Disclaimer: Diese Zusammenfassung wurde im Rahmen der D-ITET Analysis 1 & 2 Vorlesung von Prof. E. Kowalski & Prof. T. Rivière erstellt. Als Basis diente die Zusammenfassung von Colin Dirren.

Ich kann nicht für Vollständigkeit & Richtigkeit dieses Dokuments garantieren, bin jedoch froh über Fehler informiert zu werden oder bei Fragen zu helfen: ldewindt@ethz.ch

Zürich, der 23.10.2021 Lina De Windt

Analysis 1 & 2 Zusammenfassung

HS 20 Prof. E. Kowalski und FS21 Prof. T. Rivière
Lina De Windt ldewindt@ethz.ch

1. Grundlagen:

Quantoren:
- $\forall$ für alle
- $\exists$ es existiert ein
- $\nexists$ es existiert kein
- $\exists!$ es existiert genau ein

Logik:

$\neg A$	nicht A
$A \wedge B$	A und B
$A \vee B$	A oder B (oder beide)
$A \Rightarrow B$	A impliziert B
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann wenn B gilt

Negationsregeln:

$\neg(\neg A)$	A
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
$\neg(\forall x, A(x))$	$\exists x, \neg A(x)$
$\neg(\exists x, A(x))$	$\forall x, \neg A(x)$
$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge (\neg B)$

Kontraposition: $A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$ (Aussagen sind gleichbedeutend)
$\quad \not\Leftrightarrow \quad \neg A \Rightarrow \neg B$

Mengenoperationen:

$x \in A$	Element von
$A \subset B$	Teilmenge von
$A \cap B$	Durchschnitt 
$A \cup B$	Vereinigung 
$A \cap B = \emptyset$	Disj. Vereinigung
$A \setminus B$	Differenz (A ohne B)
$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	Symmetrische Differenz 
A^c	Komplementär
$[a, b]$	Abgeschlossenes Intervall (d.h. inkl. a & b)
(a, b) bzw. $]a, b[$	Offenes Intervall (d.h. ohne a & b)

Mengenlehre:

- $\mathbb{N}$: natürliche Zahlen : $\{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{N}_0$: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{Z}$: ganze Zahlen : $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$: rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$: reelle Zahlen
- $\mathbb{C}$: komplexe Zahlen

$\{\} = \emptyset$: leere Menge

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Supremum, Infimum, Maximum & Minimum

$\sup(X) :=$ „kleinste obere Schranke" mit $\sup(\emptyset) := -\infty$
$\inf(X) :=$ „grösste untere Schranke" mit $\inf(\emptyset) := \infty$

$$\left.\begin{aligned} \max(X) &:= \sup(X) \\ \min(X) &:= \inf(X) \end{aligned}\right\} \text{existieren nur für (Teil-) geschlossene Intervalle}$$

Bsp: sei $X = [a, b)$. $\sup(X) = b$, $\inf(X) = a$. $\nexists \max(X)$ und $\min(X) = a$
Sei $X = (-\infty, \infty)$. $\sup(X) = +\infty$, $\inf(X) = -\infty$ $\nexists \max(X), \min(X)$.

Kardinalität: Sei X eine endliche Menge. Dann ist Card(X) die # Elemente, welche die Menge X enthält. $\mathrm{Card}(X) \in \mathbb{N}_0$.

Eigenschaften: $\mathrm{Card}(X \times Y) = \mathrm{Card}(X)\,\mathrm{Card}(Y)$
$\mathrm{Card}(X \cup Y) + \mathrm{Card}(X \cap Y) = \mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(Y)$

Binomialkoeffizienten:

- Allgemeine Def: $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{C})$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

- Def. aus der Kombinatorik: $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $n \geq k)$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

wichtige Eigenschaft: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

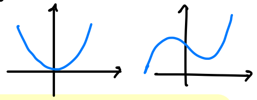
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

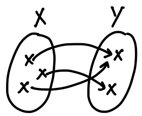
Mitternachtsformel: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Partialbruchzerlegung: (Kochrezept):

Surjektivität, Injektivität, Bijektivität:

Surjektiv: " mindestens 1" x zu $f^{-1}(y)$

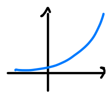




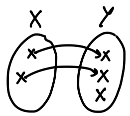
→ auf $[0, \infty)$
→ Graph muss ganze Bildmenge "schneiden"

$\forall y \in Y \; \exists x \in X$ mit $f(x) = y$

Injektiv: " höchstens 1" x s.d. $y = f(x)$

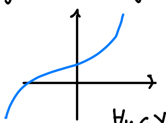


↳ streng monoton steigend / fallend → injektiv
↳ "Jede Horizontale schneidet den Graphen genau 1×."



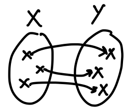
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Bijektiv: Surjektiv & Injektiv



genau 1

$\forall y \in Y \; \exists! x \in X : f(x) = y$



Eigenschaften von Funktionen bezüglich surj. & inj:

Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$.

- f und g surjektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ surjektiv
- f und g injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ injektiv
- $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv
- $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv

ABER:
- g surjektiv $\not\Rightarrow$ $g \circ f$ surjektiv
- f injektiv $\not\Rightarrow$ $g \circ f$ injektiv

Sei $g \circ f = \mathrm{id}_X$.
dann ist:
- f injektiv
- g surjektiv.
- $f \circ g \neq \mathrm{id}_Y$

Partialbruchzerlegung, Kochrezept: → nützlich für Ableitungen & Integrale

Sei $P_n(x)$ Polynom n-ten Grades und $Q_m(x)$ Polynom m-ten Grades und $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

1) Falls $n > m$: Polynomdivision (mit Rest) (→ ganzrational + echt gebrochen)
2) NST von $Q_m(x)$ berechnen
3) NST ihrem Partialbruch zuordnen:
   - reelle r-fache NST x_0: $\frac{A_1}{(x-x_0)} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_0)^r}$
   - komplexe r-fache NST : $z_0 = a + ib$

   Polynom mit den nicht reellen NST → $\frac{A_1 x + B}{(x^2 + 2ax + b)} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + 2ax + b)^2} + \dots + \frac{A_r x + B_r}{(x^2 + 2ax + b)^r}$
4) Gleichung aufstellen
5) Trick: NST einsetzen → Zähler einfacher NST. bzw. höchster NST berechnen
6) Koeffizientenvergleich

Der limes Supremum: Sei a_n eine beschränkte Folge.

$\forall n \in \mathbb{N}$, definiere: $b_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\} = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

$\Rightarrow$ d.h. $b_0 = \sup\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$
$b_1 = \sup\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
$b_2 = \sup\{a_2, a_3, a_4, \dots\}$
$\vdots$

dann ist $\boxed{\lim_{n \to \infty} b_n = \limsup_{n \to \infty} a_n}$

Induktionsbeweis, Kochrezept: z.z: Aussage $A(n)$ ist wahr $\forall n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$

1) Induktionsverankerung: Beweise $A(n_0)$ direkt (meistens $n_0 = 1$ (oder $n_0 = 0$))
2) Induktionsannahme: Annehmen, dass $A(n)$ für ein $n \geq n_0$ gilt
3) Induktionsschritt: Beweise $A(n+1)$ mit der Induktionsvoraussetzung. Daraus folgt dann $A(n)$ gilt $\forall n \geq n_0$:)

Folgen mit k Häufungspunkten konstruieren:

$$a_n^{(k)} = \begin{pmatrix} \cos\left(n \frac{2\pi}{k}\right) \\ \sin\left(n \frac{2\pi}{k}\right) \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

∞ viele Häufungspunkte:

$$a_n^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \cos(n \cdot 2\pi\alpha) \\ \sin(n \cdot 2\pi\alpha) \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

2. Folgen

Basics: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

Konvergenzverhalten von Folgen

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \rightarrow$ Folge ist konvergent.

Berechnen von Grenzwerten:

- Dominanz → siehe nächste Seite
- Brüche: Durch die grösste / kleinste Potenz des Zählers / Nenners teilen
- Wurzelterme: mit der 3. binomischen Formel erweitern
- Sandwich-theorem: Falls a_n monoton steigend / fallend: Suche eine untere & obere Schranke $c_1(n) < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $c_2(n) \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_1(n) = \lim\limits_{n\to\infty} c_2(n) = c$

  Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
- a_n ist Monoton fallend / steigend & besitzt untere / obere Schranke $\Leftrightarrow$ konvergenz

3. Reihen:

Geometrische Reihe: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$ $q \in \mathbb{C}$ $|q| < 1 \rightarrow \boxed{a_0 \sum_{n=0}^{N} q^n = a_0 \frac{1-q^{N+1}}{1-q}}$

allg. harmonische Reihe: (Dirichlet-Reihe) (Riemannsche ζ-Fkt.) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}}$ $\begin{cases} \text{konvergiert für } s > 1 \\ \text{divergiert für } s \leq 1 \end{cases}$

Potenzreihe: allg. Form: $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n}$ mit x_0: Entwicklungspkt.

Konvergenzradius: Sei R der Konvergenzradius einer Potenzreihe. Dann konvergiert die Reihe absolut $\forall x \in \mathbb{C}$, $|x-x_0| < R$ und divergiert $\forall x \in \mathbb{C}$, $|x-x_0| > R$

↳ $R = \frac{1}{Q} = \frac{1}{L}$ (aus Quotienten- bzw. Wurzelkriterium

↳ Rand $|x-x_0| = R$ muss separat betrachtet werden.

↳ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ → nur a_n anschauen.

binomische Reihe: $\boxed{(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k}$ $\alpha \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$

↳ Konvergenz falls $x > 0$ und $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$

9.3 Das Cauchy-Produkt für Potenzreihen

Seien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien $\rho_1 > 0$ und $\rho_2 > 0$. Für alle $|x| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$ darf man die zwei Potenzreihen miteinander multiplizieren. Dabei gilt die folgende Formel

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m x^m b_{n-m} x^{n-m} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \right) x^n,$$

welche als *Cauchy-Produkt* bekannt ist. z.B. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} z^j z^{n-j}$ $\forall |z| < 1$

Konvergenzkriterien:

1) **Nullfolgenkriterium:** a_n bildet keine Nullfolge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert

↳ auch bei alternierenden Reihen!

2) **Leibnitzkriterium:** a_n monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

3) **Majorantenkriterium:** Es seien $a_n, b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n \ \forall n$ ab einem gewissen n_0. Dann gilt:

Konvergenz zeigen: $\sum_n a_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum_n b_n$ konvergiert.

4) **Minorantenkriterium:** Sei $\sum_n b_n$ eine div. Reihe und a_n die Elemente einer Folge mit $a_n \geq b_n \ \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, so divergiert auch die Reihe

Divergenz zeigen: $\sum_n a_n$ (meistens : $\sum_n b_n$ ist die harmonische Reihe)

4) **Quotientenkriterium:** $\boxed{Q = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{divergiert} & Q > 1 \\ \text{konvergiert} & Q < 1 \\ \text{keine Aussage} & Q = 1 \end{cases}$

↳ geeignet für $n!$, a^n, Polynome

↳ hinreichend, aber nicht notwendig.

5) **Wurzelkriterium:** $\boxed{L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{divergiert} & L > 1 \\ \text{konvergiert} & L < 1 \\ \text{keine Aussage} & L = 1 \end{cases}$

↳ geeignet für $a_n = (b_n)^n$

6) **Kriterium von Raabe:** nützlich wenn Quotientenkriterium scheitert :)

Sei a_n eine Folge pos. Zahlen und sei $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Wenn $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) =: \alpha$ und $\alpha \neq 1$, so gilt für $\sum_n a_n$:

- $\alpha < 1 \Rightarrow$ Divergenz
- $\alpha > 1 \Rightarrow$ Konvergenz

7) **Integralkriterium:** Bedingungen: $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ erfülle: ① $a_n \geq 0$ ② a_n monoton fallend

setze $a_n = f(n)$

Dann gilt: $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow \int_p^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert

Ferner gilt i.A: $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n \leq \int_p^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=p}^{\infty} a_n$

8) **Vergleichskriterium:** Seien $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei Reihen mit $a_n, b_n > 0$. Wenn $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in [0, \infty]$, dann haben die Reihen dasselbe Konvergenzverhalten.

9) **mit Definition:** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$

Vorgehen: allg. Formel für S_N finden → $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_N \Leftrightarrow$ Reihe konvergiert

10) **absolute Konvergenz:** abs. Konv. → Konv.

auch Umkehrschluss: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abs. konv. $\Rightarrow a_n$ ist Nullfolge

11) **Cauchy-Kondensationssatz:** Sei $a_n \geq 0$ und monoton fallend.

Dann: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent

↳ n durch 2^n ersetzen, das allg. Glied mit 2^n multiplizieren.

↳ besonders geeignet wenn $\log(n)$ vorkommt : $\log(n) \xrightarrow[n \to 2^n]{} n\log(2)$

12) **Taylor der Retter**

4. Funktionen

Tipps & Tricks bei der Grenzwertberechnung:

- **Dominanz:** $\log(n) < n^k < \frac{1}{a^n}$, $a^n < n! < n^n$ $\forall k \in \mathbb{N}_0, a \in \mathbb{R}$

  Bsp. $\log(n) \leq \sqrt[\alpha]{n}$ $\forall n > n_\alpha$

  $\frac{1}{\log(n)} > \frac{1}{n^k} > \frac{1}{a^n}$, $a^n > \frac{1}{n!} > \frac{1}{n^n}$

  ausserdem: für $x \to +\infty$: $\dots < \log(\log(\log(x))) < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < e^x$, $\alpha^x < x! < x^x$

  für $x \to 0^+$: $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$
- **Brüche:** Durch die grösste / kleinste Potenz des Zählers / Nenners teilen (grösste: $x \to \infty$, kleinste: $x \to 0$)
- **Sandwich-Theorem**
- **Wurzeltrick bei Wurzelterme** (→ Erweiterung mit 3. bin. Formel)
- **Beträge:** Vereinfachung durch überlegen ob Arg > 0 oder < 0 ist
- **Beschränktheit der Fkt. ausnutzen** z.B. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
- **Der $e^{\log(x)}$-Trick**
- **Die Regel von Bernouilli de l'Hôpital:** $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}} = \dots = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$

  ↳ für Grenzwerte der Form $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

  ↳ falls $0 \cdot \infty \rightarrow$ Umwandeln in $\frac{\infty}{\infty}$, falls $\infty - \infty \rightarrow \frac{0}{0}$
- **Fundamentallimes** (in diese Formen versuchen umzuformen)

  ① $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

  $\Rightarrow$ i.A: $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \left(1 + \frac{1}{\Theta}\right)^\Theta = e}$ $\forall \Theta(x) \to \infty$ für $x \to a$

  $\lim\limits_{\Theta\to\infty} \left(\frac{\Theta+1}{\Theta}\right)^\Theta = e$ $\boxed{\lim\limits_{x\to a} (1 + \Theta)^{\frac{1}{\Theta}} = e}$ $\forall \Theta(x) \to 0$ für $x \to a$

  ② $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (Beweis: Sandwich-Theorem mit kleiner Trick)

  $\Rightarrow$ i.A. $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin\Theta}{\Theta} = 1}$ $\forall \Theta(x) \to 0$ für $x \to a$
- **Taylorpolynome:** (hier um $x = 0$)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$
$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \cdots$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots.$$

- **Substitution:** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$ mit $u_0 = \lim\limits_{x\to x_0} u(x)$

  z.B. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{u\to\infty} -ue^{-u} = 0$ $\begin{cases} u(x) = -\ln(x) \rightarrow x = e^{-u} \\ u_0 = \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln(x) = \infty \end{cases}$

  Sei $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. dann: $f(x) \to g(u)$, $u \to u_0$ wobei $u_0 = \lim\limits_{x\to x_0} u(x)$

  Dann: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{u\to u_0} g(u)$
- **mittels bekannte Grenzwerte**
- **in Potenzreihe umwandeln**

Sammlung nützlicher Folgen & Reihen:

Grenzwerte von Folgen

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{Q}^+$
- $\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \forall q \in \mathbb{C} \quad |q|<1$
- $\lim \frac{1}{a^n} = 0$ für $|a|>1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |z|>1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} = 0$ für $n>1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^k} = 0$ für $k>0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ für $k>0$ und $|a|>1$
- $\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$ für $k>0$ und $|a|>1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n n!} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Es gilt $(1+1/n)^n < e$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Funktionenfolgen, Grenzwerte:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(ax)} = \frac{1}{a}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(x)} = a$
- $\lim_{x\to\infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a}$
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)}{x} = \mp\infty$
- $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^x = e^{-1}$
- $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$
- $\lim_{x\to\infty} x^a \cdot \ln^b(x) = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$
- $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e^2}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))}{x} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(1+x)} = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(x)} = 2$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$, wenn $a<b$

Riemannsche Summen:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Reihen:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (Mengoli-Reihe)
- $a_n = 1;\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \longrightarrow a_n \approx \sqrt{x}$
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
- $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
- harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to$ divergent (Riemann'sche ζ-Fkt. mit $s=1$)
- geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x|<1$ ← KomA Laurent
- Potenzreihe: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$
- Riemann'sche ζ-Funktion: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konvergiert} & \text{für } s>1 \\ \text{divergiert} & \text{für } s\leq 1 \end{cases}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} \to$ alternierende harm. Reihe → konvergiert.
- Exponentialfunktion: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Potenzreihen (Alle Reihen um $|x|<1$ oder $|x|<a$)

Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$
- $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$
- $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$
- $\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = \frac{1}{a}\cdot\left(1 + \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \ldots\right)$

Integrale / Ableitungen der geom. Reihe:

- $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$
- $\frac{1}{(x-a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{n+2} (n+1)x^n = \frac{1}{a^2} + \frac{2x}{a^3} + \frac{3x^2}{a^4} + \ldots$
- $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right)$
- $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$
- $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} x^n ((1+n)(2+n)) = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots$
- $\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} x^n (-1)^n (1+n)(2+n) = 1 - 3x + 6x^2 - \ldots$

Binomische Reihe: $(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k \quad \alpha \in \mathbb{C},\ x,y \in \mathbb{R}$ ← Konv. falls $x>0$ & $\left|\frac{y}{x}\right|<1$

- $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$
- $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots$
- $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots$

Teleskopsummen: $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$

Arithmetische Summe: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Beweis: Induktion)

Fakultät: $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot \cdots \cdot n$, $0! := 1$

Gammafunktion: $\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt$

$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$

Weitere wichtige Potenzreihen: ($\hat{=}$ Taylorreihe, um den Nullpkt. entwickelt)

- $e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^3}{3!} + \ldots$
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots$
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots$
- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$
- $\sin^2(x) = \frac{2^1}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 \mp \ldots$
- $\cos^2(x) = 1 - \frac{2^1}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 \pm \ldots$
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$
- $\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \pm \ldots \quad \to 0<x<2$
- $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$

→ diese Fkt. sind analytisch (dh. TR $\hat{=}$ Fkt.)

Bem: ∞-liches Taylorpolynom = Taylorreihe

Vereinfachungen:

- $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{(x-1)}{3}\right)} = \frac{1}{3}\cdot\left(1 - \frac{(x-1)}{3} + \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 - \ldots\right)$
- $\frac{1}{(x-3)^2} = \frac{d}{dx}\frac{-1}{x-3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{3-x}$
- $\ln(x) = \ln(x+1-1) = \ln(1+(x-1))$
- $e^x = e\cdot e^{x-1}$
- $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n}\,dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$
- $\int_0^{\pi/2} \sin(x)^{2n}\,dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$
- $(a^5 - b^5) = (a-b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4)$
- $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = (a+1)\cdot(a^4 + a^2 + 1) = (a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Binomischer Entwicklungssatz: $(x+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^{\alpha-n} y^n \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad x,y \in \mathbb{R}$

↳ Konvergenz, falls $x>0$ und $\left|\frac{y}{x}\right|<1$

Grenzwert, Rechenregeln

Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Dann:
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a\cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

Stetigkeit

▸ **Epsilon-Delta-Kriterium:**

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x \in \mathbb{R}: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Kochrezept:
1. mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ beginnen → finde Ausdruck s.d. $|f(x)-f(x_0)| \leq \dots |x-x_0| < \dots \varepsilon$
2. setze ein $|x-x_0|<\delta$
3. $|f(x)-f(x_0)| \leq \dots |x-x_0| < \dots \delta \dots < \varepsilon$
4. Benutze $\dots \delta \dots < \varepsilon$ um $\delta(x_0, \varepsilon)$ zu finden
5. Zeige, dass wirklich $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

▸ **Grenzwert-Kriterium:**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \overset{!}{=} f(x_0)$$

▸ **Komposition stetiger Funktionen** $(+, -, *, /$ (falls nicht $/0$))
- Polynome
- Exponentialfunktion
- Logarithmusfunktion für Arg. >0
- Rationale Funktionen, wobei Nenner $\neq 0$
- trigonometrische Funktionen
- hyperbolische Funktionen

▸ **Stetigkeit überprüfen:**

$\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$ $x \in \mathbb{R}^n$ und dieser ist eindeutig

1 Dim: rechter & linker Grenzwert berechnen → $\exists$ & eindeutig?

z.B. $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x<p \\ f_2(x) & x>p \\ a & x=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to p^-} f_1(x) \overset{!}{=} \lim_{x\to p^+} f_2(x) \overset{!}{=} a$

n Dim:
- falls $n=2$: Transformiere x und y in Polarkoord. → φ muss sich rauskürzen beim Grenzwert (sonst lim nicht eindeutig).
- falls $n>2$: nur benutzen um zu zeigen dass lim nicht eindeutig ist (sonst zu kompliziert)

▸ **Lipschitz-Stetigkeit:** (L-stetige Fkt. sind insbesondere stetig).

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \quad L \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

▸ **Gleichmässige Stetigkeit:**

$f: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst gleichmässig stetig auf Ω, falls $\forall \varepsilon>0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)>0$ s.d. $\forall x,y \in \Omega$ mit $|x-y|<\delta$ es gilt $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Bem: ε hängt nur von ε ab und nicht mehr von x,y!

⚠ Stetigkeit auf Kompaktraum ($f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω kompakt) $\Rightarrow$ f gleichmässig stetig.

Satz: Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ eine Fkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ $\forall x \in D$ (ε-δ-Kriterium)

ii) $\forall (x_n)_{n=0}^\infty$ in D, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in D$, gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ (Folgenstetigkeit)

iii) $\forall U \subseteq \mathbb{R}$, offen, ist das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq D$ offen

↳ (topologische Stetigkeit: Def. der allg. Stetigkeit. → zeigen in Räume wo $\nexists$ Metriken)

Zusammenhang der (Stetigkeits-) Begriffe:

$$\begin{tikzcd}
f \text{ lipschitz-stetig} \arrow[d] & \\
f \text{ gleichmässig stetig } (\delta \text{ hängt nur von } \varepsilon \text{ ab}) \arrow[d] & f \text{ diffbar} \arrow[ul, bend right, "\text{Ableitung beschränkt}"'] \\
f \text{ stetig} \arrow[u, bend left=60, "{f: \Omega\to\mathbb{R},\ \Omega \text{ kompakt}}"] &
\end{tikzcd}$$

Folgen stetiger Funktionen:

Folge $f_n: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f_n stetig auf Ω $\forall n$.

Punktweise Konvergenz:

$f_n: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert punktweise gegen $f(x)$, falls $\forall x \in \Omega$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$

Gleichmässige Konvergenz:

$f_n: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig gegen f, falls

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x)-f(x)| = 0}$$

Bem:
- Falls f_n gleichmässig gegen f konvergiert $\Rightarrow$ f stetig
- Umgekehrt: punktweiser limes f von f_n unstetig $\Rightarrow$ f_n konvergiert nicht gleichmässig gegen f.
- gleichmässige Konvergenz $\Rightarrow$ punktweise Konvergenz

Satz von Dini: Sei $f_n: \Omega \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ eine Folge stetiger Fkt. mit punktweisem limes f und sei Ω kompakt. Ist f stetig und f_n monoton wachsend, so konv. f_n gegen f gleichmässig.
↳ d.h. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $\forall x \in \Omega$

Kochrezept für gleichmässige Konvergenz:

Geg: Folge stetiger Funktionen $f_n: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Ges: Konvergiert f_n auf Ω gleichmässig?

1. punktweiser limes von f_n auf Ω berechnen: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für fixes $x \in \Omega$
2. f_n auf gleichmässige Konvergenz prüfen.
   - **direkt:** 1) $\sup_{x\in\Omega} |f_n(x)-f(x)|$ Wie?: $\frac{d}{dx}|f_n(x)-f(x)| \overset{!}{=} 0$
     2) bilde limes für $n\to\infty$: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x)-f(x)| \overset{!}{=} 0$
     $\Rightarrow$ dann ist f_n auf Ω gleichmässig konvergent.
   - **indirekt:**
     - f unstetig $\Rightarrow$ keine gleichmässige Konvergenz
     - f stetig, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $\forall x \in \Omega$ und Ω kompakt $\Rightarrow$ gleichmässige Konvergenz.

Reihen stetiger Funktionen:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $f_n: \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen.
Die Folge der Partialsummen $S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$ ist eine Folge stetiger Funktionen.

punkweise Konvergenz von $S_N(x)$ auf Ω:

$$\exists\ \boxed{\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^\infty f_n(x)} \quad \forall x \in \Omega$$

Symbol: $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$

gleichmässige Konvergenz von $S_N(x)$ auf Ω:

$\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \geq N$ und $\forall x \in D_f$: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

konkret:

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \left| \sum_{n=0}^N f_n(x) - \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \right| = 0} \text{ bzw. } \boxed{\lim \sup |f_n(x)-f(x)| = 0}$$

Funktion, gegen die die Reihe konv.

z.B. $f_n(x) = (x-\frac{1}{2})^n$ auf $x \in [0,1]$

$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup |(x-\frac{1}{2})^n - 0| =$
$= \lim_{n\to\infty} \sup |(x-\frac{1}{2})^n| = 0 \to$ gleichm. konv.

↳ nachweisen: **Weierstrass-Kriterium:** Sei $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ eine Reihe stetiger Funktionen. Nehme an, $\exists$ eine Folge $M_n \geq 0$ mit:

1. $|f_n(x)| \leq M_n$ $\forall x \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$
2. Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty M_n$ konvergiert

$\Rightarrow$ dann konvergiert $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ gleichmässig auf Ω.

↳ doch wie M_n bilden? → $M_n = \sup_{x\in\Omega} |f_n(x)|$ wählen

dann: $\sum_{n=0}^\infty \sup_{x\in\Omega} |f_n(x)|$ konv. $\overset{\text{Weierstrass}}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ konvergiert gleichmässig

Satz: Sei $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho>0$. Dann ist $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ $\forall R<\rho$ auf $[-R,R]$ gleichmässig konvergent.

Normale Konvergenz: nicht gross angeschaut, aber:

normale Konvergenz $\Rightarrow$ lokal gleichmässig konvergent

Sei $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ eine Funktionenreihe.

Falls $\sum_{n=0}^\infty \|f_n\| := \sum_{n=0}^\infty \sup_{S} |f_n(x)| < \infty$, dann konvergiert die Reihe normal.

punktweise Konvergenz
gleichmässige Konvergenz
normale Konvergenz
↓ stärker

5. Differenzialrechnung in $\mathbb{R}$

Eindimensionale Differentialrechnung:

Fkt. heisst diffbar (im Punkt x_0) falls:

$$\boxed{\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$$

und dieser ist eindeutig.

Ableitungsregeln: Sei $f, g \in C^1$. Dann:

- Addition / Substraktion: $(\alpha f(x) \pm \beta g(x))' = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x)$
- Produktregel: $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
- Quotientenregel: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- Kettenregel: $(f\circ g)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$
- Umkehrregel: $(f^{-1}(x))'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Bem: Differenziation ist eine lineare Operation.

↳ Wichtige Ableitungen siehe Anhang

Taylorentwicklung in 1 Dim:

Taylorpolynom: $T_N f(x;x_0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{(x-x_0)^{N+1}\cdot R_N(x)}_{\text{Fehler}}$

(im Pkt. x_0 entwickelt)

Fehlerabschätzung: $R_N(x;x_0) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1} \quad \xi \in [x_0, x]$

↳ das Lagransche Restglied

N.. Grad vom Taylorpolynom.

Taylorreihe: $T_f(x;x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Bem: falls Taylorreihe = Potenzreihe: Fkt. ist analytisch & $T_f(x;x_0) = f(x)$

Linearisierungen:

Tangente an $f(x)$ im Punkt (x_0, y_0):

$$\boxed{y(x) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)}$$

Tangentialebene an $f(x)$ im Punkt (x_0, y_0):

$$\boxed{z = t(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

3D-Parameter:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix} + \alpha\cdot\nabla\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \qquad \vec{n}_E = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fehlerfunktion: $\boxed{\varphi(x) = f(x) - [f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)]}$

Berührungspunkt von 2 Funktionen: Seien $F_1(x,y)$ und $F_2(x,y)$ 2 Funktionen, die sind im Punkt x_0, y_0 berühren. Dann:

$$F_1(x_0,y_0) = F_2(x_0,y_0) \quad \text{und} \quad \nabla F_1(x_0,y_0) = \lambda \nabla F_2(x_0,y_0)$$

6. Mehrdimensionale Differentialrechnung:

Richtungsableitung: (→ ist eine partielle Ableitung.)

an dieser Stelle — in dieser Richtung

$$\boxed{D_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+h\cdot\vec{v}) - f(\vec{x})}{h}}$$

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .. Richtung

Differenzierbarkeit: Sei $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $\vec{x}, \vec{x}_0 \in U$ Vektoren und $Jf(\vec{x})$ eine lineare Abbildung. Die Fkt. (SF) $f: U \to \mathbb{R}$ ist (total) diffbar in $\vec{x}_0$, falls folgender Grenzwert existiert & eindeutig ist:

$$\boxed{0 \overset{!}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \overbrace{Jf(x_0)}^{\text{Jacobi-Matrix}}\cdot(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Jf(x_0)\cdot h}{\|h\|}}$$

↳ x, x_0, h sind Vektoren.

h.. kleine Änderung

Gradient:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Beziehung zum VF:

$$\lambda f = \partial_{x_1} f(x)\, dx_1 + \partial_{x_2} f(x)\, dx_2 + \dots + \partial_{x_n} f(x)\, dx_n \rightleftarrows V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \partial_{x_2} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix}$$

Umwandlung in Vektorfeld und umgekehrt

Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix):

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Hesse-Matrix: (bei SF: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

i-te Zeile, j-te Spalte

← ist immer quadratisch & symm. (wegen Satz von Schwarz)

Implizite Differentiation: Falls die Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung $F(x, f(x)) = 0$ erfüllt & es gilt $F_y(x_0, y(x_0)) \neq 0$, dann ist die Ableitung von f:

$$\boxed{f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}}$$

F_i = part. Abl. von F nach i

Bsp: $F(x,y) = x - 2y^3 - 3y^5 - y = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -6y^2 - 15y^4 - 1 \quad \to \quad y'(x) = \frac{1}{6y^2 + 15y^4 + 1}$

Bem: Falls f mehrdimensional → implizites Funktionentheorem

Diffbarkeit zeigen, Kochrezept:

↳ Komposition von diffbaren Funktionen ist diffbar

⇒ meistens muss man nur einen Pkt x_0 auf diffbarkeit überprüfen

1) Part. Ableitungen im Punkt x_0 über Def. berechnen
   $\nexists$ part. Ableitungen ⇒ Funktion ist nicht (total) diffbar
2) $\exists$ part. Ableitungen und diese sind stetig ⇒ Fkt. (total) diffbar
3) lin. Abb. $Jf(x_0)$ im Pkt. x_0 berechnen
4) $Jf(x_0)$ in Def. der Diffbarkeit einsetzen & Grenzwert berechnen
   Fkt. ist (total) diffbar in x_0 falls Def. erfüllt ist.

Allgemeine Kettenregel: Seien $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ und $g: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ diffbare Funktionen. Dann ist die Ableitung von $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h = g\circ f$ im Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch:

$$\boxed{D(g\circ f)_p = Dg_{f(p)} \circ Df_p}$$

$$\boxed{J_{g\circ f}(p) = J_g(f(p))\cdot J_f(p)} \quad \text{und} \quad \boxed{J_{f\circ g}(p) = J_f(g(p))\cdot J_g(p)}$$

Taylorentwicklung:

Taylorpolynom 2. Ordnung:

$$\boxed{T_2 f(x,a) = f(a) + \nabla f(a)^T (x-a) + \tfrac{1}{2}(x-a)^T H_f(a)(x-a)}$$

Taylorpolynom n-ter Ordnung: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\boxed{T_n f(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x)\Big|_{x=a}}$$

Bem:
- $\Delta x_i = x_i - a_i$
- zuerst ableiten, dann am Pkt. a auswerten!

mehrdimensionale Diffbarkeit, Zusammenhang der Begriffe:

Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \Omega$. Dann gilt i.A:

- f stetig diffbar ⇒ f diffbar ⇒ f partiell diffbar ⇒ f stetig
- f partiell diffbar in x_0 ⊕ part. Abl. an x_0 stetig ⇒ f diffbar in x_0
- f partiell diffbar in x_0 ⊕ part. Abl. sind in Umgebung von x_0 stetig ⇒ f stetig diffbar in x_0
- Bem zur Not.: Meistens: diffbar = total diffbar

Wann genau ist jetzt eine Fkt. (total) diffbar?

- Eine Funktion ist total diffbar, falls sie in jedem Pkt. ihres $\mathbb{D}$ total diffbar ist.

Stärker

1. stetig partiell diffbar
2. total diffbar
3. $\exists$ alle Richtungsableitungen
   ↳ d.h. $\exists$ part. Ableitung in jede beliebige Richtung
4. partiell diffbar (in Richtung der Basisvektoren)

Schwächer

$\begin{cases} \text{diffbar} \Rightarrow \text{stetig} \\ \neg\,\text{stetig} \Rightarrow \neg\,\text{diffbar} \end{cases}$

Merksatz:

⚠ $\exists$ alle part. Ableitungen von f in Richtung der Koordinatenachsen in einer Umgebung eines Punktes x_0 (inkl. x_0) und sind die partiellen Ableitungen stetig, dann ist f dort auch (total) diffbar

7. Gewöhnliche Differenzialgleichungen:

7.1 Separierbare Differentialgleichung: (Trennung der Variablen)

DGL mit folgender Form: $y' = p(y)\,q(x) \rightarrow \int \frac{1}{p(y)}\,dy = \int q(x)\,dx$

→ Integrale lösen → implizite Gleichung y (explizite Darstellung von y schwierig (Lösungsmenge verändern ⚡))

Bsp: $yy'+2=0 \rightarrow \int y\,dy = \int -2\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -2x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{-4x + C_2}$ //

7.2 Lineare Differentialrechnung

Eine lineare DGL der n-ten Ordnung hat die Form:

$$a_0 y^{(0)} + a_1 y^{(1)} + \dots + a_n y^{(n)} = q(x)$$

↳ $q(x)$: Inhomogenität

↳ DGL ist linear ⇒ Lö: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

↳ $y_h(x)$: homogene Lösung, $y_p(x)$: partikuläre Lösung

6.2.1 Homogene Lösung ($q(x)=0$) (Kochrezept):

1) Setze Inhomogenität $=0$ → $a_0 y^{(0)} + \dots + a_n y^{(n)} = 0$
2) Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$ → $\mathrm{Chp}(\lambda) = a_0\lambda^0 + \dots + a_n\lambda^n = 0$
3) NST in Ansatz einsetzen: 3 Fälle:
   - λ_i ist k-fache reelle NST:
     ↳ $y_i(x) = x^0 e^{\lambda_i x}, \dots, y_{i+k}(x) = x^{k-1} e^{\lambda_i x}$
   - λ_i und λ_j sind reelle, betragsmässig gleiche NST ($\lambda = \pm a$):
     ↳ $y_i(x) = \cosh(ax)$, $y_j(x) = \sinh(ax)$
   - λ_i und λ_j sind komplexe NST (→ konjugiert zueinander) ($\lambda = a \pm bi$):
     ↳ $y_i = e^{ax}\cos(bx)$, $y_j(x) = e^{ax}\sin(bx)$
4) einzelne Teillösungen zusammensetzen ($C_i \in \mathbb{R}$):

$$\boxed{y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)}$$

6.2.2 partikuläre Lösung (Kochrezept): 3 Möglichkeiten:

① Ansatz vom Typ der rechten Seite: → nicht in VL gezeigt.

Bed: $q(x)$ muss folgende Form haben ($\mu \in \mathbb{R}$):

$$\boxed{q(x) = (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)e^{\mu x}}$$

dann ist der Ansatz für die part. Lösung:

$$\boxed{y_p(x) = \begin{cases} \dfrac{b_0}{\mathrm{Chp}^{(k)}(\mu)}\, x^k e^{\mu x} & \text{falls } m = 0 \\ (C_0 + \dots + C_m x^m)\, x^k e^{\mu x} & \text{falls } m \neq 0 \end{cases}}$$

wobei k: Ordnung der NST von λ, falls $\lambda = \mu$

μ, k von der Inhomogenität ablesen.

falls $m \neq 0$: Ansatz für $m \neq 0$ in DGL einsetzen & Koeffizientenvergleich:
→ Koeffizienten $C_0, \dots, C_m$ berechnen

Bem: i) Falls Inhomogenität $q(x) = q_1(x) + \dots + q_r(x)$ besteht aus mehreren Termen: die einzelnen Lö der Terme berechnen & diese dann zusammenaddieren: $y_p(x) = y_1(x) + \dots + y_r(x)$

ii) $q(x)$ kann man auch komplexifizieren: $q(x) = \cos(x) \rightarrow \mu = i$
für die part. Lö. gilt dann: $y_p(x) = \mathrm{Re}(z_p(x))$ oder $\mathrm{Im}(z_p(x))$.

② Variation der Konstanten:

1) folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(0)} & \cdots & y_n^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{bmatrix}$$

2) Integrale ausrechnen (Konstanten nicht vergessen!):

$$U_i = \int u_i(x)\,dx$$

3) Lösung für die inhomogene Gleichung bilden:

$$\boxed{y(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i(x)\, y_i(x)}$$

Bem: $y_i(x)$: Einheitsvektoren des n-dim. Lösungsraum der DGL (ohne Konstanten)

Bsp: $y''(x) + y = \frac{1}{\cos(x)}$ → $y_h(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$

1) $\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}, \quad u_2 = 1$

2) $U_1 = \int -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \ln|\cos(x)| + C_1$

$U_2 = \int 1\,dx = x + C_2$

3) $y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + \ln|\cos(x)|\cos(x) + x\sin(x)$

③ Ansatztabelle:

Störfunktion $b(x)$	**Ansatz**
$b(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$	$y_p(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m$ falls 0 keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. $y_p(x) = x^k(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ falls 0 eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.
$b(x) = e^{\alpha x}(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$	$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ falls α keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. $y_p(x) = x^k e^{\alpha x}(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ falls α eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.
$b(x) = \cos(\beta x)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$ $b(x) = \sin(\beta x)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$	$y_p(x) = \cos(\beta x)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ $+ \sin(\beta x)(B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)$ falls $i\beta$ keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. $y_p(x) = x^k\cos(\beta x)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ $+ x^k \sin(\beta x)(B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)$ falls $i\beta$ eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.
$b(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$ $b(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$	$y_p(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ $+ e^{\alpha x}\sin(\beta x)(B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)$ falls $\alpha + i\beta$ keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. $y_p(x) = x^k e^{\alpha x}\cos(\beta x)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ $+ x^k e^{\alpha x}\sin(\beta x)(B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)$ falls $\alpha + i\beta$ eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.

- **Ansatztabelle**
  Man muss den richtigen Anstatz für $y_p(x)$ finden

Rechte Seite $q(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
Ce^{ax} $C\cos(bx)$ $C\sin(bx)$ $C\cos(bx)e^{ax}$ $C\sin(bx)e^{ax}$	Ae^{ax} $A\sin(bx) + B\cos(bx)$ $A\sin(bx) + B\cos(bx)$ $(A\sin(bx) + B\cos(bx))e^{ax}$ $(A\sin(bx) + B\cos(bx))e^{ax}$
$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)e^{ax}$	$A_n x^n + \ldots + A_1 x + A_0$ $(A_n x^n + \ldots + A_1 x + A_0)e^{ax}$
$(a_n x^n + \ldots + a_0)\sin(bx)$ $(a_n x^n + \ldots + a_0)\cos(bx)$ $(a_n x^n + \ldots + a_0)e^{ax}\sin(bx)$ $(a_n x^n + \ldots + a_0)e^{ax}\cos(bx)$	$(A_n x^n + \ldots + A_0)\sin(bx)$ $+(B_n x^n + \ldots + B_0)\cos(bx)$ $(A_n x^n + \ldots + A_0)\sin(bx)$ $+(B_n x^n + \ldots + B_0)\cos(bx)$ $(A_n x^n + \ldots + A_0)e^{ax}\sin(bx)$ $+(B_n x^n + \ldots + B_0)e^{ax}\cos(bx)$ $(A_n x^n + \ldots + A_0)e^{ax}\sin(bx)$ $+(B_n x^n + \ldots + B_0)e^{ax}\cos(bx)$

Setze den Ansatz für $y_p(x)$ in die Gleichung ein, und mache ein Koeffizientenvgl. um die Parameter A, B, A_n, B_n, ... in $y_p(x)$ zu finden → $y_p(x)$

Anmerkungen

i) Falls man zwei Störterme hat, also $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$, macht man zwei Ansätze und man bekommt zwei part. Lösungen $y_{p1}(x), y_{p2}(x)$

ii) Falls der Ansatz y_p ein Term hat, welcher bereits in $y_h(x)$ vorkommt, muss der Ansatz mit x multipliziert werden

Anfangswertproblem: Damit die Lö der DGL eindeutig ist:
n Anfangswerte für n Freiheitsgrade ⇒ Konstanten $C_1, \dots, C_n$ bestimmen:
↳ Anfangsbedingungen in die allg. Lö einsetzen & GS lösen

Bem: die Konstanten erst mit der kompletten Lö $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ bestimmen.

8. Extremwertberechnung:

8.1 Extremwerte ohne Nebenbedingungen in $\mathbb{R}$

1) Kandidaten: • Intervallgrenzen
• $f'(x) \overset{!}{=} 0$

2) Art von Extrema: • $f''(x_0) < 0$: (lokales) Maximum
• $f''(x_0) > 0$: (lokales) Minimum
• $f''(x_0)$ Vorzeichenwechsel bei x_0 : Sattelpunkt

3) Vergleiche lokale & globale Extrema

8.2 Extremwerte ohne Nebenbedingungen in $\mathbb{R}^n$

1) Kandidaten: $\nabla f(x_0) \overset{!}{=} 0$

2) Art von Extrema: • $H_f(x_0)$ negativ definit: Maximum
• $H_f(x_0)$ positiv definit: Minimum
• $H_f(x_0)$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Bem: • Falls $H_f(x_0)$ semipositiv/seminegativ definit → keine Aussage zur Art des Ext.
• Wenn $H_f(x)$ negativ definit ($\forall x \in D$) → f ist konkav
• Wenn $H_f(x)$ positiv definit ($\forall x \in D$) → f ist konvex

8.3 Extremwerte mit Nebenbedingungen ($x \in \mathbb{R}^n$)

Die Lagrange-Funktion:

$$\boxed{L(x,y) := f(x,y) - \sum \lambda_i \varphi_i}$$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$: Lagrange-Multiplikator

$f(x,y)$: die zu untersuchende Funktion; φ_i: NB, mit $\varphi_i^{-1}\{0\}$ = (Teil-) Rand

Kandidaten: $\boxed{\nabla L(\vec{x}_0) \overset{!}{=} \vec{0}}$

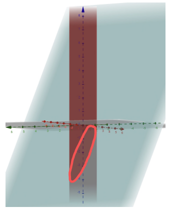
Kochrezept:

1) Nebenbedingungen zeichnen
2) Menge sollte abgeschlossen & beschränkt sein. → Dann $\exists$ Max / Min
Fkt. muss auf dem Bereich auch stetig sein!
3) Gradient berechnen
4) Kandidaten: i) innere Punkte: $\nabla f(x_0) \overset{!}{=} 0$ ($x_0 \in$ Menge)!
ii) Randpunkte: 2 Möglichkeiten:
• $\nabla L \overset{!}{=} 0$ → funktioniert nur für reguläre Pkte.
• Parametrisierung: $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \overset{!}{=} 0$ d.h. z.B. Eckpunkte gehen nicht
5) Gleichungssystem mit Nebenbedingungen lösen
6) Kandidaten der Extrema + Eckpunkte ($\nexists$ Ableitung) aufschreiben
7) Kandidaten in $f(x)$ einsetzen & vergleichen

Beispiel: $f(x,y,z) = 4y - 2z$, $\varphi_1 = x^2 + y^2 - 1$, $\varphi_2 = 2x - y - z - 2$

Rand ist $\varphi^{-1}\{0\}$
bzw. $\varphi_2^{-1}\{0\}$

1) NB zeichnen:



2) $f(x,y,z)$ ist stetig & Menge M ist beschränkt & abg. → $\exists$ Max / Min.

3) $\exists$ keine inneren Punkte als Kandidaten (↪ betrachten nur Rand der Ellipse)

$$\nabla\varphi_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla\varphi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4) GS aufstellen & lösen: $\nabla f = \lambda_1 \nabla\varphi_1 + \lambda_2 \nabla\varphi_2$

I: $0 = 2\lambda_1 x + 2\lambda_2$
II: $4 = 2\lambda_1 y - \lambda_2$
III: $-2 = -\lambda_2$

& die NB selber:
IV: $1 = x^2 + y^2$
V: $2 = 2x - y - z$

$\Rightarrow \lambda_1 = \pm\sqrt{13}$ $\quad \lambda_2 = 2$ $\quad x = \mp\frac{2}{\sqrt{13}}$ $\quad y = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}$ $\quad z = \mp\frac{7}{\sqrt{13}} - 2$

5) Punkte aufschreiben: $P_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-7}{\sqrt{13}} - 2\right)$
$P_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2\right)$

6) Punkte in f einsetzen & vergleichen:

$f(P_1) = \frac{26}{\sqrt{13}} + 4$
$f(P_2) = \frac{-26}{\sqrt{13}} + 4$

Somit ist P_1 ein Max. und P_2 ein Min.

Bem: • Falls Rand nicht durch NB darstellbar: Fkt. direkt für den Rand auswerten & Fkt.werte vergleichen
• Andere Möglichkeit: Rand parametrisieren & Parametrisierung in $f(x)$ einsetzen ⇒ wie gewohnt Ableitung davon $\overset{!}{=} 0$ setzen & Kandidaten berechnen

mittels Parametrisierung: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ die Parametrisierung $\gamma(t) = \dots$ des Randes. Dann sind die Kandidaten die Punkte, die $\boxed{\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = 0}$ erfüllen.

mittels Teilgebieten: $f(\vec{x})$ auf Teilgebiete auswerten und die Werte vergleichen und auf diese Weise die Extremalstellen bestimmen. z.B. wäre $f(x,y) = xy$ auf $\varphi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, 1 \leq y \leq 2\}$: $f|_{\varphi_1} = 0$

↪ hier so die Gebite definieren, sodass die Eckpunkte imbegriffen sind → so muss man sie nicht einzeln untersuchen :)

Potenziale:

↪ falls $\exists$, dann zugehörig zu einem VF. d.h. aus VF das zugehörige Pot. bestimmen.

Potential: ein Potential Φ zu einem VF $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Skalarfeld mit folgender Eigenschaft:

$$\boxed{V = \nabla\Phi}$$

→ Wegintegrale über VF mit Potential sind Wegunabhängig :)

→ Wenn ein VF ein Potential besitzt, heisst sie konservativ.

Satz: Sei $\lambda \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Es sind äquivalent:

i) $\exists f \in C^1(\Omega)$: $\lambda = df$ „$\exists$ ein Potential"

ii) 2 Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$: $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) \Rightarrow \int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda$ — Wegunabhängig

iii) $\forall$ geschl. Wege $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt $\int_\gamma \lambda = 0$

iv) falls $\exists$ Potential zu V: $\int_\gamma V\,ds = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0))$ für $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}$

v) λ ist dann konservativ.

↪ $\exists$ von Φ herausfinden:

Integrabilitätsbedingungen: $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$$

n=2 oder n=3 $\iff$ rot(V) = 0 "rotationsfrei"

Allgemeines Rezept zum finden von Potentialen: $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

① $\exists$ Potential? → 4 Fälle:
1) Ω einfach WZH & erfüllt die Int. Bed. ⇒ V besitzt ein Φ
2) Ω einfach WZH & erfüllt nicht die Int. Bed. ⇒ V besitzt kein Φ
3) Ω nicht einfach WZH & erfüllt nicht die Int. Bed. ⇒ V besitzt kein Φ
4) Ω nicht einfach WZH & erfüllt die Int. Bed. ⇒ keine Aussage.
↳ Aber: 2 Optionen: 1. finde γ geschl. mit $\int_\gamma \vec{V}\,d\vec{s} \neq 0 \Rightarrow$ kein Φ
2. gehe zu Schritt 2, finde Widerspruch oder Φ.

② Potential Φ finden: 1) V partiell nach 1 Variabe x_1 integrieren
→ $\Phi = \int V_1\,dx_1 + C(x_2, \dots, x_n)$
2) — nach x_i ableiten:
$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int V_1\,dx_1 + C(x_2, \dots, x_n)\right) \overset{!}{=} V_i$
→ so $C(x_2, \dots, x_n)$ bestimmen
3) Ergebnis ist $\Phi = \int V_1\,dx_1 + C(x_2, \dots, x_n)$

9. Integralrechnung in $\mathbb{R}$:

Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

9.1 Riemannsche Summen:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx}$$

mit Grenzen:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Bsp: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (akn + bn^2)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \sum_{k=0}^{n} (akn+bn^2)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{ak}{n} + b\right)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\,dx$

9.2 Partielle Integration:

$$\int_a^b \underset{\downarrow'}{f(x)}\, \underset{\uparrow'}{g(x)}\,dx = \big[f(x) \cdot G(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot G(x)\,dx$$

$f'(x)$ $G(x)$

9.3 Substitution:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{f(u)}{u'(x)}\,du \quad \text{mit} \quad \frac{du}{dx} = u'(x)$$

↳ Wenn Stammfkt. gesucht: am Schluss Rücksubstitution

↳ wichtige Substitutionen siehe Tabelle im Anhang

9.4 Rationale Funktionen:

▶ Reelle r-fache NST: $\int \frac{A}{(x-x_0)^r}\,dx = \begin{cases} \frac{A}{(1-r)\cdot(x-x_0)^{r-1}} + C & r>1 \\ A \ln|x-x_0| + C & r=1 \end{cases}$

▶ Komplexe einfache NST: Sei $b > a^2$.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2ax+b}\,dx = \frac{A}{2} \ln(x^2+2ax+b) + \frac{B-aA}{\sqrt{b-a^2}} \arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C$$

↳ selber lösen: quad. Ergänzung & geeignete Subst.

9.5 Uneigentliche Integrale:

Sein $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$ und $-\infty \le a < \alpha < c < \beta < b \le \infty$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a} \int_\alpha^c f(x)\,dx + \lim_{\beta\to b} \int_c^\beta f(x)\,dx$$

Typ 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx$

Typ 2: Def. lücken

z.B. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

↳ $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)$ konvergiert nie

9.6 Rotationskörper:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx}$$

Ansätze zum Integrale lösen:

- Substitution
- partielle Integration
- Partialbruchzerlegung
- Probieren mithilfe von Ableitung
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) + C$
- Wurzelterme: i) Quadratisch ergänzen
  ii) Substitution (siehe Tabelle im Anhang)
- komische Terme die aussehen wie $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{1+x^2}$ usw.
  ↳ trigonometrische Fkt.?
- Polynomdivision (mit Rest)
  ↳ z.B bei $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

10. Integralrechnung in $\mathbb{R}^n$:

Basics: Vektoranalysis:

Skalarfeld:

↳ Jedem Punkt wird eine Zahl (Skalar) zugeordnet → Gradient wirkt auf ein Skalarfeld $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$

Vektorfeld:

↳ Jedem Punkt wird ein Vektor zugeordnet.

$$\vec{K}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \vec{K}(x) = \begin{pmatrix} K_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ K_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Divergenz:

gibt die " Quellendichte" an (Skalarfeld):

$\vec{K}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\operatorname{div}(K) = \nabla \cdot \vec{K} = \frac{\partial K_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial K_n}{\partial x_n}}$$

Rotation:

Falls $\vec{K}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gilt für die Rotation von $\vec{K}$:

$$\boxed{\operatorname{rot}(\vec{K}) = \nabla \times \vec{K} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial y} - \frac{\partial K_2}{\partial z} \\ \frac{\partial K_1}{\partial z} - \frac{\partial K_3}{\partial x} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

Falls $\vec{K}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gilt: $\boxed{\operatorname{rot}(\vec{K}) = \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y}}$

Identitäten:

$\operatorname{div}(f \cdot K) = \nabla f \cdot K + f \cdot \operatorname{div}(K)$

$\operatorname{div}(K \times L) = L \cdot \operatorname{rot}(K) - K \cdot \operatorname{rot}(L)$

$\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k^2}$ (Laplace-Operator)

$\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$

$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(K)) = 0$

$\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{rot}(K)) = \nabla f \cdot \operatorname{rot}(K)$

$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(K)) = \nabla(\operatorname{div}(K)) - (\Delta K_1, \Delta K_2, \Delta K_3)$

$\operatorname{div}(\vec{w}_1 \times \vec{w}_2) + \vec{w}_1 \cdot \operatorname{rot}(\vec{w}_2) = \vec{w}_2 \cdot \operatorname{rot}(\vec{w}_1)$

$\vec{K}(\vec{v}) = \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ konstant $\Rightarrow$ homogen $\Rightarrow \operatorname{div} = 0$

↳ Feldlinien sind parallele Geraden

Begriffe:
- rot $\equiv 0 \iff$ Wirbelfrei
- div = rot = 0 $\iff$ harmonisch
- div > 0 $\iff$ Quelle
- div < 0 $\iff$ Senke

div $\equiv 0 \iff$ Quellfrei

Operationen D und B:
- Gradient: SF → VF
- Divergenz: VF → SF
- Rotation 2D: VF → SF
- Rotation 3D: VF → VF

Wichtige Sätze Integralrechnung in $\mathbb{R}^n$

Der Satz von Fubini:

$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad f: Q \to \mathbb{R}^n$

$$\int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_2$$

Bem: Integrationsreihenfolge spielt keine Rolle, falls f stetig auf Q.

Integrale über Normalbereiche:

Sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$ ein Normalbereich.
Dann gilt für das Integral:

$$\boxed{\int_\Omega f(x,y)\,ds = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\,dx}$$

Volumen bestimmen: μ mit $f(x,y,z) = 1$

Bem: i) Integrationsreihenfolge ist wichtig!
ii) Für höhere Dim.: Prinzip gleich.

Transformationssatz (≙ Substitution)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ $\Phi: \Omega \to \Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus und falls f auf $\Phi(\Omega)$ integrierbar ist, dann gilt:

$$\boxed{\int_{\Phi(\Omega)} f(\vec{y})\,d\vec{y} = \int_\Omega f(\Phi(\vec{x}))\,|\det d\Phi(x)|\,dx}$$

$\Omega \to \Phi(\Omega) = \mathbb{R}^n$

Bsp: Polarkoordinaten: $\Phi: (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^n$

$(r, \varphi, z) \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, $|\det d\Phi| = r$

Bem: i) $\det(d\Phi(x))$ = Funktionaldeterminante von Φ, $d\Phi(x)$ = Jacobimatrix

ii) Φ muss nicht 100% Diffeo sein

iii) allg. Fkt.Det. von $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist $\sqrt{\overbrace{\det((d\Phi(x)^T \cdot d\Phi(x))}^{\text{gramm'sche Det. von } d\Phi}}$

iv) falls $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$: allg. Fkt.Det von Φ ist: $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right\|$

v) Wichtige Parametrisierungen auf S.

vi) Ω oft $\underset{(r,\varphi,z)}{=} \mathbb{R}^n$, Φ Polar/Kugelkoordinaten

Überblick Integrale Analysis II

Lina De Windt

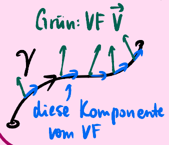
Weg-/Linienintegrale

① Typ 1: Über Skalarfeld:

$$\int_\gamma f(\vec{x})\, d\vec{s} = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t))\, \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\|_2\, dt$$

② Typ 2: Über Vektorfeld (entlang des Wegs)

↳ d.h. Tangentialkomponente



$$\int_\gamma \vec{V}(\vec{x})\, d\vec{s} = \int_a^b \vec{V}(\vec{\gamma}(t))\, \dot{\vec{\gamma}}(t)\, dt$$

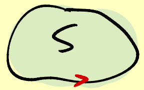
Green / Stokes

Oberflächenintegrale

① Typ 1: Skalarfeld über Oberfläche integrieren:

$$\iint_S f(\vec{x})\, d\mu = \iint_B f(\Phi)\, \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_2 du\, dv$$

wobei



$\Phi: B \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto S$ (Φ ist die Parametrisierung von S)

⚠ Gebiet immer auf meiner linken!

$d\mu$ = Flächenelement = $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| du\, dv = |\det d\Phi|\, du\, dv$

↳ Flächeninhalt von S: $\mu(S) = \int_S d\mu = \int_B |\det d\Phi|\, du\, dv$

Volumenintegrale

allgemein: $\boxed{\int_V f(x)\, dV}$ gleich:

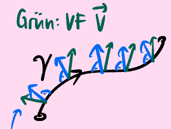
in Kartesische Koordinaten:
$$\iiint_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

in Zylinderkoordinaten:
$$\iiint_V f(r,\varphi,z)\, r\, dr\, d\varphi\, dz$$

in Kugelkoordinaten:
$$\iiint_V f(r,\theta,\varphi)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

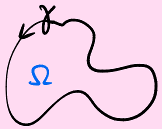
Flussintegrale

③ Flussintegral in der Ebene (≙ Wegintegral über VF, aber Normalkomponente davon)



$$\int_\gamma \vec{V}\, d\vec{n} = \int_\gamma \vec{V} \vec{n}\, ds = \int_a^b V(\vec{\gamma}(t))\, \vec{n}\, \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\|_2\, dt$$

④ Flussintegral in der Ebene durch ein geschlossener Weg



Def. gleich wie ③, aber: hier funktioniert der Satz von Gauss :)

Gauss 2D

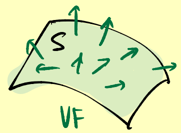
② Typ 2: Vektorfeld über Oberflächen integrieren

≙ Flussintegral ⚠ Gebiet links!

$$\iint_S \vec{K}(\vec{x})\, d\vec{S} = \pm \iint_B K(\Phi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) du\, dv$$

+: Fluss von innen nach aussen

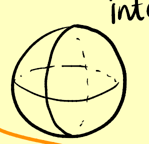
−: Fluss von aussen nach innen



Φ: gleich wie oben.

$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$ dS = Flächenelement, $\vec{n}$ = Normalvektor

③ VF über eine geschlossene Fläche integrieren ↳ oder $\vec{V}=0$ ∀ Punkte ausserhalb der Fläche



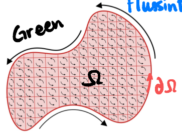
Def. gleich wie ②, aber hier Satz von Gauss anwendbar :)

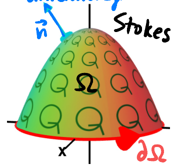
Gauss 3D

Überblick der Sätze:

- Satz von Stokes (in 2D: Green):

$$\boxed{\underbrace{\iint_\Omega \mathrm{rot}(\vec{V})\, d\mu}_{\text{Flussintegral}} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \vec{V}\, d\vec{s}}_{\text{Linienintegral}}}$$





- Satz von Gauss:

2D: $$\boxed{\underbrace{\oint_{\partial\Omega} \vec{V} \vec{n}\, ds}_{\text{Flussintegral in der Ebene}} = \underbrace{\iint_\Omega \mathrm{div}(\vec{V})\, d\mu}_{\text{Oberflächenintegral}}}$$

3D: $$\boxed{\underbrace{\oiint_{\partial\Omega} \vec{V} \vec{n}\, d\mu}_{\text{Oberflächenintegral}} = \underbrace{\iiint_\Omega \mathrm{div}(\vec{V})\, d\mu}_{\text{Volumenintegral}}}$$

! Gauss:
- über geschlossene Fläche (bzw. Weg) & bei Gauss zeigt $\vec{n}$ von $\partial\Omega$ immer nach aussen

Sonst:

Satz von Fubini:

Sei $Q=[a_1,b_1]\times[a_2\times b_2]\times\ldots\times[a_n\times b_n]$ und $f: Q\to\mathbb{R}$ $f\in C^0(\bar{Q})$. Dann gilt:

$$\int_Q f(x_1,\ldots,x_n)\,d\mu=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\cdots dx_2\,dx_1$$

Bem: die Integrationsreihenfolge spielt keine Rolle :)

d.h. konkret: z.B. $f(x,y)$ über Fläche $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ integrieren:

$$\int_S f(x,y)\,d\mu=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Integrale über Normalbereiche

↳ Integrationsreihenfolge nicht vertauschbar!!

in 2D: Sei $S:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ f(x)\le y\le g(x)\}$

$$\boxed{\iint_S f(x)\,d\mu=\int_a^b\int_{f(x)}^{g(x)} f(x)\,dy\,dx}$$

in 3D: Sei $S:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a\le x\le b,\ f(x)\le y\le g(x),\ h(y)\le z\le p(y)\}$

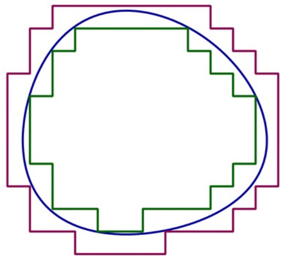
$$\boxed{\iiint_V f(x)\,d\mu=\int_a^b\int_{f(x)}^{g(x)}\int_{h(y)}^{p(y)} f(x)\,dz\,dy\,dx}$$

- $\vec{n}=\pm\ldots$
  ↳ in Richtung des Flusses (ausser bei Gauss: dort zeigt $\vec{n}$ immer nach aussen:

)

- Notation: $\int_{\partial A}\lambda$ .. linienintegral von VF entlang des Wegs
- Richtung der Parametrisierung wechseln: $t\to -t$

Jordan Messbarkeit: (sehr mathematisch)

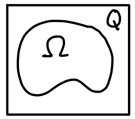


↳ um gewissen beschränkten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ einen Inhalt zuordnen → diese erhalten dann einen Integralbegriff.

Jordan Messbar $\Leftrightarrow$ Riemann-Integrierbar

Bem: • Eine Menge $A\subset\mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn A beschränkt ist und der Rand von A eine Jordan-Nullmenge ist.

• Für uns: alle Bereiche, die uns interessieren sind Jordan-Messbar. (Würde sonst über unser Studium hinaus gehen :))



Sei $\Omega\subset Q\subset\mathbb{R}^n$. Ω ist Jordan-messbar, falls χ_Ω über Q integrierbar ist gemäss Def. des Riemann-Integrals über Quader. Dann ist das

Jordan Mass von Ω: $\boxed{\mu(\Omega)=\int_Q \chi_\Omega\,d\mu}$

mit $\chi_\Omega=\begin{cases}1 & x\in\Omega\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

Wichtige Sätze Vektoranalysis / Integralrechnung in $\mathbb{R}^n$

Satz von Green (≙ 2d-Stokes)

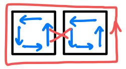
$$\boxed{\oint_{\partial D} \vec{K}\, d\vec{s} = \iint_D \operatorname{rot}(\vec{K})\, d\vec{\mu} = \iint_D \frac{\partial K_2}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1}{\partial x_2}\, d\mu}$$

$d\mu$.. Flächenelement

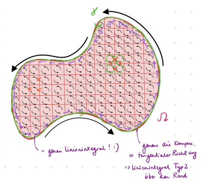
↳ Umlaufintegral in math. positive Umlaufrichtung!

↳ So kann man auch die Fläche von D bestimmen (mittels Linienintegral):

$\vec{K} = \binom{0}{x} \to \operatorname{vol}(D) = \iint_D 1\, dx\, dy = \oint_{\partial D} \binom{0}{x} \cdot d\vec{s}$



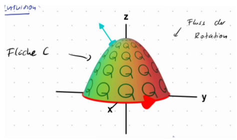
Rotation + Linienintegral



Satz von Stokes (3 Dim):

$$\boxed{\oint_{\partial D} \vec{K}\, d\vec{s} = \iint_D \operatorname{rot}(\vec{K})\, d\vec{S}}$$

Wegintegral — Oberflächenintegral (Fluss)



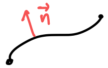
↳ D ist eine offene Fläche

↳ Richtung des Vek. Wegelements $d\vec{s}$ und des vek. Flächenelements $d\vec{S}$ à la Rechte-Hand-Regel: Daumen zum Einheitsnormalenfeld, Finger Weg

↳ Falls nur rot $(\vec{K})$ geg: durch raten passendes $\vec{K}$ finden

Flussintegral in der Ebene:

$$\boxed{\int_\gamma \vec{V}\, d\vec{n} = \int_\gamma \vec{V} \cdot \vec{n}\, ds = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \vec{n} \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|_2\, dt}$$



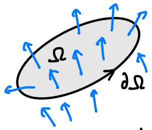
$\vec{n}$: Normalvektor in Richtung des Flusses

$\vec{n} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \begin{pmatrix} -\dot{\gamma}_2(t) \\ \dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix}$ oder

$\vec{n} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2(t) \\ -\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix}$

Satz von Gauss in 2D:

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega} \vec{V}\, d\vec{n} = \iint_\Omega \operatorname{div}(\vec{V})\, d\mu}$$

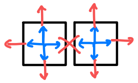


Satz von Gauss in 3D: → Fläche ∂V muss geschlossen sein!

$$\boxed{\oiint_{\partial V} \vec{K}\, d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{K})\, dV}$$

Flussintegral — Volumenintegral

Bem: • V kann ∂V auch nur enthalten, man muss einfach das zusätzliche Flussintegral substrahieren.



Divergenz + Flussintegral

S.. Fläche

⚠ Konvention: Fluss geht von innen nach aussen. (sonst − dazu.)

Kurvenintegral (2 Arten) (≙ Wegintegral, Linienintegral)

① Kurvenintegral 1. Art: über Skalarfeld:

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein SF und $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stückweise diffbarer Weg. Dann ist das Integral von f über γ:

$$\boxed{\int_\gamma f(\vec{x})\, ds := \int_a^b f(\vec{\gamma}(t))\, \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\|_2\, dt}$$

② Kurvenintegral 2. Art: über Vektorfeld:

Sei $\vec{K}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein VF und $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stückweise diffbarer Weg. Dann ist das Integral von $\vec{K}$ über γ:

$$\boxed{\int_\gamma \vec{K}(\vec{x})\, d\vec{s} := \int_a^b \vec{K}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt}$$

Bem: • ↑ heisst auch Arbeitsintegral (VF ≙ Kraft)
• I einem Gradientenfelds $\vec{K} = \nabla f$ (d.h. VF besitzt Potential) ist wegunabhängig (→ Nur Anfangs- & Endpunkt ist entscheidend)
↳ Dann ist f das Potential von $\vec{K}$ & $\vec{K}$ ist ein konservatives Feld.

Oberflächenintegral (≙ Flussintegrale) (2 Arten)

① Oberflächenintegral 1. Art: über Skalarfeld

Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein SF und A eine Fläche, die mit $\Phi: B \to \mathbb{R}^3$ ($B \subset \mathbb{R}^2$) parametrisiert wird. Das Oberflächenintegral von f über A ist:

$$\boxed{\iint_A f(\vec{x})\, d\mu = \iint_B f(\Phi) \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right\|_2 du\, dv}$$

$d\mu$.. Flächenelement

achtung Reihenfolge (Grenzen!)

② Oberflächenintegral 2. Art: über Vektorfeld (≙ Flussintegral)

Sei $\vec{K}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein VF und A eine Fläche, die mit $\Phi: B \to \mathbb{R}^3$ ($B \subset \mathbb{R}^2$) parametrisiert wird. Das Oberflächenintegral von $\vec{K}$ über A ist:

$$\boxed{\iint_A \vec{K}(\vec{x})\, d\vec{S} = \pm \iint_B K(\Phi) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right) du\, dv}$$

+ Fluss innen → aussen
− Fluss aussen → innen
$\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Bem: • ↑ wird auch Flussintegral genannt
• i.A. besteht das vek. Wegelement $d\vec{S}$ aus $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$, wobei $\vec{n}$ = Einheitsnormalenfeld.

Volumenintegral:

Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein SF, dann ist das Volumenintegral über V:

$$\boxed{\iiint_{zyx} f(\vec{x})\, dx\, dy\, dz = \int_V f(\vec{x})\, dV}$$

Bem: • Volumenintegral = meistens wenn man über 3D-Volumen integriert
• Volumen von V berechnen? → als SF $f(x,y,z) = 1$ $\forall (x,y,z) \in V$ wählen
• Volumenelement dV: berechnen mit geeigneter Parametrisierung $\Phi(x)$
↪ siehe Trafosatz
$dV = |\det d\Phi(x)|\, dx$

Schwerpunktberechnung:

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Körper & bezeichne $S_K = (s_{x_1}, \dots, s_{x_n}) \in \mathbb{R}^n$ den Schwerpunkt von K. Dann gilt:

$$\boxed{S_{x_i} = \frac{1}{\operatorname{vol}(K)} \int_K x_i\, dV}$$

Bem: Symmetrien von K beachten! → spart Zeit :)

Wichtige Sätze und Definitionen

Der Zwischenwertsatz: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Fkt. Dann $\exists c \in [a,b]$ $\forall u \in [f(a), f(b)]$ (falls $f(a) \le f(b)$) bzw. $u \in [f(b), f(a)]$ (falls $f(a) > f(b)$) mit $f(c) = u$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diffbar. Dann $\exists x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Die Konvexität: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^2-Abbildung. Dann ist $f(x)$ konvex auf $[a,b]$, wenn $\forall x, y \in [a,b]$ es gilt:

$$\boxed{f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x) + f(y)}{2} \iff f''(x) \ge 0}$$

Diffeomorphismus: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine bijektive C^1-Abbildung $\Phi: U \to V$ heisst Diffeomorphismus, falls die Umkehrabbildung $\Phi^{-1}: V \to U$ wieder C^1 ist.

Inverses Funktionentheorem: ≙ Umkehrsatz → lokal !!

Sei $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Sei in $a \in U$ die Ableitung $\varphi' = d\varphi(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar (also $\det(\varphi'(a)) \ne 0$). Dann: ∃ eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von a, s.d. $V_0 = \varphi(U_0)$ eine offene Umgebung von $b = \varphi(a)$ ist und $\varphi|_{U_0}: U_0 \to V_0$ ein Diffeo (lokal) (d.h. $\exists \varphi^{-1}$ und dieser ist C^1) ist. Ferner gilt: $\boxed{d(\varphi^{-1}(b)) = (d\varphi(a))^{-1}}$

Implizites Funktionentheorem:

Sei $F: U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ mit $(x,y) \mapsto F(x,y)$ eine C^1-Abbildung und sei (a,b) eine NST von F, d.h. $F(a,b) = 0$ mit $(a,b) \in U \times \mathbb{R}^m$. Sei $DF_y(a,b)$ eine invertierbare Matrix. Dann gibt es Umgebungen U' von a und U'' von b, und eine C^1-Abbildung $f: U' \to U''$, s.d. die NST-Menge von F in $U' \times U''$ genau der Graph von f ist.

$$(F(x,y) = 0,\ (x,y) \in U' \times U'') \iff y = f(x)$$

Ferner gilt: $\boxed{Df(a) = -(DF_y(a,b))^{-1} DF_x(a,b)}$

Der lokale Existenzsatz (Picard-Lindelöf):

Betrachte das AWP: $x'(t) = f(t, x(t))$ $x(t_0) = x_0$ mit $f(t,x)$ lipschitz-stetig im 2. Argument und $t \in \mathbb{R}^{\ge 0}$.

Die Folge
$x^{(0)}(t) = x_0$
⋮
$x^{(l+1)}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x^{(l)}(s))\, ds$ mit $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$

konvergiert für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ gleichmässig gegen die Lö. $x(t)$.

Extremwertsatz:

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ stetig und Ω ist kompakt ⇒ f nimmt in Ω sein Max. und Min. an.

11. Topologie

Topologische Räume:

Sei X eine beliebige Menge. Eine Topologie auf X ist eine Kollektion $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, welche die folgenden 3 Axiome erfüllt:

1. $\emptyset$ und X sind Elemente von $\mathcal{T}$
2. Der Durchschnitt einer endlichen Anzahl von Elementen von $\mathcal{T}$ ist wieder ein Element von $\mathcal{T}$
3. Die Vereinigung einer beliebigen Anzahl von Elementen von $\mathcal{T}$ ist wieder ein Element von $\mathcal{T}$.

offener Ball: $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x_0, x) < r\}$ d.. distance

Innerer, Äusserer, Randpunkt: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge.

- $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist ein innerer Punkt $\Leftrightarrow \exists r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset X$
- $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist ein äusserer Punkt $\Leftrightarrow$ x_0 ist ein innerer Punkt von X^c
- $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist ein Randpunkt von X $\Leftrightarrow$ x_0 ist weder ein innerer, noch ein äusserer Punkt von X

Offene & abgeschlossene Mengen: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge.

- X offen $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, x ist ein innerer Punkt von X
- X abgeschlossen $\Leftrightarrow$ X^c ist offen
  $\Leftrightarrow$ $\forall$ konv. Folgen $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in X$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ $\Rightarrow x_0 \in X$

Das Innere, der Abschluss & der Rand einer Menge: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Innere: $\mathring{X} = \{x \in X : \exists r > 0,\ B_r(x) \subset X\} = \{x \in X : x \text{ ist innerer Punkt von } X\}$
- Abschluss: $\overline{X} = \bigcap A$, wobei $A \subset X$ und abgeschlossen $= \{x \in X : x$ ist ein inner Punkt von X oder ein Randpunkt von $X\}$
- Rand: $\partial X = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ ist ein Randpunkt von $X\}$

↳ Beziehungen:
$\mathring{X} = \overline{X} \setminus \partial X$
$\overline{X} = \mathring{X} \cup \partial X$
$\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X}$

X in X ist abg. & offen zugleich.

Mengenoperationen und Topologie: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$.

↳ für offene Mengen:
- $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ offen
- X_1, X_2 offen $\Rightarrow X_1 \cap X_2$ offen — endliche Schnitte
- $\forall i \in I$: X_i offen $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$ offen — unendliche Vereinigungen

↳ für abgeschl. Mengen:
- $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ abgeschlossen
- X_1, X_2 abgeschl. $\Rightarrow X_1 \cup X_2$ abgeschl. — endliche Vereinigung
- $\forall i \in I$: X_i abgeschl. $\Rightarrow \bigcap_{i\in I} X_i$ abgeschl. — unendliche Schnitte

Kompaktheit:

Ω beschränkt und abgeschlossen $\Leftrightarrow$ A kompakt

Satz von Heine-Borel:

- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt $\Leftrightarrow$ X abgeschl. & beschränkt
- $X_1 = f^{-1}\{U\}$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ U abg. & f stetig

Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen:

Sei $f: D \to U$ stetig, dann:

$f(D) = U$ offen $\Leftrightarrow$ Urbild $f^{-1}(U) \subseteq D$ offen

$f(D) = U$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Urbild $f^{-1}(U) \subseteq$ abgeschlossen

$f: X \to Y$ stetig $\Leftrightarrow$ $\forall A \subseteq X$: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

↳ gilt auch bei rel. abgeschlossen bzw. offen.

Wichtige Mengen:

$\emptyset$: offen & abgeschlossen. $\overline{\emptyset} = \mathring{\emptyset} = \partial\emptyset = \emptyset$ (Leere Menge)

$\mathbb{R}$: offen & abgeschlossen. $\overline{\mathbb{R}} = \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ $\partial\mathbb{R} = \emptyset$

$\mathbb{Q}$: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ "$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ & $\mathbb{R}$ ist dicht in $\mathbb{Q}$"

$\mathbb{N}$: $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$, $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$ "Jeder Punkt ist allein"

ein Punkt: z.B. $Y := \{0\}$. Dann $\overline{Y} = \{0\}$, $\mathring{Y} = \emptyset$, $\partial Y = \{0\}$

unendliche Intervalle: z.B. $\Omega := [0, +\infty[$. Dann $\overline{\Omega} = [0, +\infty[$, $\mathring{\Omega} =]0, +\infty[$, $\partial\Omega = \{0\}$

Harmonische Folge: Sei $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Dann $\overline{B} = B \cup \{0\}$, $\mathring{B} = \emptyset$, $\partial B = B \cup \{0\}$

Inklusionen von Abschlussen:

$\overline{A} \supset \mathring{\overline{A}}$ Beweis: gemäss der Definition des Inneren gilt $\overline{A} \supset \mathring{\overline{A}}$.
Da $\overline{A}$ abgeschlossen ist, gilt also auch $\overline{A} \supset \overline{\mathring{\overline{A}}}$ □

$\overline{A} \not\subset \overline{\mathring{\overline{A}}}$ weil z.B. $A := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$: $\overline{A} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$
$\Rightarrow \overline{A} \not\subset \overline{\mathring{\overline{A}}} = \emptyset$

$\mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}}$ Beweis: gemäss der Definition gilt $\overline{\mathring{A}} \supset \mathring{A}$ und da $\mathring{A}$ offen ist, gilt sofort $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \supset \mathring{A}$ □

$\mathring{A} \not\supset \mathring{\overline{\mathring{A}}}$ weil z.B. $A :=]0,1[\setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$: $\mathring{A} = A$, $\overline{\mathring{A}} = [0,1]$
$\Rightarrow \mathring{\overline{\mathring{A}}} =]0,1[\not\subset \mathring{A}$

$\mathring{\overline{A}} = \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$ Beweis: $\supseteq$: es gilt $\overline{A} \supset \overline{\mathring{\overline{A}}} \Rightarrow \mathring{\overline{A}} \supset \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$ gemäss Definition.
$\subseteq$: es gilt $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}}$. Das auf $\overline{A}$ anwenden: $\mathring{\overline{A}} \subset \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$
$\Rightarrow \mathring{\overline{A}} = \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$ □

$\overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$ Beweis analog zu ↑.

$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ $\qquad (A_1 \cap A_2)^\circ \supset \mathring{A_1} \cap \mathring{A_2}$

$\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$

Sei I die Menge der Indizes $I := \{1, 2, 3, \dots\}$ und A eine Topologie.

$\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}}$ für I unendlich.

$\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}}$ für I endlich.

$\bigcap_{i\in I} A_i \subset \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$ und $\bigcup_{i\in I} \mathring{A_i} \subset (\bigcup_{i\in I} A_i)^\circ \subset \bigcup_{i\in I} A_i$

Wichtige Eigenschaften:

- Jede beschränkte Folge besitzt konvergente Teilfolgen.
- offen $\not\Rightarrow$ unbeschränkt ! siehe z.B. $]0,1[$

Wichtige "Regeln" der Topologie:

$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$		$\overline{[0,1]} = [0,1]$	$\overline{[-1,1] \setminus \{0\}} = [-1,1]$
$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$		$([0,1])^\circ =]0,1[$	$([-1,1] \setminus \{0\})^\circ =]-1,0[\cup]0,1[$
$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$	$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$	$\partial([0,1]) = \{0,1\}$	$\partial([-1,1] \setminus \{0\}) = \{-1,0,1\}$
$\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$	$\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$		
$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$	$\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$		
$\overline{\emptyset} = \mathring{\emptyset} = \partial\emptyset = \emptyset$			

Relativ offen, relativ abgeschlossen:

$A \subseteq X$ relativ offen in X $\Leftrightarrow$ $\exists B \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $A = B \cap X$

Bsp: $X := [0,1[\subset \mathbb{R}$. Dann ist $A := [0, \frac{1}{2}[$ relativ offen in X, da $\exists B =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\subset \mathbb{R}$ offen mit $A = B \cap X$

$A \subseteq X$ relativ abgeschlossen in X $\Leftrightarrow$ $\exists B \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen mit $A = B \cap X$

Bsp: $X := [0,1[\subset \mathbb{R}$. Dann ist $A = [\frac{1}{2}, 1[$ relativ abgeschlossen in X, da $\exists B = [\frac{1}{2}, 1]$ abgeschlossen mit $A = B \cap X$

Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$:

Ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, welche sich lokal als Graph einer diffbaren Funktion darstellen lässt.

für uns $\Rightarrow$ reguläre Niveaumengen sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$: $M = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a\}$ $a \in \mathbb{R}$.

↳ **Satz vom regulären Wert:** Sei $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ mit $n > l$.
Betrachte $M := f^{-1}\{a\} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, eine Menge.

Falls jeder Punkt $p_0 \in M$ regulär ist (d.h. $df(p_0)$ hat max. Rang), ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $k = n - l$.

Bspe:
- $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stetig: 1-dim. Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$
- $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, stetig: 2-dim. Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$

Regulärer Punkt / Wert:

Ein Punkt $x \in U \subset X$ heisst ein regulärer Punkt der diffbaren Abbildung $f: U \to Y$, wenn das Differenzial $df(x): X \to Y$ surjektiv abbildet (d.h. lokal invertierbar). Das dazugehörige $y \in Y$ heisst regulärer Wert von f. ↘ d.h. Rang maximal.

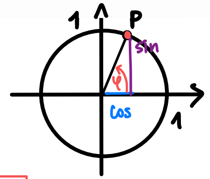
12. Anhang

Trigonometrie

Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Euler'sche Formel:

$\boxed{e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)}$ $\quad \boxed{e^{\pi i} = -1}$



Cos, Sin:

$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

Cosh, Sinh:

$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$ ← bijektiv auf $[0, \infty)$

$\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})$ ← bijektiv

Beziehungen:

$\cos(x) = \cosh(ix)$ $\qquad$ $\cosh(x) = \cos(ix)$

$\cos(ix) = \cosh(x)$ $\qquad$ $\cosh(ix) = \cos(x)$

$\sin(x) = -i\sinh(ix)$ $\qquad$ $\sinh(x) = -i\sin(ix)$

$\sin(ix) = i\sinh(x)$ $\qquad$ $\sinh(ix) = \frac{\sin(z)}{-i} = i\sin(z)$

$\tan(x) = -i\tanh(ix)$ $\qquad$ $\tanh(x) = -i\tan(ix)$

$\tan(ix) = i\tanh(x)$ $\qquad$ $\tanh(ix) = i\tan(x)$

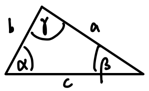
$e^{x} = \cosh(x) + \sinh(x)$

$e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Secant, Cosecant, Cotangens: $\sec = \frac{1}{\cos}$, $\csc = \frac{1}{\sin}$, $\cot = \frac{1}{\tan}$

Sinussatz: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$



Cosinussatz: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma}$

Beziehungen & Eigenschaften:

- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad$ • $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $\quad$ • $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $\sin(-x) = \sin(x)$ $\quad$ • $\cos(-x) = \cos(x)$ $\quad$ • $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos(x)$ $\quad$ • $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin(x)$ $\quad$ • $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\quad$ • $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\quad$ • $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ $\quad$ • $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ $\quad$ • $\tan(\pi + x) = \tan(x)$
- $\sin(2\pi - x) = -\sin(x)$ $\quad$ • $\cos(2\pi - x) = \cos(x)$ $\quad$ • $\tan(2\pi - x) = -\tan(x)$
- $\sin(2x) = \begin{cases} 2\sin(x)\cos(x) \\ \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} \end{cases}$ $\quad$ • $\cos(2x) = \begin{cases} 2\cos^2(x) - 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 1 - 2\sin^2(x) \\ \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} \end{cases}$ $\quad$ • $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
- $\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$ $\quad$ • $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$
- $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ $\quad$ • $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ $\quad$ • $\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$
- $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2}$ $\quad$ • $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2}$ $\quad$ • $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
- $\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$ $\quad$ • $\tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$
- $A\sin(\omega t + \alpha) + B\sin(\omega t + \beta) = \sqrt{[A\cos\alpha + B\cos\beta]^2 + [A\sin\alpha + B\sin\beta]^2} \cdot \sin\left(\omega t + \arctan\left[\frac{A\sin\alpha + B\sin\beta}{A\cos\alpha + B\cos\beta}\right]\right)$

Additionstheoreme:

- $\sin(x) + \sin(y) = 2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\quad$ • $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$
- $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) - \cos(y) = -2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$
- $\cos(a) - \sin(a) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$

Multiplikationen:

- $\sin(\alpha t)\cos(\beta t) = \frac{1}{2}\left(\sin((\alpha+\beta)t) + \sin((\alpha-\beta)t)\right)$
- $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
- $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$
- $\sin^2(x)\cos^2(x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))$

Cot:

- $1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
- $\cot(a \pm b) = \frac{\cot(a)\cot(b) \mp 1}{\cot(a) \pm \cot(b)}$
- $\cot(2a) = \frac{\cot^2(a) - 1}{2\cot(a)}$

$\frac{a}{2}$: $\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(a))}$

$\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(a))}$

Potenzen:

- $\sin^2(a) = \frac{1}{2}\cdot(1 - \cos(2a))$ $\quad$ • $\sin^3(a) = \frac{1}{4}(3\sin(a) - \sin(3a))$
- $\sin^4(a) = \frac{1}{8}(\cos(4a) - 4\cos(2a) + 3)$
- $\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$ $\quad$ • $\cos^3(a) = \frac{1}{4}(3\cos(a) - \cos(3a))$
- $\cos^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(\cos(4a) - 4\cos(2a) + 3)$

Hyperbolische Funktionen:

Allgemeines: $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

$\tanh(a \pm b) = \frac{1}{\coth(a \pm b)} = \frac{\tanh(a) \pm \tanh(b)}{1 \pm \tanh(a)\tanh(b)}$

2a und 3a: alles gleich wie für sin und cos → sin ≙ sinh & cos ≙ cosh

$\frac{a}{2}$:

- $\sinh\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\cosh(a)-1}{2}}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{\cosh(a)-1}{2}}, & x < 0 \end{cases}$ $\quad$ • $\cosh\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(a)+1}{2}}$

Summen:

- $\sinh(a) + \sinh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sinh(a) - \sinh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cosh(a) - \cosh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\tanh(a) \pm \tanh(b) = \frac{\sinh(a \pm b)}{\cosh(a)\cosh(b)}$

Produkte:

- $\sinh(a)\sinh(b) = \frac{1}{2}[\cosh(a+b) - \cosh(a-b)]$
- $\cosh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2}[\cosh(a+b) + \cosh(a-b)]$
- $\sinh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2}\cdot[\sinh(a+b) + \sinh(a-b)]$
- $\tanh(a)\tanh(b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{\coth(a) + \coth(b)}$

Potenzen:

- $\sinh^2(a) = \frac{1}{2}(\cosh(2a) - 1)$
- $\sinh^3(a) = \frac{1}{4}(\sinh(3a) - 3\sinh(a))$
- $\sinh^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(\cosh(4a) - 4\cosh(2a) + 3)$
- $\cosh^2(a) = \frac{1}{2}\cdot(\cosh(2a) + 1)$
- $\cosh^3(a) = \frac{1}{4}\cdot(\cosh(3a) + 3\cosh(a))$
- $\cosh^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(\cosh(4a) + 4\cosh(2a) + 3)$
- $1 - \tanh^2(a) = \frac{1}{\cosh^2(a)}$

Formel von Moivre: $(\cosh(a) \pm \sinh(a))^n = \cosh(na) \pm \sinh(na)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Inverse der Trigonometrischen Funktionen:

- $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos(x))$ $\quad$ Herleiten via $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad$ • $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\tan(\arccos(x)) = x^{-1}\cdot(1-x)^{1/4}$ $\quad$ • $\tan(\arcsin(x) = x\cdot(1-x)^{-1/4}$
- $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ $\quad$ • $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
- $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $|x| < 1$ $\quad$ • $\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$, $|x| > 1$
- $\sinh(2\operatorname{arcsinh}(x)) = 2x\sqrt{x^2-1}$ $\quad$ • $\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$ $\quad \forall x > 0$
- $\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$

Wichtige Ableitungen & Integrale:

Allgemeine Ableitungen und Stammfunktionen:

$$\begin{tikzcd} \text{Stammfunktion } F(x) \arrow[r, bend left, "d/dx"] & \text{Funktion } f(x) \arrow[l, bend left, "\int"] \arrow[r, bend left, "d/dx"] & \text{1. Ableitung } f'(x) \arrow[l, bend left, "\int"] \end{tikzcd}$$

• $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
• $\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
• $\frac{2}{3} \cdot x^{3/2}$	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
• e^x	e^x	e^x
• $x \cdot (\ln(\lvert x\rvert) - 1)$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
• $\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
• $\frac{x}{\ln(a)} \cdot \ln(\lvert x\rvert - 1)$	$\log_a(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
• $-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
• $\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
• $-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
• $x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
• $x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
• $x \arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$

x in Bogenmass!

Wichtige Ableitungen:

- $(a^x)' = \ln(a) a^x$
- $(\sqrt[x]{a})' = -\frac{\sqrt[x]{a} \ln(a)}{x^2}$
- $\csc'(x) = -\csc(x) \cot(x)$
- $\cot'(x) = -\csc^2(x)$
- $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\sinh'(x) = \cosh(x)$
- $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
- $\operatorname{arccosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\ln(\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$
- $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$
- $\sec'(x) = \sec(x) \tan(x)$
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\cosh'(x) = \sinh(x)$
- $\operatorname{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\operatorname{arctanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
- $(e^x)' = e^x$

Integrale:

Rechenregeln:

- $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
- $\int_a^b \alpha f(x) \pm \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \pm \beta \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
- $\int_a^b \underset{\downarrow\, f'(x)}{f(x)}\, \underset{\uparrow\, G(x)}{g(x)}\,dx = [f(x) G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) G(x)\,dx$
- $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R},\ a \leq b \leq c$

Substitutionen:

$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$	$u(x) = g(x)$	$dx = \frac{du}{g'(x)}$
$\int f(g(x))\, g'(x)\,dx$	$u(x) = g(x)$	$dx = \frac{du}{g'(x)}$
$\int f(e^x, \sinh(x), \cosh(x))\,dx$	$u(x) = e^x$	$dx = \frac{du}{e^x}$
$\int f(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$	$x = \sin(u)$	$dx = \cos(u)\,du$
$\int f(x, \sqrt{1+x^2})\,dx$	$x = \sinh(u)$	$dx = \cosh(u)\,du$
$\int f(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$	$x = \cosh(u)$	$dx = \sinh(u)\,du$
$\int f\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx$	$u(x) = \frac{x}{a}$	$dx = a\,du$
$\int f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)dx$	$u(x) = \sqrt{x^2-1}$	$dx = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,du$
$\int R(\sin(x), \cos(x))\,dx$	$u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$

$\hookrightarrow \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ $\quad \hookrightarrow \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Potenzen und Wurzeln:

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \neq -1$

$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} + C$

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\right) + C$

$\int \frac{x}{ax^2+b}\,dx = \frac{1}{2a} \ln|ax^2+b| + C$

$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx = -\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + C$

$\int \frac{x}{(a^2-x^2)^n}\,dx = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + C$

$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \log(\sqrt{a^2+x^2} + x)) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$

$\int -\frac{1}{1-x^2}\,dx = \arccos(x) + C$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$

Exponential- & Logarithmusfunktionen

$\alpha \in \mathbb{C}$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int \ln(x)\,dx = x(\ln|x| - 1) + C \quad x > 0$

$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + C$

$\int x^s \ln(x)\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}\left(\ln|x| - \frac{1}{s+1}\right)$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int \frac{1}{x \pm a}\,dx = \ln|x \pm a| + C$

$\int \frac{1}{e^x+a}\,dx = \frac{x - \ln|a+e^x|}{a} + C$

$\int \frac{1}{e^x-a}\,dx = \frac{\ln|e^x-a| - x}{a} + C$

$\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \ln(x) - \ln(x+1) + C$

$\int a^{kx}\,dx = \frac{a^{kx}}{k\ln(a)} + C \quad a > 1,\ k \in \mathbb{R}$

$\int x^n e^{ax}\,dx = e^{ax} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} + C$

$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)}\,dx = \ln(\ln|x|) + C$

$\int x^2 \ln(x)\,dx = \left(\frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9}\right) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{|y|}}\,dy = 2\sqrt{y}$

$\int x e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha x - 1)}{\alpha^2} + C$

$\int x^2 e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha^2 x^2 - 2\alpha x + 2)}{\alpha^3} + C$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

$\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}\,dt = \ln(x+1)$

$\int \frac{(\ln|x|)^n}{x}\,dx = \frac{(\ln|x|)^{n+1}}{n+1} + C \quad \forall n \neq -1$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

$\int f'(x) \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{2}(f^2(x)) + C$

$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C$

$\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2} + C$

$\int x^2(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^3} + C$

$\int \frac{x}{(ax+b)^n}\,dx = -\frac{1}{(n-2)a^2(ax+b)^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)a^2(ax+b)^{n-1}} + C$

$\int \frac{x}{ax^2+b}\,dx = \frac{1}{2a} \ln|ax^2+b| + C$

$\int \frac{x}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + C$

$\int \frac{x}{x^4+3}\,dx = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sqrt{x^2-1} + C$

$\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$

$\int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$

$\int \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dx = \frac{y}{x^2+y^2} + C$

Expterme:

$\int x e^{ax}\,dx = \left(\frac{ax-1}{a^2}\right) e^{ax} + C$

$\int x^2 e^{ax}\,dx = \left(\frac{a^2x^2 - 2ax + 2}{a^3}\right) e^{ax} + C$

$\int \frac{1}{p+qe^{ax}}\,dx = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap} \ln|p+qe^{ax}| + C$

$\int \frac{e^{ax}}{p+qe^{ax}}\,dx = \frac{1}{ap} \cdot \ln|p+qe^{ax}| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = 2\arctan(\sqrt{e^x-1}) + C$

$\int e^{ax} \sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C$

$\int e^{ax} \cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) - b\sin(bx)) + C$

$\int \frac{1}{(e^x-a)}\,dx = \frac{1}{a}(\ln|e^x-a| - x) + C$

$\int x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

$\int e^x + x e^x\,dx = x e^x + C$

$\int \frac{1}{(e^x+a)}\,dx = \frac{1}{a} \cdot (x - \ln|a+e^x|) + C$

Hyperbolische Funktionen:

$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C$

$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$

$\int \tanh(x)\,dx = \ln|e^{2x}+1| - x + C$

$\int \frac{1}{\sinh(x)}\,dx = \ln(e^x-1) - \ln(e^x+1) + C$

$\int \sinh^{-1}(x)\,dx = x\sinh^{-1}(x) - \sqrt{1+x^2} + C$

$\int \cosh^{-1}(x)\,dx = x\cosh^{-1}(x) - \sqrt{x^2-1} + C$

$\int \tanh^{-1}(x)\,dx = x\tanh^{-1}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

$\int \tanh^2(x)\,dx = x - \tanh(x) + C$

$\int \sinh^2(x)\,dx = \frac{1}{4}(\sinh(2x) - 2x) + C$

$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \tanh(x) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arcsinh}(x) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arccosh}(x) + C \quad (x > 1)$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctanh}(x) + C$

$$\boxed{\int_0^\infty \tau^n e^{-\tau}\,d\tau = n! \quad \text{(part. Int.)}}$$

Trigonometrische Funktionen:

$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)+C$

$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)+C$

$\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)|+C$

$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \ln\left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}\right|+C$

$\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx = \ln\left|\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right|+C$

$\int \frac{1}{\tan(x)}\,dx = \ln|\sin(x)|+C$

$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x)+C$

$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\frac{1}{\tan(x)}+C$

$\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{3}\sin^3(x)+C$

$\int \sin(x)\cos^2(x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3(x)+C$

$\int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{32}(4x-\sin(4x))+C$

$\int \sin^n(ax)\cos(ax)\,dx = \frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a}+C$

$\int \sin(ax)\cos^n(ax)\,dx = -\frac{\cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a}+C$

$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x}{2}-\frac{\sin(x)\cos(x)}{2}+C$

$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{x}{2}+\frac{\sin(x)\cos(x)}{2}+C$

$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x)+C$

$\int \sin^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx - \frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}$

$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx + \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}$

$\int \cot(x)\,dx = \ln|\sin(x)|+C$

$\int \csc(x)\,dx = -\ln|\csc(x)+\cot(x)|+C$ $\qquad \csc = \frac{1}{\sin}$

$\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x)+\tan(x)|+C$ $\qquad \sec = \frac{1}{\cos}$

$\int \arcsin(x)\,dx = x\cdot\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C$

$\int \arccos(x)\,dx = x\cdot\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+C$

$\int \arctan(x)\,dx = x\cdot\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$

$\int x\sin(x)\,dx = \sin(x)-x\cos(x)+C$

$\int x^2\sin(x)\,dx = 2x\sin(x)-(x^2-2)\cos(x)+C$

$\int x^3\sin(x)\,dx = 3(x^2-2)\sin(x)-x(x^2-6)\cos(x)+C$

$\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x)+\cos(x)+C$

$\int x^2\cos(x)\,dx = (x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)+C$

$\int x^3\cos(x)\,dx = x(x^2-6)\sin(x)+3(x^2-2)\cos(x)+C$

$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)}-\frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}+C$

$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)}-\frac{\cos((a+b)x)}{2(a-b)}+C$

$\int x\sin(\alpha x)\,dx = \frac{\sin(\alpha x)-\alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^2}+C$

$\int x^2\sin(\alpha x)\,dx = \frac{(2-\alpha^2x^2)\cos(\alpha x)+2\alpha x\sin(\alpha x)}{\alpha^3}+C$

$\int x\cos(\alpha x)\,dx = \frac{\alpha x\sin(\alpha x)+\cos(\alpha x)}{\alpha^2}+C$

$\int x^2\cos(\alpha x)\,dx = \frac{(\alpha^2x^2-2)\sin(\alpha x)+2\alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^3}+C$

$\int_0^{2\pi}\cos^4(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\sin^4(t)\,dt = \frac{3\pi}{4}$

$\int_0^{2\pi}\cos^3(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\sin^3(t)\,dt = 0$

$\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\sin^2(t)\,dt = \pi$

$\int_0^{2\pi}\sin(t)\cos^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\cos(t)\sin^2(t)\,dt = 0$

$\int_0^{2\pi}\sin(t)\cos(t)\,dt = 0$

Periodische Funktionen, Integraltabelle:

	$\int_0^{\pi/4}$	$\int_0^{\pi/2}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}$	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
$\sin$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
$\sin^2$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin^3$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
$\sin^4$	$\frac{3\pi-8}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi-8}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\cos$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
$\cos^2$	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π

	$\int_0^{\pi/4}$	$\int_0^{\pi/2}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}$	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
$\cos^3$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
$\cos^4$	$\frac{8+3\pi}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8+3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\sin\cdot\cos$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\sin^2\cdot\cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$\sin\cdot\cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

Parameterintegrale mit variablen Grenzen:

$\boxed{F(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t,x)\,dx}$ diffbar falls $f(t,x)$ und $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ stetig in t und x und φ und ψ nach t stetig diffbar. Dann gilt:

$$\boxed{\frac{dF(t)}{dt} = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx + f(t,\psi(t))\,\psi'(t) - f(t,\varphi(t))\,\varphi'(t)}$$

falls f nur 1 Variable, d.h. $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).}$$

Normalbereiche:

Bereiche der Form:

$$a \le x_1 \le b$$
$$\varphi(x_1) \le x_2 \le \psi(x_1) \qquad \varphi,\psi \text{ stetig}$$
$$\Phi(x_1,x_2) \le x_3 \le \Theta(x_1,x_2) \quad \text{usw.}$$

x-einfacher Bereich: etwas in der Form:

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$$

y-einfacher Bereich: etwas in der Form:

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le y\le b,\ f(y)\le x\le g(y)$$

Spezielle Ableitungen:

Sei $f: V_1\times V_2\times\ldots\times V_n \to W$ multilinear. Dann ist f diffbar und es gilt:

$$\boxed{df(a_1,\ldots,a_n)(h_1,\ldots,h_n) = f(h_1,a_1,\ldots,a_n)+\ldots+f(a_1,a_2,\ldots,h_n)}$$

Bsp:
- $d(X^TX)H = H^TX + X^TH$
- $d(\det(X))H = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(X)H)$
- $\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln|x|}{x^2}\right)$
- $(x^x)' = x^x(\ln|x|+1)$

Integrale der Form $\int a(x)e^{\beta(x)}dx \to$ Substitution $u=\beta(x)$ probieren.

Summen, Rechenregeln

- $\sum_{n=s}^{t} c\cdot f(n) = c\cdot\sum_{n=s}^{t} f(n)$
- $\sum_{n=s}^{t} f(n) \pm \sum_{n=s}^{t} g(n) = \sum_{n=s}^{t}(f(n)\pm g(n))$
- $\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=s+p}^{t+p} f(n-p)$
- $\sum_{n\in B} f(n) = \sum_{m\in A} f(\sigma(m))$
- $\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=s}^{j} f(n) + \sum_{n=j+1}^{t} f(n)$
- $\sum_{n=a}^{b} f(n) = \sum_{n=0}^{b} f(n) - \sum_{n=0}^{a-1} f(n)$
- $\sum_{n=s}^{t} f(n) = \sum_{n=0}^{t-s} f(t-n)$
- $\sum_{n=0}^{t} f(n) = \sum_{n=0}^{t-s} f(t-n)$
- $\sum_{i=k_0}^{k_1}\sum_{j=l_0}^{l_1} a_{i,j} = \sum_{j=l_0}^{l_1}\sum_{i=k_0}^{k_1} a_{i,j}$
- $\sum_{k\le j\le i\le n} a_{i,j} = \sum_{i=k}^{n}\sum_{j=k}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=k}^{n}\sum_{i=k}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{i=0}^{n-j} a_{i+j,i}$
- $\sum_{n=2s}^{2t} f(n) = \underbrace{\sum_{n=s+1}^{t} f(2n)}_{\text{gerader}} + \underbrace{\sum_{n=s+1}^{t} f(2n-1)}_{\text{ungerader Teil}}$
- $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j$
- $\sum_{i=s}^{m}\sum_{j=t}^{n} a_i c_j = \left(\sum_{i=s}^{m} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=t}^{n} c_j\right)$
- $\sum_{n=s}^{t}\log_b f(n) = \log_b\prod_{n=s}^{t} f(n)$
- $c^{\sum_{n=s}^{t} f(n)} = \prod_{n=s}^{t} c^{f(n)}$

Notationen:
- $\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$
- $\sum a_i^2 = \sum_{i=n}^{n} a_i^2$
- $\sum_{i,j} = \sum_i\sum_j$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_i a_i$
- $\sum_n x = n\cdot x$

Potenzen & Logarithmen:

- $\sum_{i=1}^{n} c = nc \quad \forall c\in\mathbb{R}$ unabhängig von i
- $\sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ (Σ of first odd natural numbers)
- $\sum_{i=0}^{n} 2i = n\cdot(n+1)$ (Σ of first even natural numbers)
- $\sum_{i=1}^{n}\log i = \log(n!)$
- $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$

  (Σ of the first squares)
- $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}\frac{B_k}{p-k+1}n^{p-k+1}$?

Summation index in exponents

- $\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{1-a^n}{1-a}$ geom. Reihe
- $\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i} = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$
- $\sum_{i=0}^{n-1} ia^i = \frac{a-na^n+(n-1)a^{n+1}}{(1-a)^2}$

Punktmengen & Parametrisierungen

Polarkoordinaten:

$\Phi: [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\Phi(r,\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$ $\det(D\Phi(r,\varphi))=r$

Bem: falls man eine Ellipse parametrisieren möchte: für die Parametrisierung $\Phi(r,\varphi)=(ra\cos(\varphi), rb\sin(\varphi))^T$ wählen, wobei a,b = Halbachsen der Ellipse. → $\det(D\Phi(r,\varphi)) = abr$

Funktion in Polarkoordinaten:

$\vec r(\rho,\varphi)=\begin{pmatrix}\rho\cdot\cos\varphi\\ \rho\cdot\sin\varphi\\ f(\rho,\varphi)\end{pmatrix}$ Nur 2D: $\vec r(\rho,\varphi)=\begin{pmatrix}\rho\cdot\cos\varphi\\ \rho\cdot\sin\varphi\end{pmatrix}$

Zylinderkoordinaten:

$\Phi: (0,\infty)\times[0,2\pi)\times(-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^3$

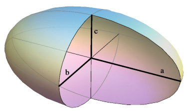
$\Phi(r,\varphi,h)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\\ h\end{pmatrix}$ $\det(D\Phi(r,\varphi,h))=r$

Kugelkoordinaten:

$\Phi: (0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\Phi(r,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta\\ r\sin\varphi\sin\theta\\ r\cos\theta\end{pmatrix}$ $\det(D\Phi(r,\varphi,\theta))=r^2\sin\theta$

Ellipsoidkoordinaten:



$\Phi: (0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\Phi(r,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix} ar\cos(\varphi)\sin(\theta)\\ br\sin(\varphi)\sin(\theta)\\ cr\cos(\theta)\end{pmatrix}$ $\det(D\Phi(r,\varphi,\theta))=abc\,r^2\sin(\theta)$

Toruskoordinaten:

$\Phi: (0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$\Phi(r,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix} (R+r\cos\theta)\cos\varphi\\ (R+r\cos\theta)\sin\varphi\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$ $\det(D\Phi(r,\varphi,h))=r(R+r\cos\theta)$

Reguläre Flächen:

Sind 2-dimensionale, diffbare Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$.
Lässt sich eine solche Fläche $S\subset\mathbb{R}^3$ durch eine diffbare Fkt. $f: I\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=z$ beschreiben, dann gilt für die Parametrisierung Φ von S:

$\Phi: I\to\mathbb{R}^3$ $\Phi(x,y)=\begin{pmatrix}x\\ y\\ f(x,y)\end{pmatrix}$

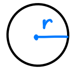
Bem: • Anwendung häufig für Oberflächenintegrale
↳ Satz von Gauss/Stokes

• Allgemeine Fktionaldeterminante von $\Phi(x,y)$:

$\sqrt{\det((D\Phi(x,y)^T\cdot D\Phi(x,y))} = \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\|$

Punktmengen

Kreis: $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\}$ $r\in\mathbb{R}_{>0}$: Radius



Fläche: $A=\pi r^2$, Umfang: $U=2r\pi$

$\gamma(t)=(x_0+r\cos(t), y_0+r\sin(t))^T$, $t\in[0,2\pi)$ $\vec n=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ MP(0,0)

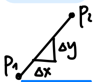
Ellipse: $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\}$ $a,b\in\mathbb{R}_{>0}$: Halbachsen

$\gamma(t)=(x_0+a\cos(t), y_0+b\sin(t))^T$, $t\in[0,2\pi)$

Hyperbel mit Halbachsen a, b: $E=\{(x,y)^T\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\}$

$\gamma(t)=(\pm a\cosh(t), b\sinh(t))^T$, $t\in\mathbb{R}$

Gerade: P_1 zu P_2 mit Steigung m und Achsenabschnitt q:



$\boxed{m=\frac{\Delta y}{\Delta x}}$

$G=\{(x,y)^T\in\mathbb{R}^2 \mid y=mx+q\}$

$\gamma(t)=p_1+t(p_2-p_1)$, $t\in[0,1]$

Kugel: $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2\}$

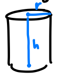
Oberfläche: $A=4\pi r^2$ Volumen: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ $\vec n=\pm\frac{1}{r}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

Kegel: $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=\frac{r^2}{h^2}(h-z)^2\}$ $r,h\in\mathbb{R}^{>0}$: Radius bzw. Höhe des Kegels

Oberfläche: $S=\pi r^2+\pi r\sqrt{h^2+r^2}$

Volumen: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$

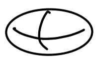
Kreiszylinder: $Z=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2,\ 0\le z\le h\}$



Mantelfläche: $M=2\pi rh$ Volumen: $V=\pi r^2h$

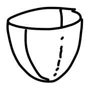
Oberfläche: $S=M+2\cdot G=2\pi rh+2\pi r^2$

Ellipsoid: $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\overset{=r^2}{1}\}$



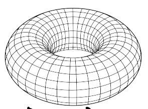
$a,b,c\in\mathbb{R}_{>0}$: Halbachsen Volumen: $\frac{4}{3}\pi abc$

Elliptisches Paraboloid: $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=z-z_0,\ z\ge z_0\}$



$a,b\in\mathbb{R}_{>0}$: Halbachsen der elliptischen Querschnitte

Torus: $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}-R\right)^2+(z-z_0)^2=r^2\}$



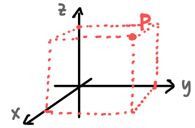
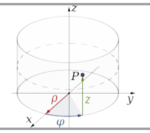
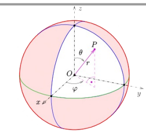
Donut :)

$r,R\in\mathbb{R}_{>0}$, $r<R$: Radien des Torus

Bem: • Gleichungen beschreiben nur die Randpunkte ∂P der Punktmengen. (sonst einfach ≤)
• x_0, y_0, z_0 beschreiben jeweils die Translation in die jeweilige Achsenrichtung.

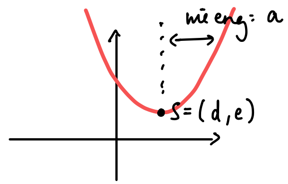
Wenn Gebiet U umschliessen (für Satz von Gauss, Stokes usw.) Richtung so wählen, dass das Gebiet immer links ist wenn man die Strecke dem Pfeil nach läuft (bzw. rechte-Hand-Regel)

Koordinatentransformation, Visualisierung :)

kartesisch	Zylindrisch	Sphärisch
	$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $z=z$	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta=\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$, $\psi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$		$r=\sqrt{\rho^2+z^2}$, $\theta=\arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)$, $\psi=\varphi$
$x=r\sin\theta\cos\psi$, $y=r\sin\theta\sin\psi$, $z=r\cos\theta$	$\rho=r\sin\theta$, $\varphi=\psi$, $z=r\cos\theta$	

Wichtige Gleichungen:

Parabel: Normalform: $f(x)=ax^2+bx+c$
Scheitelform: $f(x)=a\cdot(x-d)^2+e$



Wichtige Funktionen:

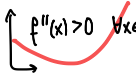
• Betragsfunktion: $f(x)=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\ge 0\end{cases}$

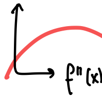
• Fakultät: $n! = 1\cdot2\cdot\dots\cdot n$

$(2n)!! = 2^n n!$

$(2n+2)!! = (2n+2)\cdot(2n)!!$

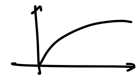
• konvexe/konkave Funktionen:

Konvex:  $f''(x)>0\ \forall x\in D$

Konkav:  $f''(x)<0\ \forall x\in D$

⚠ lineare Funktionen (d.h. Geraden) sind auf ganz $\mathbb{R}$ konvex und konkav, jedoch nicht strikt.

Aufpassen:



$f(x)=\sqrt{x}$: $\sqrt{\ }$ ist eine Funktion.
D.h. $f(x)$ hat nur 1 Lösung (Definitionsgemäss)
Wenn $\sqrt{\ }$ alleine da steht, z.B. $\sqrt{9}$ → $\sqrt{9}=3$.
Doch wenn z.B. eine solche Gleichung steht: $x^2-9=0$ (die Wurzel selber hat im Wertebereich nur $\mathbb{R}_+$)
$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm3$
(± tun wir "selber" noch davorsetzen.)
↳ 2 Lösungen.

Wichtiges aus LinAlg:

Skalarprodukt: $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2 = \alpha \in \mathbb{R}$

Axiome: 1. Linearität: $\langle \alpha\vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \alpha\vec{y} \rangle$

$\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$

$\langle \vec{x}, \vec{y}+\vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$

2. Symmetrie: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

3. Definitheit: $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ und

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = 0$

Norm: $\|\vec{x}\|^p = \alpha \in \mathbb{R}$

Axiome: 1. Definitheit: $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = 0$

2. Homogenität: $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$

3. Dreiecksungleichung: $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Induzierte Norm: $\forall v \in V: \ \|v\|^2 = \langle v, v \rangle$

Bspe von Normen für $V = \mathbb{R}^n$:

- Max. Norm: $\|v\|_\infty = \max\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- Euklidische Norm: $\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$
- p-Norm: $\|v\|_p = \sqrt[p]{v_1^p + v_2^p + \dots + v_n^p}$, $p \in \mathbb{N}$

Bspe von Normen für $V = C^0(a,b)$

- Max. Norm: $\|f\|_\infty = \sup f(x)$, $x \in (a,b)$
- Lp-Norm: $\|f\| = \left(\int_a^b f(x)^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in \mathbb{N}$

Äquivalente Normen: $\exists c > 0$ mit

$$\boxed{\frac{1}{c}\|\vec{x}\|^1 \leq \|\vec{x}\|^2 \leq c\|\vec{x}\|^1}$$

Bsp: $\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|v\|_2$

$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \leq n\,\|v\|_\infty$

$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|v\|_\infty$ ⊛

$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq \sqrt[p]{n}\,\|v\|_\infty$

⊛ Beweisbsp: Sei $v_i = \max_{j=1,\dots,n} |v_j|$.

$\|v\|_\infty = |v_i| = \sqrt{v_i^2} \leq \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = \|v\|_2$

$\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} \leq \sqrt{v_i^2 + \dots + v_i^2} = \sqrt{n} \cdot |v_i| = \sqrt{n}\,\|v\|_\infty$

$\Rightarrow \|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|v\|_\infty$

$\Rightarrow \|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent :)

Wichtige Eigenschaft von Matrizen:

$\forall A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \ \forall t \in [-R, R], \ \forall n \geq 1$:

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \left| \frac{A^n t^n}{n!} \right| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{|A|^n R^n}{n!} = e^{|A|R} < +\infty}$$

↳ diese Menge konvergiert normal auf beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$.

↳ d.h. die Funktion ist in jeder Komponente summandenweise diffbar.

Metrische Räume: sind Mengen X mit einer Abstandsfunktion $d: X \times X \to \mathbb{R}$

1) positive Definitheit: $\forall x,y: \ d(x,y) \geq 0$ & $d(x,y) = 0 \iff x = y$

2) Symmetrie $\forall x,y \in X: \ d(x,y) = d(y,x)$

3) Dreiecksungleichung: $\forall x,y,z \in X: \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Vektoren: "Listen von Elementen"

- (Euklidische) Betrag: $|x| = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \in \mathbb{R}^{\geq 0}$
- Dreiecksungleichung: $|x+y| \leq |x| + |y|$
- (Euklidisches) Skalarprodukt: $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n \in \mathbb{R}^n$
- Kreuzprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

Definitheit von Matrizen: 2 Möglichkeiten:

① EW (bei 2x2-Matrizen am einfachsten)

↳ EW λ_i mit $(A - \lambda_i I_n) \stackrel{!}{=} 0$

- $\lambda_i > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$: A positiv definit
- $\lambda_i < 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$: A negativ definit
- $\lambda_i > 0, \ \lambda < 0$: A indefinit

Bem: Diagonalmatrix: EW auf Hauptdiagonale

Spezielle Matrizen: z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ → keine Aussage

↳ auch nicht indefinit!

② Hauptminoren A_i berechnen:

$$A_i = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix}$$

- $A_i > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$: A positiv definit
- $A_1 < 0, \ A_2 > 0, \dots$ (alternierend): A negativ definit

muss mit <0 anfangen!!

- kein Muster: indefinit

Inverse: (2x2-Matrizen): $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$

Matrix diagonalisieren: A diagonalisierbar, falls $A = TDT^{-1}$

mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$ λ_i.. EW von A und

$T = [\,EV_1 \ EV_2 \ \dots\,]$ zu den dazugehörigen λ_i

→ Achtung EV_i zum λ_i! Reihenfolge nicht vertauschen.

Matrixexponential berechnen:

allg. Def. $e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Matrix diagonalisiebar: $e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}$

mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ EW

und $T = [\,EV_1 \ EV_2 \ \cdots \ EV_n\,]$ EV zum entsprechenden EW

Bem: Sei $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \phi \\ \phi & \lambda_n \end{bmatrix}$, dann $e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \phi \\ \phi & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$

Mathematische Räume:

Skalarprodukt (Euklidischer Raum)

induziert ↓

Norm (Normierter Raum)

induziert ↓

Metrik (Metrischer Raum)

induziert ↓

Topologie (Topologischer Raum)

Sonstiges:

Mathematische Konstanten: (Approximationen)

$\pi \approx 3{,}14159$
$e \approx 2{,}71828$

Wurzelapproximationen:

$\sqrt{2} \approx 1.41$ $\quad \sqrt{11} \approx 3.32$
$\sqrt{3} \approx 1.73$ $\quad \sqrt{13} \approx 3.61$
$\sqrt{5} \approx 2.24$ $\quad \sqrt{17} \approx 4.12$
$\sqrt{7} \approx 2.65$

Logarithmus Rechenregeln:

- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log(x^r) = r\log(x)$
- $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- $\log_b(x+y) = \log_b(x) + \log_b\left(1 + \frac{y}{x}\right)$
- $\log_b(\sqrt[n]{x}) = \log_b(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\log_b(x)$

$f(x) = e^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln(x)$

$a = b^x \Leftrightarrow \log_b a = x$

Basisumrechnung:

- $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$
- $\log_a(b) = \dfrac{1}{\log_b(a)} \Leftrightarrow \log_a(b) \times \log_b(a) = 1$
- $\ln(e^x) = e(\ln(x)) = x$

Exponentialfunktion:

$f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln(x)$ (bij. auf $\mathbb{R}_{>0}$)

$$\exp(a) = e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

- wichtiger Trick: $a^x = e^{x \cdot \ln(a)} = b^{x \cdot \log_b(a)}$ $\quad a = e^{\ln(a)}$
- $e^{a+b} = e^a e^b$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ $\quad$ • $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$ $\quad$ • $\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C$

Definitionen von e^x:

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (Exponentialreihe)
- $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (Def. als Grenzwert einer Folge mit $n \in \mathbb{N}$)

ein paar Werte:

$\log \hat{=}$ Basis e

$\log(1) = 0$	$\log(4) \cong 1{,}3863$	$e^1 \cong 2{,}718$	$e^{\frac{1}{2}} \cong 1{,}649$
$\log(2) \cong 0{,}6931$		$e^2 \cong 7{,}389$	$e^5 \cong 148{,}4$
$\log(3) \cong 1{,}0986$		$e^3 \cong 20{,}09$	$e^6 \cong 403{,}43$
		$e^4 \cong 54{,}60$	$e^7 \cong 1096{,}63$

Wichtige Ungleichungen:

- $|a+b| \leq |a| + |b|$ $\quad \Delta$-Ungleichung
- $|a-b| \geq ||a| - |b||$
- $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $2ab \leq a^2 + b^2$
- $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$
- $|ab - cd| \leq |a| \cdot |b-d| + |d| \cdot |a-c|$ $\quad$ Beweis: ausmultiplizieren

↳ wichtig bei gleichm. Konvergenz zeigen:

$$|f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \leq |f_n(x)| |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| |f_n(x) - f(x)|$$

rationale Funktionen:

- Polynome $f(x)$ (ganzrational)
- Bruch aus 2 Polynomen $\frac{f(x)}{g(x)}$ (gebrochenrational)

disjunkt: wenn 2 Körper kein gemeinsames Element besitzen.

gerade Zahlen: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. $\quad \{0, 2, 4, \ldots\}$

Primzahlen: $\{2, 3, 5, \ldots\}$

Potenztürme: von oben nach unten.

einige wichtige Potentiale:

$$\vec{v}(x,y) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \text{ auf } \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0, y < 0 \,\|\, y > 0\}$$

$$\Phi(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\boxed{\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) + \frac{1}{2}|f(x) - g(x)|}$$

$|a| < b \Rightarrow -b < a < b$

nicht vergessen!

$e^{2\pi i t}$

Mathematische Symbole

$A \Rightarrow B$	**Folgerung**: Aus A folgt B.
$A \Leftrightarrow B$	**Äquivalenz**: A ist äquivalent (gleichwertig) zu B.
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	**Zahlenmengen** (siehe S. 2).
$\mathbb{D}$, $\mathbb{W}$	**Definitionsmenge**, **Wertemenge** (siehe S. 14).
$f: x \mapsto y = f(x)$	y [abhängige Var.] ist Funktion von x [unabhängige Var.]
$A = \{a, b, c\}$	Die **Menge** A der Elemente a, b, c.
$[a, b]$	Das **Intervall** zwischen (und **mit**) a und b.
(a, b)	Das **Intervall** zwischen (aber **ohne**) a und b. Beispiel: $(2, 5]$ = Menge aller x, so dass $2 < x \leq 5$ gilt.
$5 \in \mathbb{N}$	**Element**: Die Zahl 5 liegt in der Menge $\mathbb{N}$; (5 ist natürliche Zahl).
$1.5 \notin \mathbb{N}$	**Nicht Element**: Die Zahl 1.5 liegt nicht in der Menge $\mathbb{N}$.
$P \in f$	Der Punkt P liegt auf dem Graphen der Funktion f.
$A \subset B$	**Enthalten in**: Die Menge A ist enthalten in B.
$g \subset E$	Die Gerade g (=Punktemenge) liegt auf der Ebene E.
$A \cap B$	A **Geschnitten mit** B: Elemente, welche in A **und** in B liegen.
$g \cap E$	Gerade g **geschnitten mit** E.
$A \cup B$	A **Vereinigt** mit B: Elemente, welche in A **oder** in B liegen.
$A \setminus B$	A **Ohne** B: Elemente, welche in A aber **nicht** in B liegen.
$\mid$	**Bedingung (Wenn)**. Beispiele: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ = Menge aller reellen x, welche kleiner als 1 sind. $P(B \mid A)$ = W'keit, dass B eintritt, **wenn** A bereits eingetreten ist.
$\forall$	**Für alle**: Beispiel: $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt...
$\exists$	**Es gibt**: Beispiel: $\exists x \in \mathbb{R}$: es gibt eine reelle Zahl x...

Das griechische Alphabet

A	α	Alpha	H	η	Eta	N	ν	Nü	T	τ	Tau
B	β	Beta	Θ	θ, ϑ	Theta	Ξ	ξ	Xi	Y	υ	Ypsilon
Γ	γ	Gamma	I	ι	Iota	O	o	Omicron	Φ	ϕ, φ	Phi
Δ	δ	Delta	K	κ	Kappa	Π	π	Pi	X	χ	Chi
E	ϵ, ε	Epsilon	Λ	λ	Lambda	P	ρ	Rho	Ψ	ψ	Psi
Z	ζ	Zeta	M	μ	Mü	Σ	σ, ς	Sigma	Ω	ω	Omega

Funktion	$y = f(x)$	$\mathbb{D}_f$	$\mathbb{W}_f$	$y = \bar{f}(x)$
Kehrwert	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
Quadrat	x^2	$\mathbb{R}$	$y \geq 0$	$\pm\sqrt{x} = \pm x^{\frac{1}{2}}$
Potenz	x^n	$\mathbb{R}$	n gerade: $y \geq 0$	$\pm\sqrt[n]{x} = \pm x^{\frac{1}{n}}$
			n **un**gerade: $\mathbb{R}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
Sinus	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$\arcsin(x)$
Cosinus	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$\arccos(x)$
Tangens	$\tan(x)$	$\mathbb{R}\setminus\{(n+\frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
Exponential	a^x	$\mathbb{R}$	$y > 0$	$\log_a(x)$
Exponential	10^x	$\mathbb{R}$	$y > 0$	$\log(x)$
Exponential	e^x	$\mathbb{R}$	$y > 0$	$\ln(x)$

Graphen wichtiger Funktionen:

5.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen

▶ **Exponentialfunktionen:** $\boxed{y = f(x) = a^x}$ $a > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

- Eulersche Zahl: $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718\ldots$.
- Wachstums- oder Zerfallsprozesse:

  $\boxed{N(t) = N_0 \cdot a^t}$ oder $\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{k\cdot t}}$

  wobei:

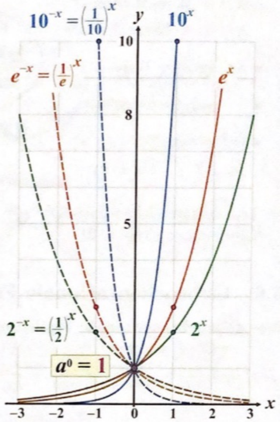
  t : Zeit.

  N_0 : Startwert (Population bei $t = 0$).

  $N(t)$: Population zur Zeit t.

  $a = e^k$: Wachstumsfaktor: $\boxed{a = 1 + \frac{p}{100}}$ mit

  $p : \begin{cases} \text{Wachstum} & (p > 0) \\ \text{Zerfall} & (p < 0) \end{cases}$ in % pro Zeiteinheit.



⇒ Potenzsätze, Logarithmensätze siehe S. 5.

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

⇒ Grenzwerte siehe S. 25.

▶ **Logarithmusfunktionen:** $\boxed{\overline{f}(x) = \log_a(x)}$ $x > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$.

$\overline{f}(x) = \log_a(x)$ ist Umkehrfunktion zu $f(x) = a^x$:

- Zehnerlogarithmus:

  $\boxed{\overline{f}(x) = \log_{10}(x) = \log(x)}$

  $\log(10^x) = x, \qquad 10^{\log(x)} = x \qquad (x > 0)$

- Natürlicher Logarithmus:

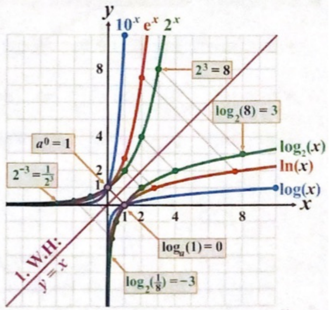
  $\boxed{\overline{f}(x) = \log_e(x) = \ln(x)}$

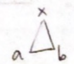
  $\ln(e^x) = x, \qquad e^{\ln(x)} = x \qquad (x > 0)$

- Binärer Logarithmus:

  $\boxed{\overline{f}(x) = \log_2(x) = \text{lb}(x)}$

  $\log_2(2^x) = x, \qquad 2^{\log_2(x)} = x \qquad (x > 0)$





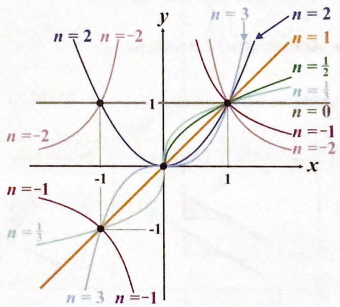
⇒ Potenz- und Logarithmensätze siehe S. 5.

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

5.4 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen: $\boxed{f(x) = x^n}$ $n \in \mathbb{Q}$.

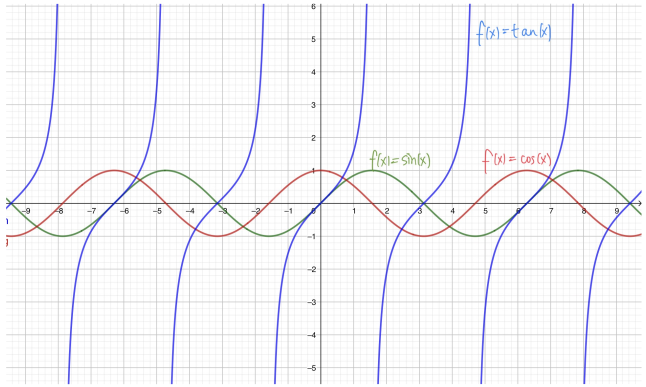
$n = 0$	Konstante Funktion
$0 < n < 1$	Wurzelfunktionen
$n = 1$	Lineare Funktion
$n \in \mathbb{N};\ n > 1$	Parabeln n-ter Ordnung
$n \in \mathbb{Z};\ n < 0$	Hyperbeln n-ter Ordnung

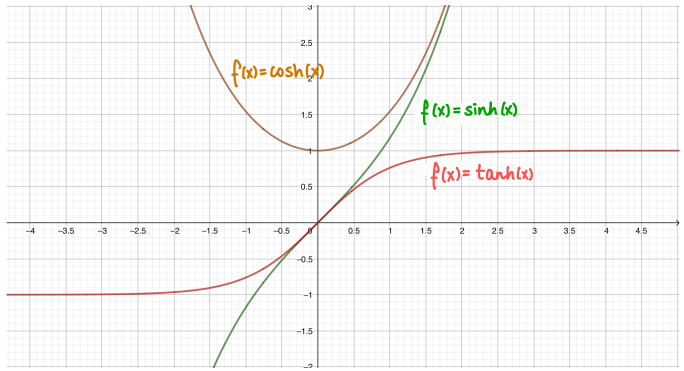


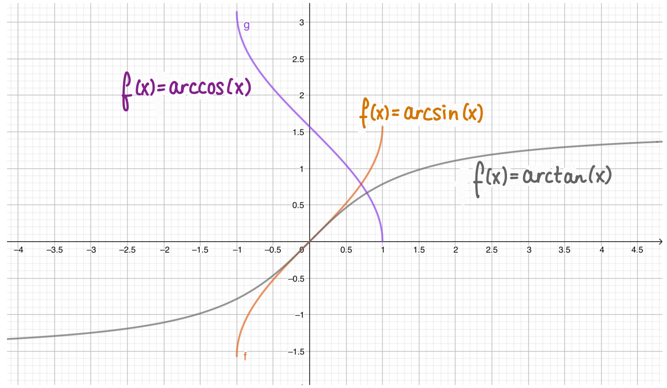
Der Graph von $f(x) = x^n$ ist...

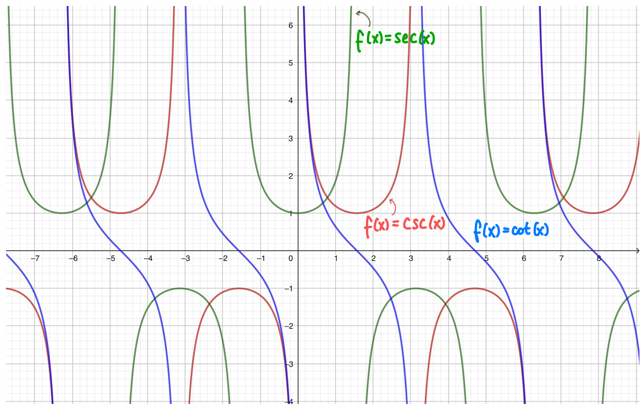
- ...spiegelsymmetrisch zur y-Achse, falls n gerade.
- ...punktsymmetrisch zum Ursprung, falls n ungerade.

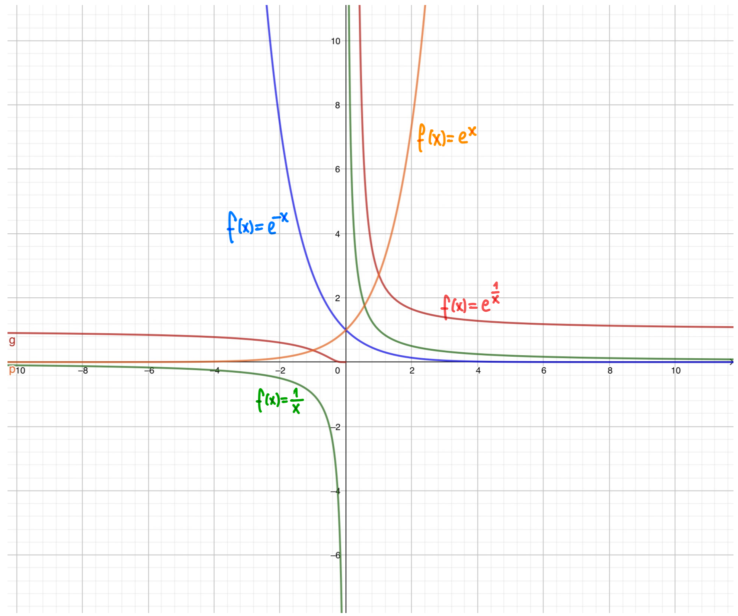
⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

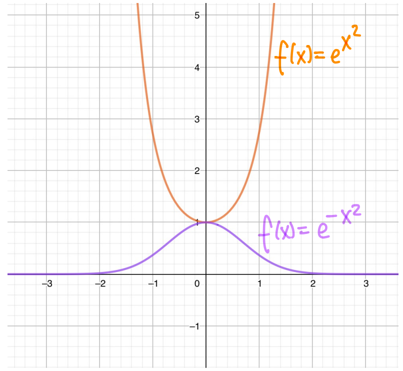


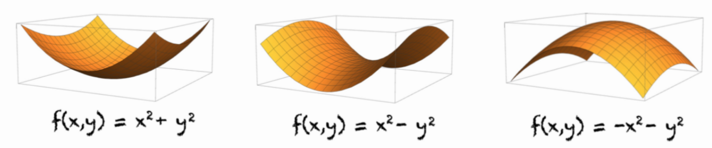


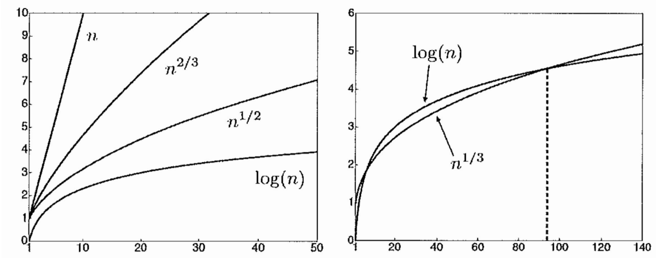








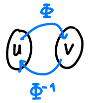




Doch... Wie wendet man diese Sätze konkret an?

Diffeomorphismus:

Frage: Sei $\Phi: U\subset\mathbb{R}^n \to V\subset\mathbb{R}^n$. Ist Φ ein Diffeo auf ihrem Bild?



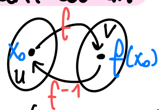
① Beweisen, dass Φ stetig diffbar ist.
② Differenzial $d\Phi$ berechnen (Jacobi-Matrix)
③ Zeigen, dass $\det d\Phi(x)\neq 0 \quad \forall x\in U$
④ Umkehrsatz $\Rightarrow \Phi^{-1}$ ist lokal $\in C^1 \Rightarrow \Phi$ ist lokal ein Diffeo
⑤ Φ bildet die Menge U bijektiv auf V $\Rightarrow \Phi$ ist (global) ein Diffeo.

Bem: diese Methode (über Umkehrsatz), Vorteil: man muss Φ^{-1} nicht explizit bestimmen.

2. Methode: direkt: Φ stetig diffbar, invertierbar und Φ^{-1} stetig diffbar $\Rightarrow \Phi$ Diffeo (lokal)
① $\Phi^{-1}: V\to U$ explizit bestimmen
② zeigen, dass Φ und Φ^{-1} C^1-Funktionen sind (d.h. 1x diffbar & Differenzial stetig).

Umkehrsatz aka inverses Funktionentheorem:

Sei $f: U\subset\mathbb{R}^n\to V\subset\mathbb{R}^n$.



$\boxed{\det(df(x_0))\neq 0} \Rightarrow f$ ist lokal (um x_0) umkehrbar.
d.h. ∃ offene Umgebungen U_0 von x_0 und V_0 von $f(x_0)$ s.d. f eingeschränkt auf U_0 ($f|_{U_0}: U_0\to V_0$) bijektiv ist)
↳ d.h. invertierbar

Die inverse Abbildung $f|_{U_0}^{-1}: V_0\to U_0$ ist auf V_0 von der Klasse C^1.

verschiedene Punkte!
für die Ableitung gilt: $\boxed{d(f^{-1})(y) = (df(x))^{-1}}$ wobei $y=f(x)$.
inverse der Jacobi-Matrix von f

oft: man hat y geg. & muss x bestimmen sodass $y=f(x)$.
Der Umkehrsatz besagt, dass eine diffbare Abb. mit invertierbarem Differenzial (d.h. $df\neq0$) lokal ein Diffeo ist.
Bem: oft gefragt: $d(f^{-1})(y_0)$? → zuerst Punkt x_0 bestimmen!

Der Satz der impliziten Funktionen:

Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^\ell$ offen und sei $f:\Omega\to\mathbb{R}^\ell$ stetig diffbar.
Ist der Punkt $p_0=(a,b)\in\Omega$ (mit a = erste k Koordinaten und b = letzte ℓ Koordinaten von p_0 regulär (d.h. Rang von $df(p_0)$ maximal) auf f mit

$\boxed{f(p_0)=0}$ und $\boxed{\det(d_yf(p_0))\neq0}$

(d.h. $d_yf(p_0)$ ist invertierbar), so lässt sich das Gleichungssystem $f(x,y)=0$ nach den Koordinaten y auflösen.
D.h. ∃ eine offene Umgebung U von a in $\mathbb{R}^k$ und eine offene Umgebung V von b in $\mathbb{R}^\ell$ und ein C^1-Diffeo $h:U\to V$ s.d.

$$\boxed{f(x,h(x))=0}$$

mit $h(x)$ = lokale Auflösung der Gleichung $f(x,y)=0$ nach y um p_0
↳ Der Satz sagt uns, ob $f(x,y)=0$ eine lokale Auflösung nach x (oder y) besitzt.
& ausserdem gilt:

$$\boxed{dh(x) = -\big(d_yf(x,\underbrace{h(x)}_{p_0})\big)^{-1}\cdot d_xf(x,\underbrace{h(x)}_{p_0})}$$

Ableitung von h (Jacobi-Matrix)
gleicher Punkt

Doch... wie kann ich mir das vorstellen?:
$f(x,y)=0$, $x\in\mathbb{R}^k$ $y\in\mathbb{R}^\ell$ d.h. $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^\ell\to\mathbb{R}^\ell$

$$df(x,y) = (df_x(x,y)\,|\,df_y(x,y)) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_\ell}\\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k} & \frac{\partial f_\ell}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_\ell}{\partial y_\ell} \end{array}\right] \ell$$

$k=n-\ell$ | ℓ
d_xf | d_yf *

* d_yf ist die Untermatrix der part. Ableitungen der Variablen, nach der man auflösen möchte (nicht unbedingt y!)
d_xf: alle anderen.

Begriff "auf dem Bild" Diffeo, Bij usw: ganz "normal" nach Diffeo bzw. Bij. gefragt!

Wichtige Beziehungen:

zum Umkehrsatz: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, Matrix df nicht quadratisch (d.h. $n\neq m$) $\Rightarrow$ f nicht umkehrbar (weil Matrix nicht invertierbar!)

Zur Konvergenz:

- Eine beschränkte Folge a_n, welche nicht konvergiert, hat mindestens 2 Häufungspunkte.
- Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig konvergent mit den Grenzfunktionen f und g. Dann gilt:
  falls die Funktionen unbeschränkt sind:
  ▶ Wenn f,g stetig, konv. (f_n+g_n) gleichm. gegen $f+g$.
  ▶ i.A. gilt das nicht für $f\cdot g$
  siehe z.B. $f_n(x)=x-\frac{1}{n}=g_n(x)$, $f(x)=x=g(x)$.
  falls die Funktionen beschränkt sind:
  ▶ f_n+g_n konvergiert gleichmässig gegen $f+g$
  ↳ müssen nicht mehr stetig sein!
  ▶ Wenn f,g stetig, konv. $f_n g_n$ gleichm. gegen $f\cdot g$
- i.A. konvergieren Polynome nicht gleichmässig (da unbeschränkt)
- normale & somit auch gleichm. Konvergenz gilt auf beschränkten Teilmengen
- $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ konvergiert nicht gleichmässig auf $\mathbb{R}$ (da unbeschränktes Polynom)
  ↳ dasselbe gilt für sin, cos, ...

Funktionen:

- ∄ stetige, surjektive Funktion $f:[a,b]\to\,]c,d[$
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f'(x)>0$ und $\lim f'(x)\neq0 \Rightarrow f$ ist bij auf $\mathbb{R}$
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ geht irgendwo abrupt $\to\infty$: f ist nicht stetig.

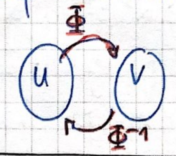
ab hier ein Paar Kochrezepte:

Diffeo & Satz der impliziten Fkt. über:

- Diffeo
- Satz der implizierten Funktionen
- Umkehrsatz (inverses Funktionentheorem)

ganz "normal" Diffeo zeigen, aber Surjektivität schon erfüllt :)

"auf ihrem Bild Diffeo"



d.h. $\Phi: U \to V$

$V = \Phi(U)$ Bild

so diffeo

Kochrezepte:

Diffeomorphismus: Sei $\Phi: U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$. Ist Φ ein Diffeo?

1. Beweisen, dass Φ stetig diffbar ist
2. Differenzial $d\Phi$ berechnen (Jacobi-Matrix)
3. Zeigen, dass $\boxed{\det d\Phi(x) \neq 0}$, $\forall x \in U$
4. Umkehrsatz $\Rightarrow$ Φ ist lokal ein Diffeo (bzw. Umkehrfunktion Φ^{-1} ist C^1)
5. Φ bildet die Menge U bijektiv auf V $\Rightarrow$ Φ ist (global) ein Diffeo.

} über Umkehrsatz ① Vorteil: Φ^{-1} muss nicht explizit bestimmen :)

② direkt:

Φ stetig diffbar, invertierbar & Φ^{-1} stetig diffbar $\Rightarrow$ Φ Diffeo (lokal)

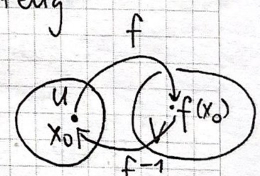
1) $\Phi^{-1}: V \to U$ explizit bestimmen

2) zeigen, dass Φ und Φ^{-1} C^1-Funktionen sind

↳ diffbar (1x) & Differenzial stetig

↱ inverses Funktionentheorem

Umkehrsatz: sei $f: U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$.



$\boxed{\det(df(x_0)) \neq 0}$ $\Rightarrow$ f ist lokal (um x_0) umkehrbar

(d.h. $\exists$ offene Umgebungen U von x_0 und V von $f(x_0)$ s.d. f eingeschränkt auf U ($f|_U: U \to V$) bijektiv ist)

↳ d.h. invertierbar.

Die inverse Abbildung $f|_U^{-1}: V \to U$ ist auf V von der Klasse C^1.

&

oft muss x herausfinden s.d. $y = f(x)$

für die Ableitung gilt: $\boxed{d(f^{-1})(y) = (\underbrace{df(x)})^{-1}}$ wobei $y = f(x)$

Inverse der Jacobi-Matrix von f.

verschiedene Punkte !!

↳ Umkehrsatz besagt, dass eine diffbare Abb. mit invertierbarem Differenzial (d.h. $df \neq 0$) lokal ein Diffeo ist.

↳ Bem: oft gefragt: $d(f^{-1})(y)$? → zuerst muss Punkt x_0 finden!

Der Satz der impliziten Funktionen:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ offen & sei $f: \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ stetig diffbar.

Ist der Punkt $p_0 = (a,b) \in \Omega$ (mit a = erste k Koordinaten und b = letze ℓ Koordinaten von p_0) regulär von f mit (regulär = Rang von $df(p_0)$ maximal)

$$f(p_0) = 0 \quad \text{und} \quad \det(d_y f(p_0)) \neq 0 \quad (\text{d.h. } d_y f(p_0) \text{ ist invertierbar})$$

so lässt sich das Gleichungssytem $f(x,y) = 0$ nach den Koordinaten y auflösen. D.h. $\exists$ eine offene Umgebung U von a in $\mathbb{R}^k$ und eine offene Umgebung V von b in $\mathbb{R}^\ell$ und ein C^1-Diffeo $h: U \to V$ s.d.

$$f(x, h(x)) = 0$$

$h(x)$.. lokale Auflösung der Gleichung $f(x,y) = 0$ nach y um p_0.

↳ Satz sagt uns, ob $f(x,y) = 0$ eine lokale Auflösung nach y (oder x) besitzt.
& ausserdem gilt

$$dh(x) = -\big(d_y f(\underbrace{x, h(x)}_{p_0})\big)^{-1} \cdot d_x f(\underbrace{x, h(x)}_{p_0})$$

Ableitung von h (Jacobi-Matrix)

gleicher Punkt

$f(x,y) = 0$, $x \in \mathbb{R}^k$ $y \in \mathbb{R}^\ell$ d.h. $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell$

$$df(x,y) = (df_x(x,y) \mid df_y(x,y)) =$$

$d_y f$ *

$$= \left[\begin{array}{cccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_\ell} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1} & - & \cdots & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k} & \frac{\partial f_\ell}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_\ell}{\partial y_\ell} \end{array}\right] \Big\} \ell$$

$k = n - \ell$ $\qquad$ ℓ

$d_x f$

* der Untermatrix der part. Ableitungen der Variablen, nach der man auflösen möchte. $d_x f$ -- alle anderen.

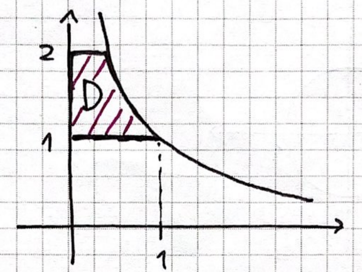
(ganz "normal" bij) → f auf dem Bild bijektiv heisst: $f: U \to V$ bij. $\quad U \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} V$

Optimierung mit NB mittels Teilbereichen:

Bsp: Bestimme die globalen Extrema von $f(x,y) = xye^{-xy}$ auf

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0;\ 1 \leq y \leq 2,\ |xy| \leq 1\}$$

1. Bereich zeichnen:



2. D ist abgeschlossen & beschränkt $\Rightarrow$ $f(x,y)$ nimmt ein Max. und Min. in D an.
3. Innere Kandidaten: berechnen mittels $\nabla f(x,y) \overset{!}{=} 0$
4. Randpunkte: hier funktioniert Lagrange nicht, da keine regulären Punkte. (Man muss Ungleichungen verwenden)

$\Rightarrow$ Teile Rand in 4 Teilbereichen:

$$\varphi_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ 1 \leq y \leq 2\}$$

$$\varphi_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1,\ 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\varphi_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1,\ 1 \leq y \leq 2\}$$

$$\varphi_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2,\ 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}\}$$

5. $f(x,y)$ auf den verschiedenen φ_i auswerten (hier: Randpunkte bereits in φ_i inbegriffen :))

$$f(x,y)\big|_{\varphi_1} = 0$$

$$f(x,y)\big|_{\varphi_2} = xe^{-x} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x,y)\big|_{\varphi_3} = e^{-1}$$

$$f(x,y)\big|_{\varphi_4} = 2xe^{-2x} \quad 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}$$

$\rightarrow$ 6. Max. Funktionswert ist somit e^{-1} und der min. Funktionswert 0.

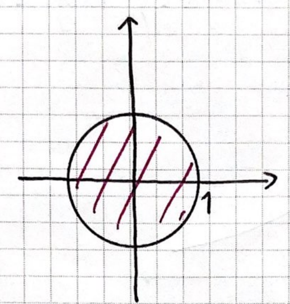
Somit gilt $\min_D f(x,y) = 0$ und $\max_D f(x,y) = e^{-1}$

$\hookrightarrow$ φ_1 = alle möglichen Minima, φ_3 = alle möglichen Maxima.

Optimierung mit NB mittels Parametrisierungen:

Bsp: Bestimme die globalen Extrema von $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ auf

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$



1. NB zeichnen
2. Menge ist abgeschlossen & beschränkt $\Rightarrow$ f nimmt sein Max. & Min in der Menge an.
3. Innere Kandidaten: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 4y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$, $\quad 4y=0 \rightarrow y=0$

$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ in der Menge drin. ✓

Randpunkte:

4. Rand parametrisieren:

$$\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (f \circ \gamma)(t) = \cos^2(t) + 2\sin^2(t) - \cos(t)$$

5. Kandidaten finden auf dem parametrisierten Rand: Funktion $f\circ\gamma$ nach t ableiten & gleich 0 setzen:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t) = 2\sin(t)\cos(t) + \sin(t) \overset{!}{=} 0} \qquad (f\circ\gamma)(t) = f(\gamma(t))$$

$\rightarrow \sin(t) = 0 \;\; || \;\; \cos(t) = -\frac{1}{2}$ $\quad \rightarrow$ in $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ "einsetzen":

$\rightarrow$ Kandidaten: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

6. Kandidaten in Funktion einsetzen & Funktionswerte vergleichen :)

Stetigkeit zeigen, Kochrezepte

Zusammenhang der Begriffe:

$$\boxed{f \text{ lipschitz stetig}} \Rightarrow \boxed{f \text{ gleichmässig stetig}} \Rightarrow \boxed{f \text{ stetig}}$$

$$\boxed{f \text{ differenzierbar}} \xrightarrow{\text{Ableitung beschränkt}^*} \boxed{f \text{ lipschitz stetig}}$$

d.h. $|\ldots| \leq M \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f \text{ stetig}} \xrightarrow{\Omega \text{ kompakt}} \boxed{f \text{ gleichmässig stetig}}$$

* Ableitung nicht beschränkt $\Rightarrow$ nicht L-stetig.

Stetigkeit zeigen:

1. Epsilon-Delta Kriterium (= Weierstrass-Kriterium)
2. Grenzwertkriterium
3. Topologisches Kriterium
4. Folgenkriterium

①: Epsilon-Delta Kriterium:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0, \text{ s.d. } \forall |x-a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

1) $|f(x) - f(x_0)| = \ldots < \varepsilon$ setzen

2) Umformen & 1 $\delta(\varepsilon, a)$ finden s.d. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ erfüllt.

↳ wenn δ gefunden dann Beweis geschafft, denn da gilt $\forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Bsp:

② Grenzwertkriterium (pkt.-weise Stetigkeit zeigen):

1) f auf Ω definiert

2) $\exists \lim_{x \to a} f(x)$, d.h. $\lim_{x \to a} f(x) \neq \infty$ <u>und</u>

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

③ Folgenkriterium: (pkt.-weise Stetigkeit)

Für jede Folge x_n in Ω mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Vorgehen: 1) wähle eine Folge $x_n \in \Omega$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

2) zeige, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Gleichmässige Stetigkeit:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.d. $\forall x, y \in \Omega$ mit $|x-y| < \delta$ es gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

↪ δ hängt nur von ε ab!

Lipschitz-Stetigkeit

$\exists L \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \in \Omega$

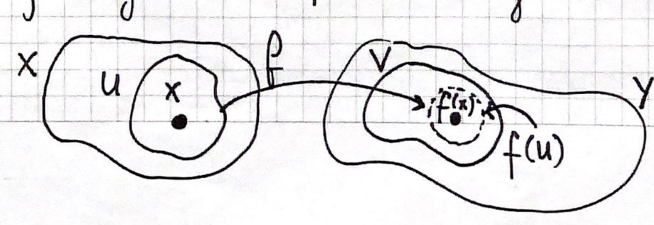
L .. Lipschitz-Konstanten für f.

→ entweder mittels Def. <u>oder</u> f diffbar & Ableitung beschränkt zeigen.

③ Topologisches Kriterium:

Eine Funktion zwischen 2 topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jeden Punkt gilt: für jede Umgebung des Bildpunktes dieses Punktes gibt es eine Umgebung des Punktes, deren Bild komplett in der Umgebung des Bildpunktes liegt.

$f: U \to V$



→ Wikipedia