu: $F \leq \frac{4G+F}{17}$.

Daraus folgt $F \leq \frac{G}{4}$. $\textcircled{1}_{16}^{\text{AR}}$

Also muss $F \leq \frac{G}{4}$ sein, damit das System in Ruhe bleibt. Die kritische Kontaktbedingung ist die des Rollwiderstandes im Punkt B . Sie wird als erste verletzt, wenn die Kraft F den kritischen Wert übersteigt. Da die Haftbedingung weiterhin erfüllt bleibt, beginnt die Rolle zu rollen.

①^{KR}₁₇ ①^{KR}₁₈

Punkteschlüssel

Pt		Bedingung
1	AR	Normalkraft Leiter/Rolle
2	AR	Kontaktkräfte Leiter/Boden
3	AR	Kontaktkräfte/Moment Rolle/Boden
4	AR	Gewichtskraft und Belastung
5	KR	KB(x) und KB(y) für Leiter
6	KR	MB für Leiter
7	KR	KB(x) und KB(y) für Rolle
8	KR	MB für Rolle
9	AR	N_C , N_A und R_A
10	AR	N_B , R_B und M_B
11	KR	Bedingung Haften in A
12	KR	Bedingung Haften in B
13	KR	Bedingung Rollwiderstand in B
14	AR	Auflösen Kontaktbedingung
15	AR	Auflösen Kontaktbedingung
16	AR	Auflösen Kontaktbedingung
17	KR	Schlussfolgerung kritischer Kontakt.
18	KR	Schlussfolgerung Bewegung.

AR: Absolut Richtig

KR: Konsequent Richtig

Technische Mechanik

Klausur III

 08. Dezember 2015, 17¹⁵ - 18¹⁵

Dr. Stephan Kaufmann

Musterlösung

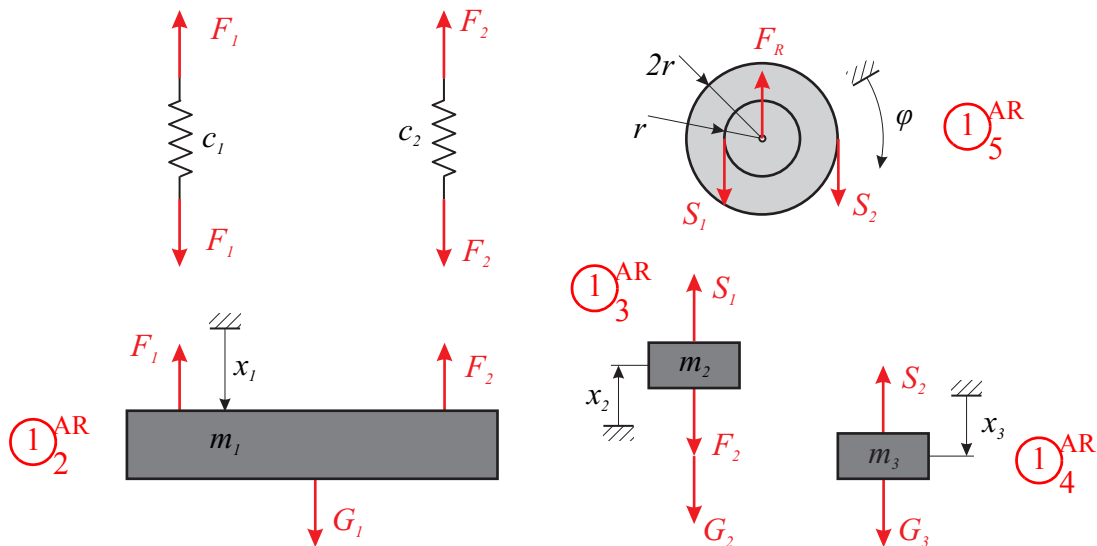
Herbstsemester 2015

Aufgabe 2 (16 Punkte)

a) Das System hat den Freiheitsgrad 2. Das heisst die Lage des Systems kann mit zwei Koordinaten (zum Beispiel x_1 und x_2) eindeutig beschrieben werden.

 ①^{AR}₁

b) Freischnittsskizze



c) Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{x}_1 = G_1 - F_1 - F_2 \quad (1) \quad ①^{KR}₆$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = S_1 - F_2 - G_2 \quad (2) \quad ①^{KR}₇$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = G_3 - S_2 \quad (3) \quad ①^{KR}₈$$

d)

$$F_1 = c_1 x_1 \quad (4) \quad ①^{AR}₉$$

$$F_2 = c_2 (x_1 + x_2) \quad (5) \quad ①^{AR}₁₀$$

e)

Aus $\dot{x}_2 = r\dot{\varphi}$ und $\dot{x}_3 = 2r\dot{\varphi}$ folgt:
 $\dot{x}_3 = 2\dot{x}_2$.

①^{AR}₁₁ ①^{AR}₁₂
(6)

f)

MB(M): $0 = rS_1 - 2rS_2$
oder: $S_1 = 2S_2$

(7) ①^{KR}₁₃

g) Einsetzen in Gleichungen (1) - (3):

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - c_1 x_1 - c_2 (x_1 + x_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = S_1 - c_2 (x_1 + x_2) - m_2 g$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = m_3 g - S_2$$

Gleichung (3) kann mithilfe von (6) und (7) umgeformt werden:

$$2m_3 \ddot{x}_2 = m_3 g - \frac{1}{2} S_1 \text{ wird zu } S_1 = 2m_3 g - 4m_3 \ddot{x}_2$$

①^{AR}₁₄

Somit kann S_1 in Gleichung (2) eliminiert werden:

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - c_1 x_1 - c_2 (x_1 + x_2)$$

$$(m_2 + 4m_3) \ddot{x}_2 = (2m_3 - m_2) g - c_2 (x_1 + x_2)$$

①^{AR}₁₅

①^{AR}₁₆

oder in Matrixform:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 + 4m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_2 \\ c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g \\ (2m_3 - m_2) g \end{bmatrix}$$

Punkteschlüssel

Pt		Bedingung
1	AR	Richtige Antwort
2	AR	Freischnitt Balken
3	AR	Freischnitt Quader 1
4	AR	Freischnitt Quader 2
5	AR	Freischnitt Stufenrolle
6	KR	Bewegungsgleichung Balken
7	KR	Bewegungsgleichung Quader 1
8	KR	Bewegungsgleichung Quader 2
9	AR	Federgesetz 1
10	AR	Federgesetz 2
11	AR	Relation $\dot{x}_2/\dot{\varphi}$
12	AR	Relation $\dot{x}_3/\dot{\varphi}$
13	KR	Momentenbedingung Rolle
14	AR	Seilkraft berechnet
15	AR	Bewegungsgleichung 1
16	AR	Bewegungsgleichung 2

AR: Absolut Richtig

KR: Konsequent Richtig