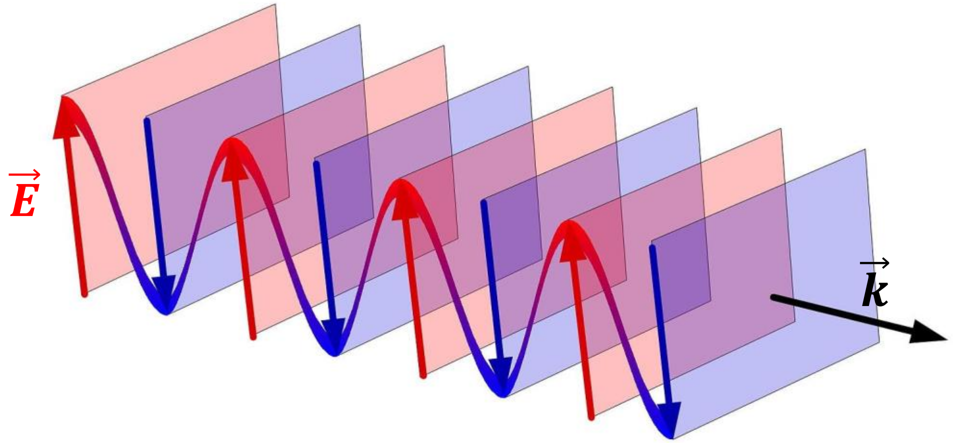
Übung 11

Feldwinkelspektrum

Übung 11

Recap

Ebene Wellen



Wellen der Form:

$$\vec{E}(r) = \overrightarrow{E_0} \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

K Vektor beschreibt:

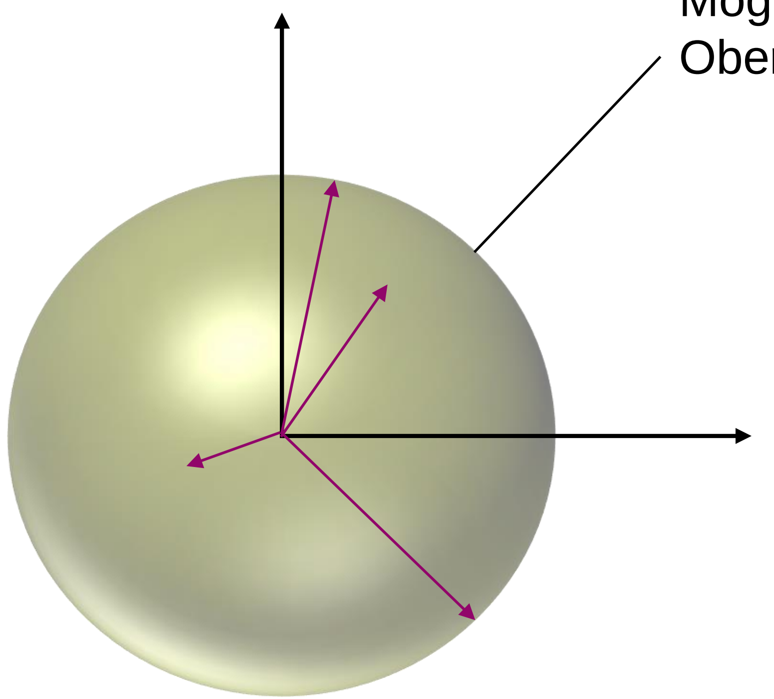
- **Propagationsrichtung** der Welle (x,y und z Komponente)
- **Wellenlänge** gegeben durch: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$
- **Geschwindigkeit** der Welle: $v = \frac{\omega}{k}$

Dispersionsrelation

Eine ebene Welle im Raum muss die Helmholtzgleichung erfüllen

$$\left[\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right] E(r) = 0 \rightarrow |\vec{k}|^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

Was für Wellen können für eine Quelle mit Kreisfrequenz ω existieren?



Paraxiale Approximation

Frauenhofer Approximation

Taylorentwicklung von $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \simeq r\ - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r}$

Phasenterm: $\exp(ikR) \simeq \exp(ik(r - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r}))$

Greensche Funktion: $$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \underbrace{\exp\left(ik\left(r - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r}\right)\right)}_{\text{Phasenterm}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi r}\left[\left(1 + \frac{i}{kr} - \frac{1}{k^2r^2}\right)\boldsymbol{I} + \left(\frac{3}{k^2r^2} - \frac{3i}{kr} - 1\right)\cdot\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T}{r^2}\right]}_{\text{Amplitudenterm } (\boldsymbol{R} \simeq \boldsymbol{r})}$$

Feldwinkelspektrum

Feldwinkelspektrum

Idee:

Beschreibe ein beliebiges E-Feldes als Superposition von Ebenen Wellen

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \iiint_k \underbrace{\widehat{\boldsymbol{E}}\left(k_x, k_y, k_z\right)}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)}}_{\text{Propagationsrichtung}} \cdot dk_x dk_y dk_z$$

Annahme:

Felder sind monochromatisch → Alle Ebenen wellen besitzen gleiches ω

Dispersionsrelation: $k^2 = n(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \rightarrow k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_{k_x} \int_{ky} \hat{E}(k_x, k_y, k_z) \cdot e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} \cdot dk_x dk_y$$

Feldwinkelspektrum

Idee:

Beschreibe ein beliebiges E-Feldes als Superposition von Ebenen Wellen

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \iiint_k \underbrace{\hat{\boldsymbol{E}}(k_x, k_y, k_z)}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)}}_{\text{Propagationsrichtung}} \cdot dk_x dk_y dk_z$$

Annahme:

Felder sind monochromatisch → Alle Ebenen wellen besitzen gleiches ω

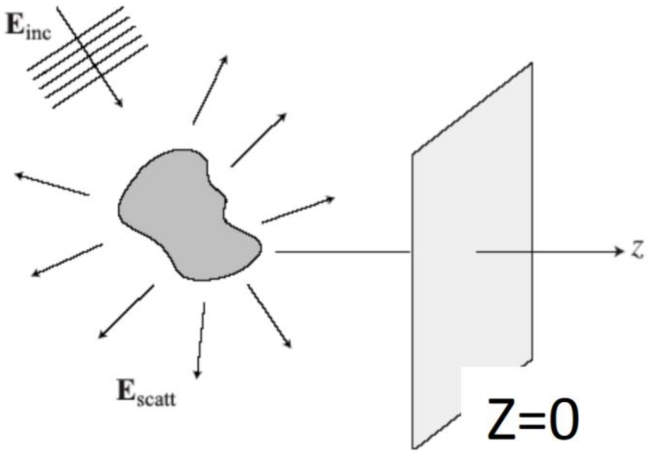
Dispersionsrelation: $k^2 = n(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \rightarrow k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_{k_x} \int_{ky} \hat{E}(k_x, k_y, k_z) \cdot e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} \cdot dk_x dk_y$$

Feldwinkelspektrum

Durch **Projektion auf Ebene Wellen** erhalten wir die **einzelnen Wellenanteile** des E-Feldes

$$\hat{\boldsymbol{E}}\left(k_x, k_y, k_z\right) \propto \left\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), e^{i\cdot\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right\rangle = \iiint E(r)\cdot e^{-i\left[k_x\cdot x + k_y\cdot y + k_z\cdot z\right]}\,dxdydz$$



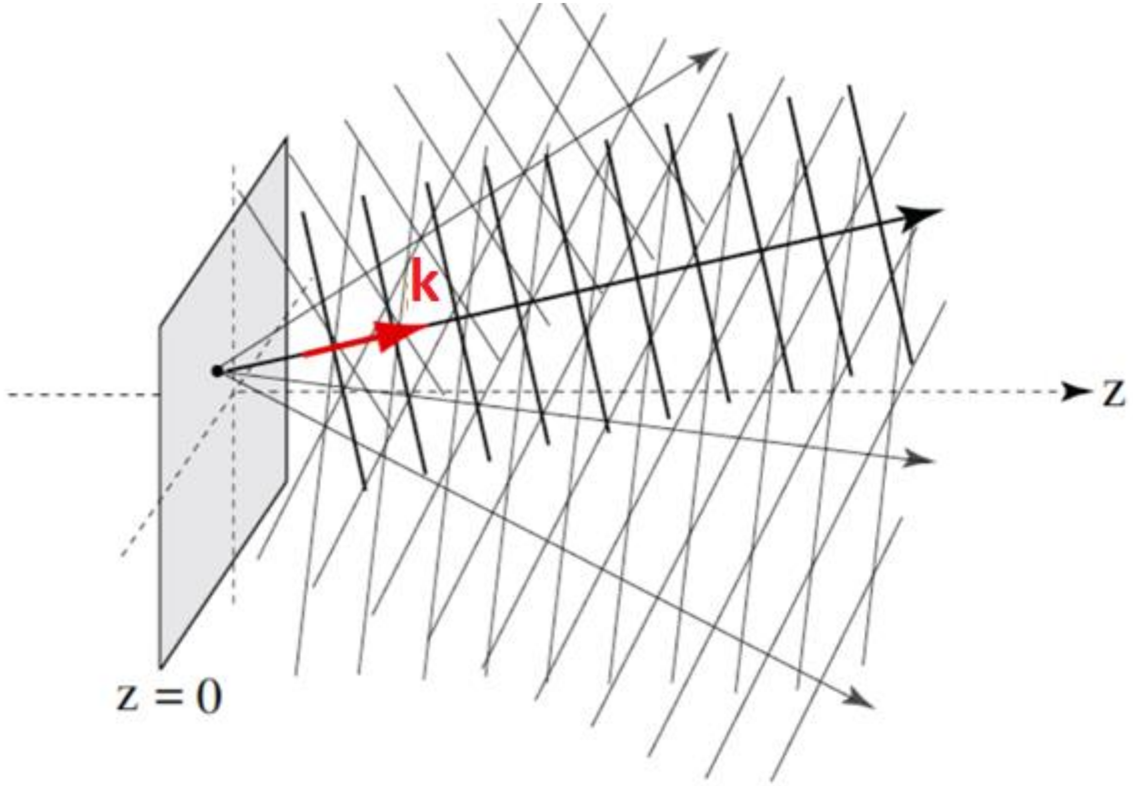
Meist reicht uns das Feldwinkelspektrum bezogen auf eine Ebene z=const.
Wir betrachten dann das Feldwinkelspektrum $\hat{\boldsymbol{E}}\left(k_x, k_y; z = const\right)$

$$\hat{\boldsymbol{E}}\left(k_x, k_y; z = const\right) = \frac{1}{4\pi^2}\iint E(x, y; z = const)\cdot e^{-i(k_x\cdot x + k_y\cdot y}\,dxdy$$

Idee des Feldwinkelspektrums

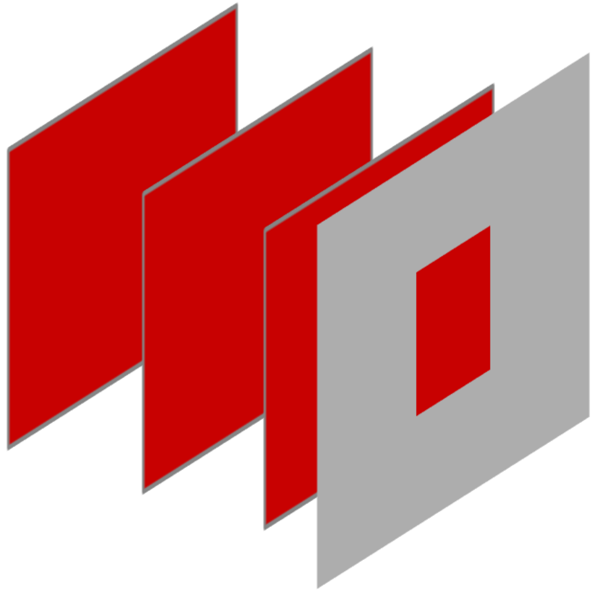
Wir zerlegen unser Feld in ebene Wellen in einer konstanten Ebene.

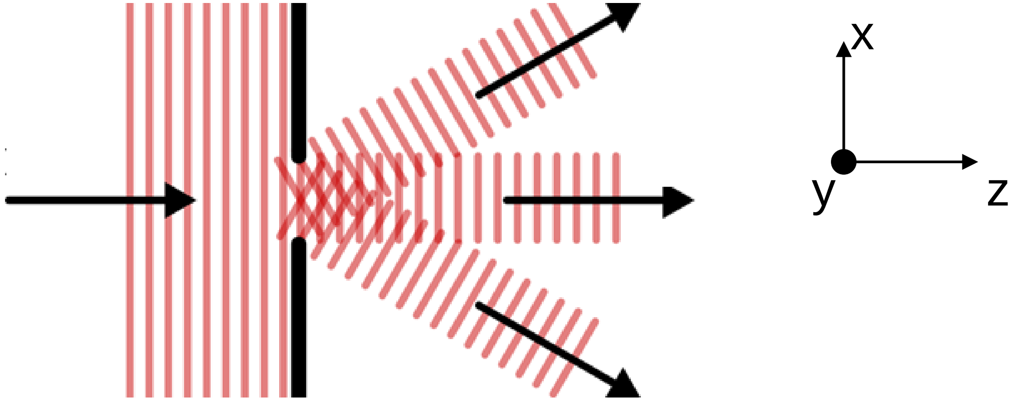
Jede Ebene welle propagiert in eine eigene Richtung $\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$



Beispiel

Wir betrachten eine Ebene Welle, welche durch ein “Fenster” mit Länge a in der Ebene z=0 propagiert





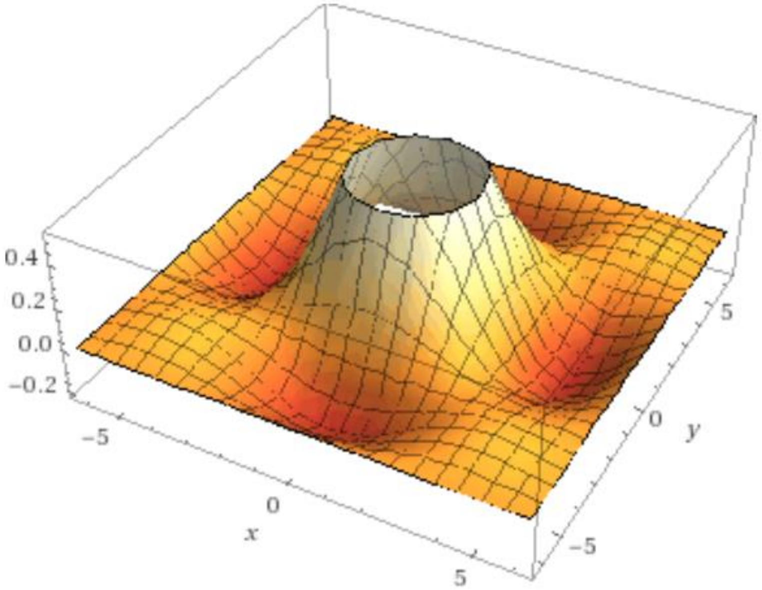
E-Feld in der Ebene $z = 0$:

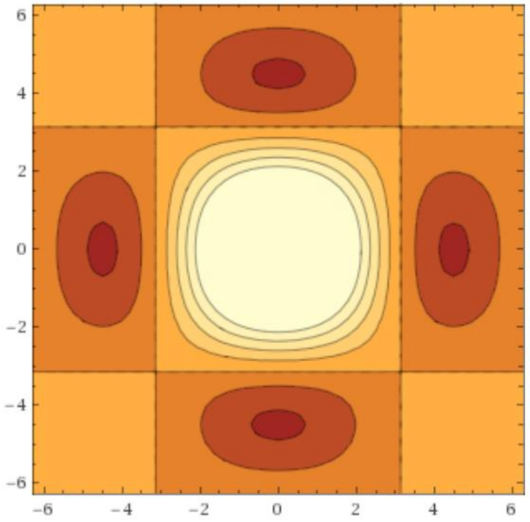
$$\boldsymbol{E}(x, y; z = 0) = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{0}_{\{|x|<a, |y|<a\}}}$$

Beispiel

Feldwinkelspektrum in der Ebene z = 0:

$$\hat{\boldsymbol{E}}(k_x, k_y; z=0) = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \boldsymbol{E_0} \cdot e^{-i(k_x \cdot x + k_y \cdot y)}\, dxdy = \underline{\underline{\boldsymbol{E_0} \cdot 4a^2 sinc(k_x \cdot a) sinc(k_y \cdot a)}}$$





Helmholtzgleichung

Das Elektrische Feld im freien Raum muss immer die Helmholtzgleichung erfüllen:

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla^2 + k^2\right) \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{0} \\
\left(\nabla^2 + k^2\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_y y]} \, \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y &= \mathbf{0} \\
\left(\nabla^2 + k^2\right) \left(\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_y y]}\right) &= \mathbf{0} \\
\left(\partial_z^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2\right) \left(\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_y y]}\right) &= \mathbf{0} \\
\left(\partial_z^2 - k_x^2 - k_y^2 + k^2\right) \left(\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_y y]}\right) &= \mathbf{0} \\
\left(\partial_z^2 + k_z^2\right) \left(\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_y y]}\right) &= \mathbf{0} \\
\left(\partial_z^2 + k_z^2\right) \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) &= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Helmholtzgleichung

Elektrisches Feld erfüllt **Helmholtzgleichung**

$$\Rightarrow (\partial_z^2 + k_z^2) \cdot \hat{\boldsymbol{E}}\left(k_x, k_y; z\right) = 0$$

Allgemeine Lösung:

$$\hat{\boldsymbol{E}}\left(\mathrm{k_x}, \mathrm{k_y}; \mathrm{z}\right) = \hat{\boldsymbol{E}}\left(k_x, k_y; 0\right) \cdot e^{\pm i k_z \cdot z}$$

(Feldwinkelspektrum in der Ebene z) $=$ (Feldwinkelspektrum bei z=0) · (Propagationsterm)

Allgemeines Vorgehen

Gegeben: $\mathbf{E}(x, y, 0)$
Gesucht: $\mathbf{E}(x, y, z)$

1. Feldwinkelspektrum in Ebene $z = 0$:

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) \;=\; \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, y, 0) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[k_x x + k_y y]} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2. Feldwinkelspektrum in Ebene $z \neq 0$ (Propagationsrichtung!):

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) \;=\; \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) \cdot \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} k_z z}$$

3. Elektrisches Feld in Ebene $z \neq 0$:

$$\mathbf{E}(x, y, z) \;=\; \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_y y]} \, \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y$$

Letzter Schritt: Rücktransformation

Letzter Schritt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(x,y,z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x,k_y;z)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_y y]}\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x,k_y;0)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x x + k_y y \pm k_z z]}\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x,k_y;0)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k_x x + k_y y \pm \sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\,z\right]}\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y
\end{aligned}$$

Unmöglich analytisch zu berechnen!

Näherungsverfahren benötigt!

Paraxiale Approximation

Ausdruck für k_z meist zu schwierig um integral zu rechnen

$$k_z = k \cdot \sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}}$$

Annahme: k_x, k_y sind klein im Vergleich zu k_z
→ Dominierender Anteil der Strahlen propagieren in z Richtung

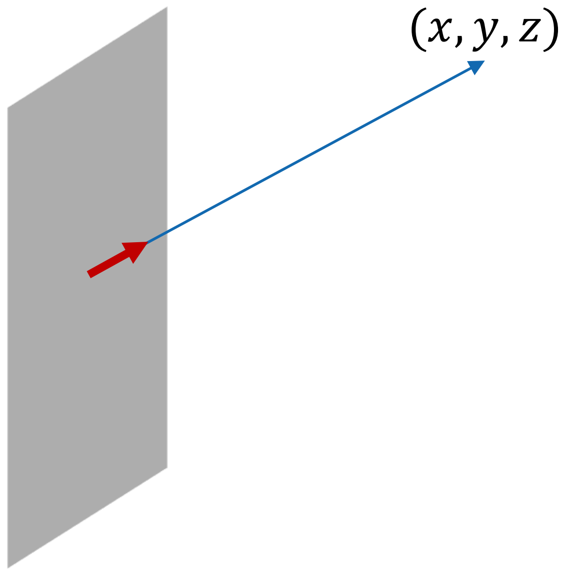
$$k_z = k \cdot \sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} \simeq k \cdot \left(1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k^2}\right) \simeq k$$

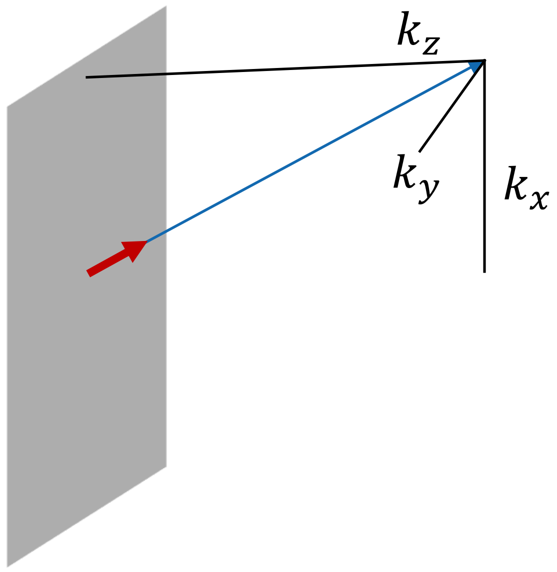
Fernfeld und Feldwinkelspektrum

Wir möchten das Feld in sehr weiter Entfernung berechnen

Wir definieren neu einen **Richtungsvektor:**

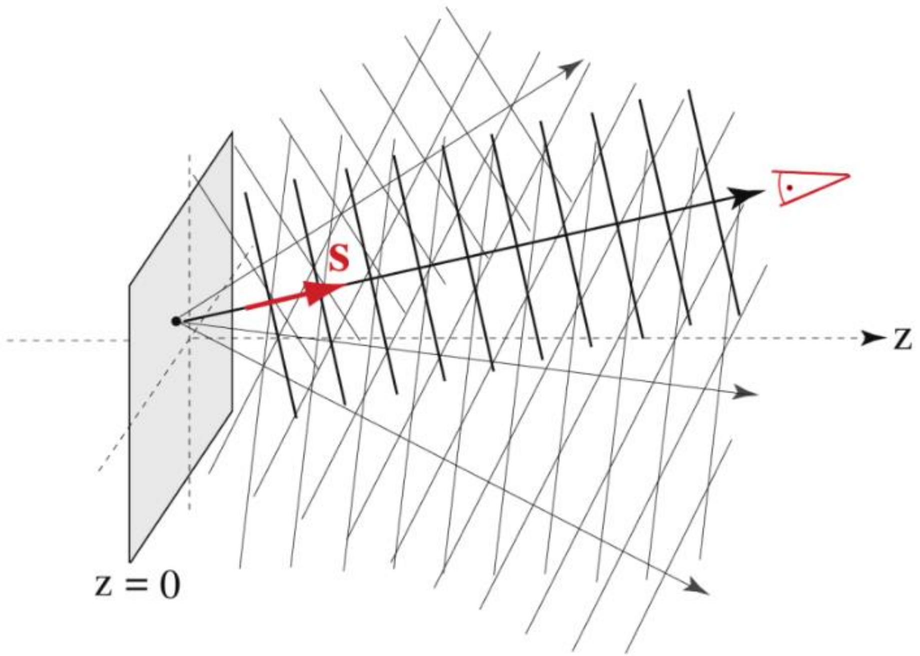
$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{e_r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} = \frac{k}{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} k_x/k \\ k_y/k \\ k_z/k \end{pmatrix}$$





Fernfeld und Feldwinkelspektrum

Das Feld genügend weit von der Ebene entfernt entspricht gerade der ebenen Welle, welche in diese Richtung propagiert.



$$\boldsymbol{E}_\infty(s_x, s_y) \propto \widehat{\boldsymbol{E}}(k\cdot s_x, k\cdot s_y; 0)\cdot\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= -2\pi i k\cdot s_z\,\widehat{\boldsymbol{E}}(k\cdot s_x, k\cdot s_y; 0)\cdot\frac{e^{ikr}}{r}$$