Übung 1

Elektrostatik / Magnetostatik

Mathematische Grundlagen

Divergenz eines Vektorfeldes

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$div(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein **skalares Feld**, welches die Information enthält, wieviel **Fluss** an einem Punkt **generiert wird**.

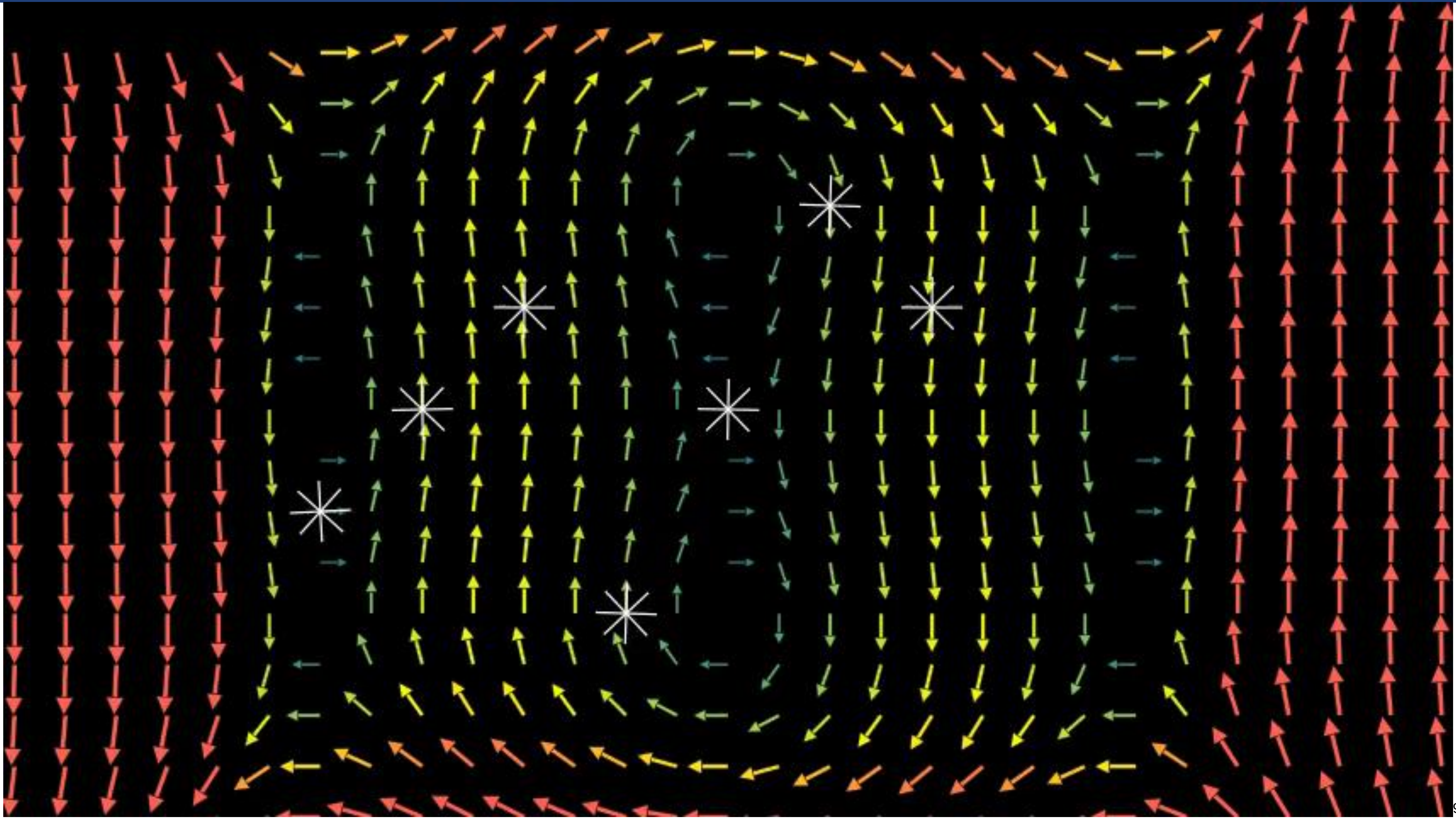
$$\vec{E}$$

Rotation eines Vektorfeldes

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die **Rotation** eines Vektorfeldes ist ein **Vektorfeld**, welches die Information enthält um welche **Achse** und wie **schnell** ein Stab im Feld sich drehen würde

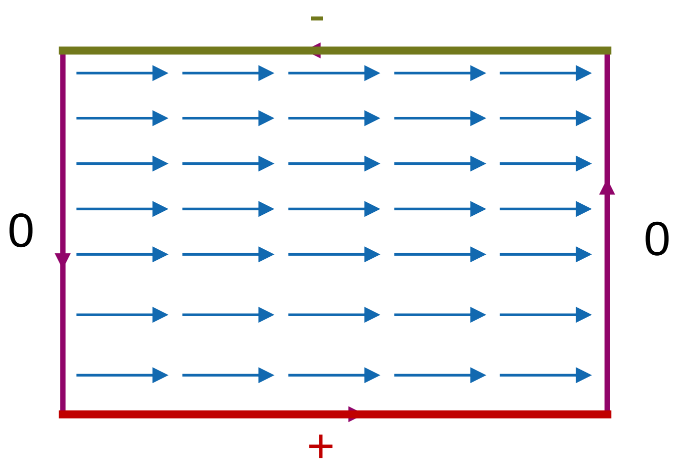


Satz von Stokes

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_A (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{A}$$

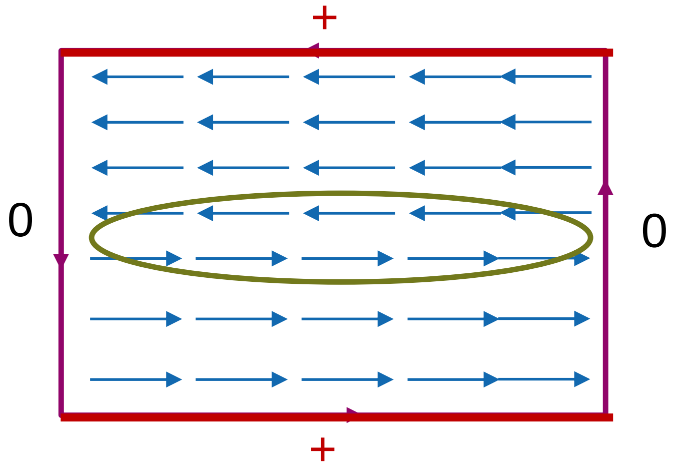
«Das geschlossene Wegintegral eines Vektorfeldes entspricht dem Integral der Rotation des Feldes über die aufgespannte Fläche»

Satz von Stokes



$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

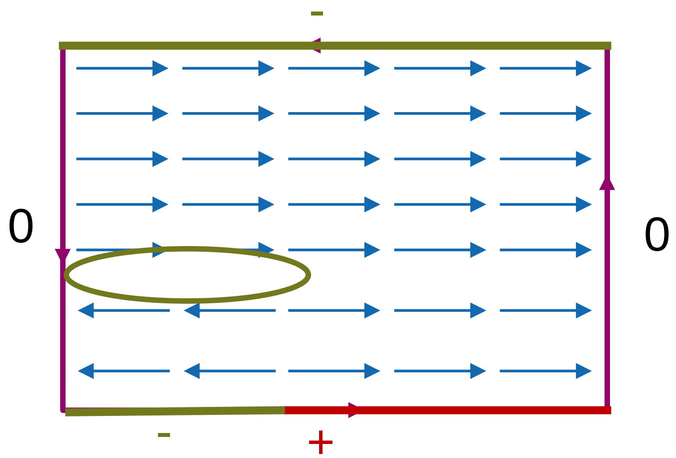
$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

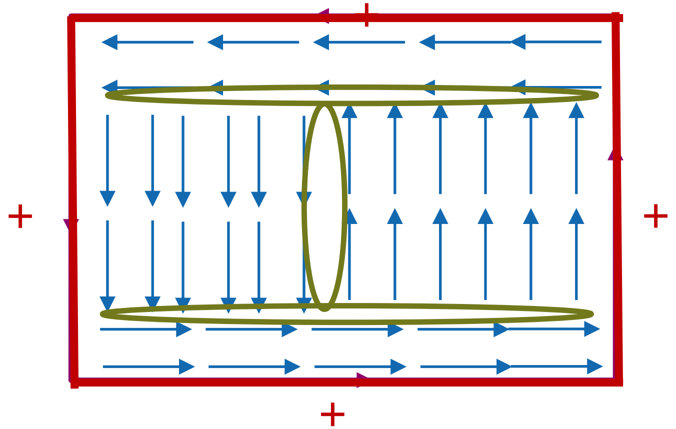


$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = (+\,+)$$

$$\nabla \times \vec{F} \neq 0$$

Satz von Stokes





$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = (-)$

$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = (++++)$

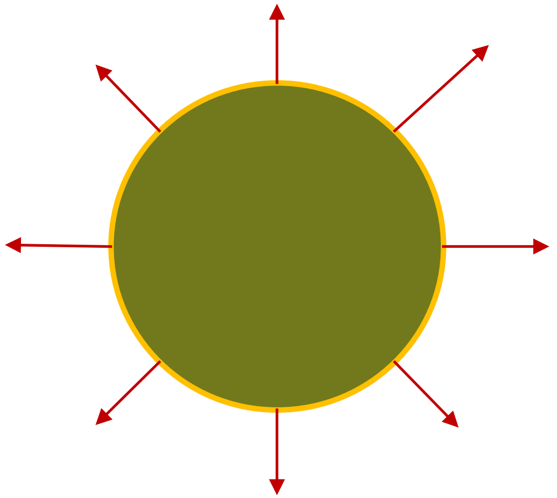
$\nabla \times \vec{F} \neq 0$

$\nabla \times \vec{F} \gg 0$

Satz von Gauss

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V} (\nabla \cdot \vec{F}) \cdot dV$$

«Das gesamte Feld, welches aus einem Volumen hinausfliesst, muss im inneren generiert werden.»



Elektrostatik

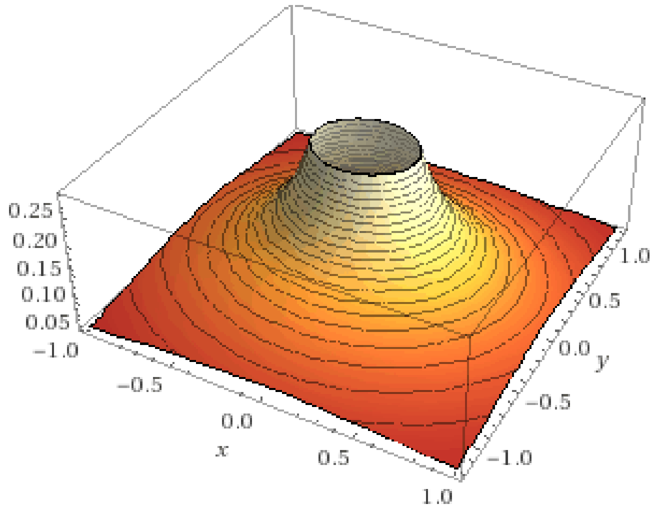
Potential und E-Feld

Annahme: E-Feld ist Wirbelfrei ⇒ Zeitlich Konstant

Wir können ein Skalares Feld finden, welches sämtliche Informationen des E-Feldes enthält.

Das **Potential** an einem Punkt, beschreibt die **potentielle Energie pro Ladung**

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{E_{pot}}{q}}$$



Potential einer Punktladung

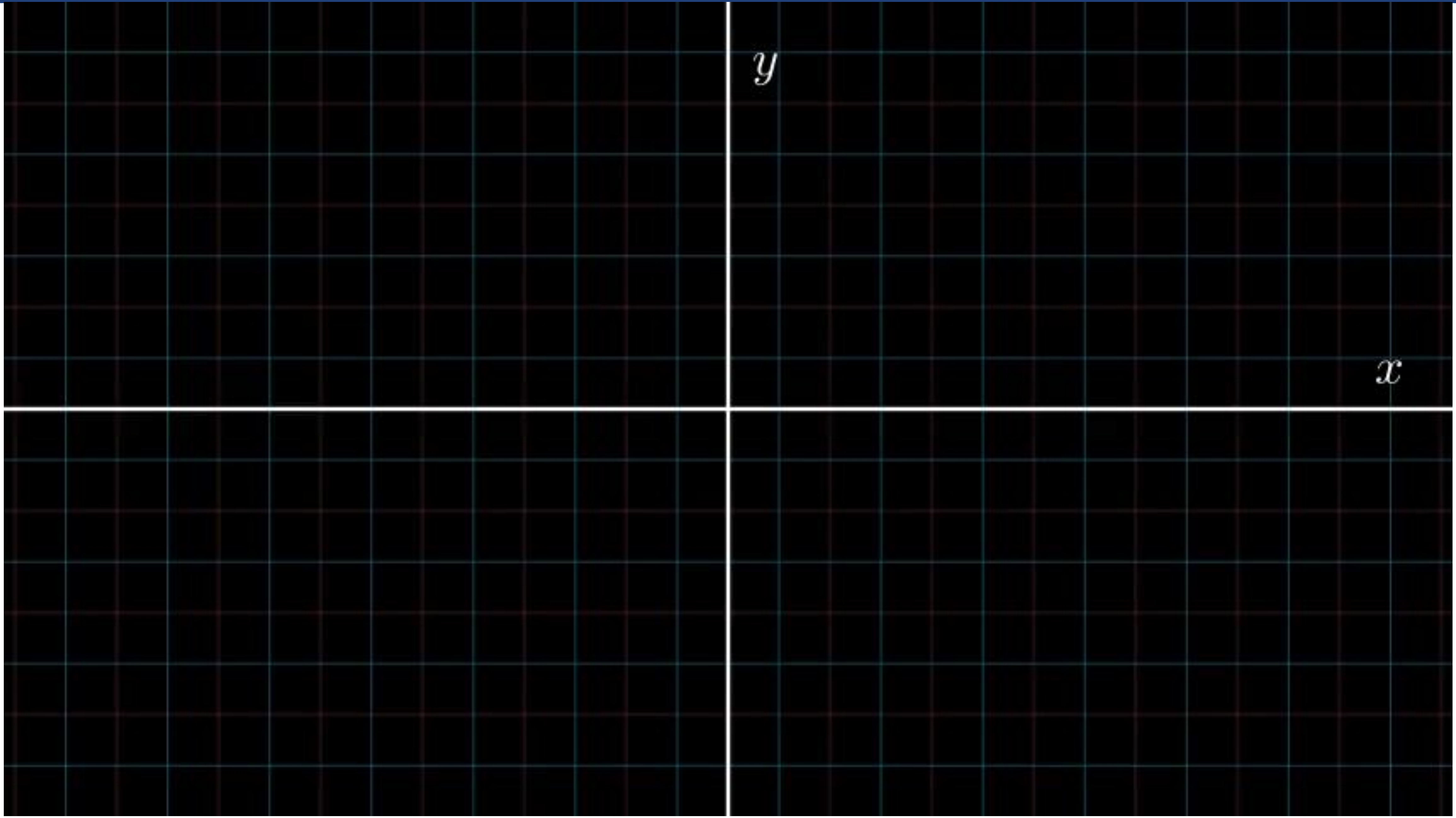
Zusammenhang Potential und E-Feld

Das Potential ist eindeutig durch die Ladungsverteilung definiert.

Poisson-gleichung: $\boxed{\nabla^2 \cdot \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

Potential einer Punktladung: $\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|}}$

Zusammenhang E-Feld und Potential: $\boxed{\vec{E} = -\nabla \cdot \Phi(\vec{r})}$


y
x

Gaussches Gesetz

«Das Elektrische Feld, welches aus einem Volumen herausfliesst, entspricht der eingeschlossenen Ladung»

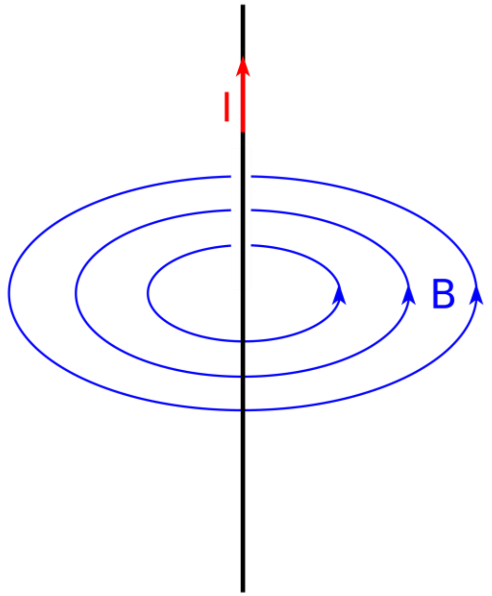
$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \ dV$$

$$\updownarrow$$

$$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{E}}) = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

«Ladungsträger sind Quelle des E-Feldes»

Magnetfeld



«Magnetfeldlinien sind immer geschlossen»

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\updownarrow$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

«Es gibt keine magnetischen Monopole»

Magnetfeld (Vor Maxwell)

«Bewegte Ladungen generieren ein Magnetfeld»

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \oiint_{A} \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

$$\updownarrow$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j}$$

«Ströme lösen Rotation des B-Feldes aus»

Vektorpotential

Idee: Finde Vektorfeld $\vec{A}$, dessen **Rotation** das Magnetfeld beschreibt

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})}$$

In Magnetostatik gilt die Poisson-gleichung:

$$\boxed{\nabla^2 \cdot \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \cdot \vec{J}(\vec{r})}$$

Übersicht

$\vec{E}$ Elektrisches Feld. beschreibt Kraftwirkung auf Ladungsträger im Raum. $[\vec{E}] = \frac{V}{m}$

$$\overrightarrow{F_c} = Q \cdot \vec{E}$$

$\vec{B}$ Magnetische Flussdichte. Beschreibt Kraftwirkung auf **bewegte** Ladungsträger. $[\vec{B}] = T$

$$\overrightarrow{F_L} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Φ Elektrisches Potential. Mass für die Pot. Energie eines Teilchens

$$\nabla^2 \cdot \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\vec{\mathrm{A}}$ Vektorpotential. Hilfsgrösse für das Magnetfeld

Konventionen

Häufig möchten wir das Feld an einem beliebigen Raumpunkt, ausgelöst von einer Punktladung berechnen

$\boldsymbol{R}$ = Direkter Verbindungsvektor zur Ladung

R = Länge des Verbindungsvektors

$\boldsymbol{r}'$ = Ortsvektor zur Punktladung

$\boldsymbol{r}$ = Ortsvektor zum Beobachtungspunkt