

Übung 5

Felder in Materie und Grenzflächen

Recap

Maxwell Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Maxwell Gleichungen für monochromatische Felder

Monochromatisch: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t} \} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

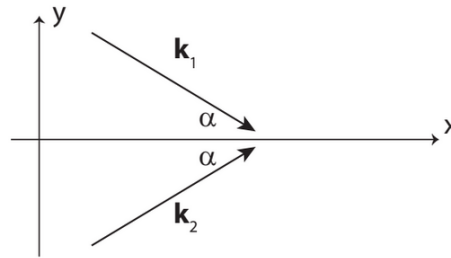
$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

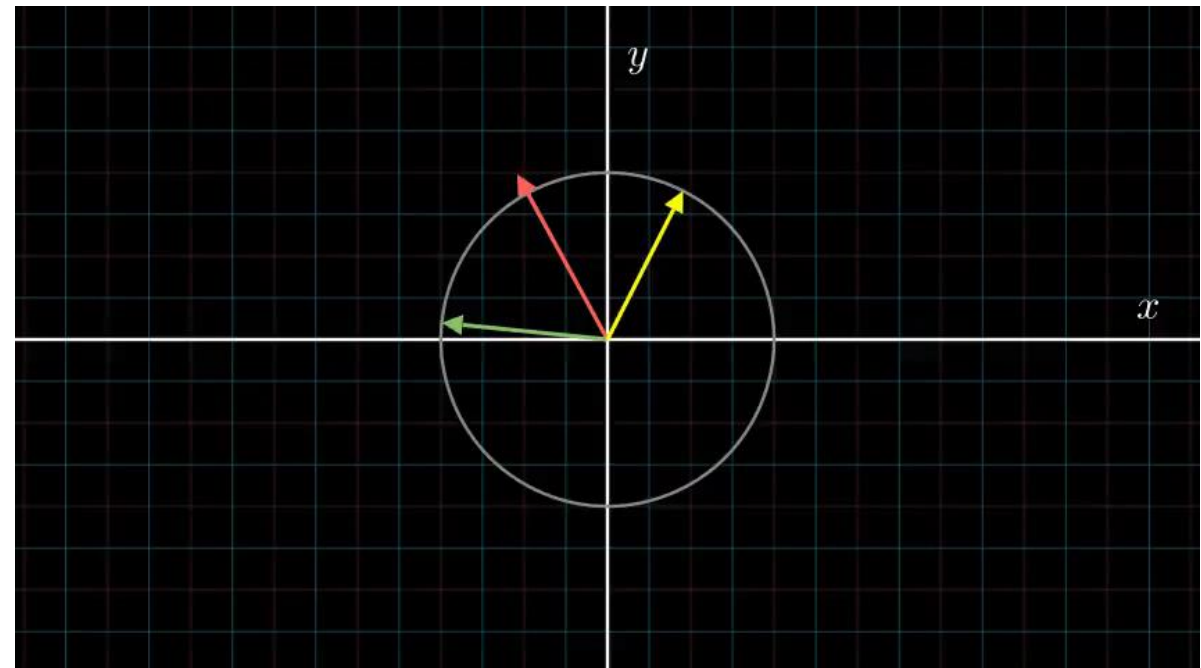
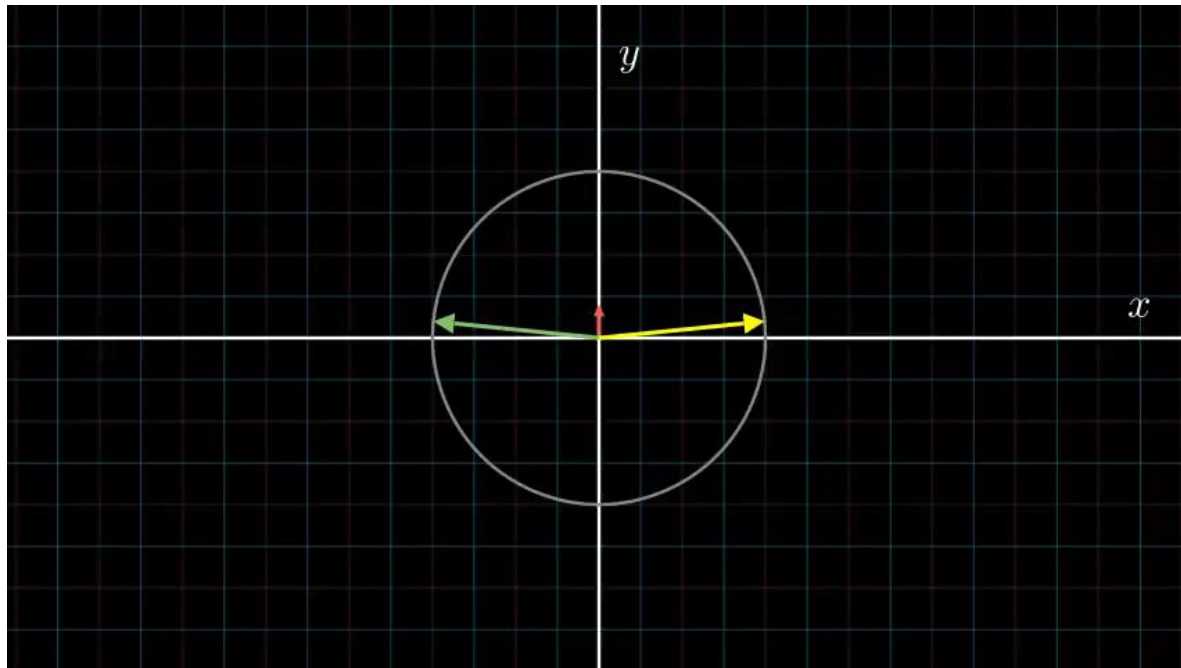
$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) - i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

Nachbesprechung

- (f) (8 Pkt.) Wir betrachten nun zwei rechtszirkular polarisierte ebene Wellen identischer Amplitude E_0 und Frequenz ω , die in der xy -Ebene unter dem Winkel α sowie $-\alpha$ zur x -Achse propagieren, wie in der folgenden Abbildung skizziert. Formulieren Sie das komplexe Feld $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ so, dass das Feld der ersten Welle im Ursprung zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet $\mathbf{E}_1(\mathbf{r} = 0, t = 0) = E_0 \mathbf{n}_z$. Formulieren Sie das komplexe Feld der zweiten Welle $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$, wobei diese einen Phasenversatz ϕ zur ersten Welle aufweise.





Übung 5

D, P und E-Feld

Quelle des **D-Feldes** sind äussere Ladungsträger

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

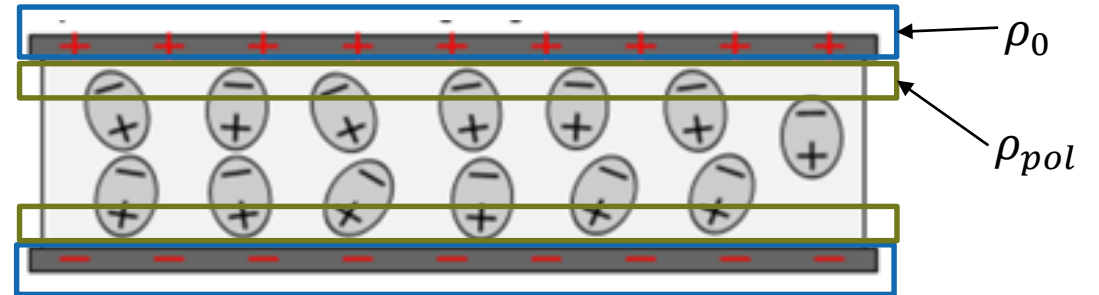
Quelle des **P-Feldes** sind polarisierte Ladungsträger

$$\nabla \cdot \vec{P} \propto \rho_{pol}$$

Quelle des **E-Feldes** ist die netto existierende Ladung

$$\nabla \cdot \vec{E} \propto \rho_0 + \rho_{pol}$$

Real existierendes Feld: $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} - \vec{P}(\vec{E})$

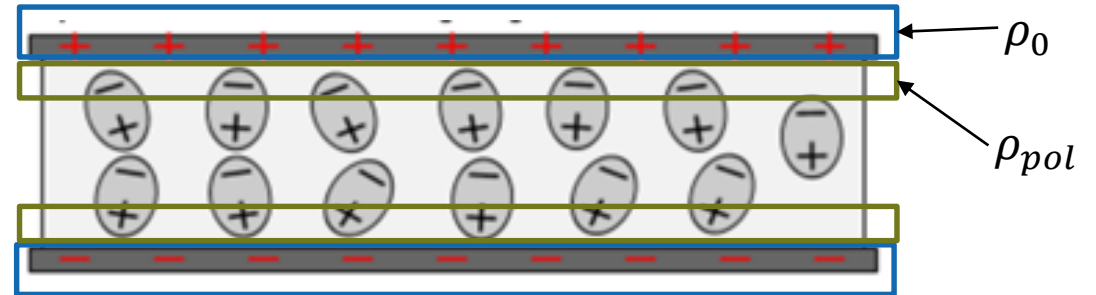


D, P und E-Feld

Annahme: Material Polarisiert sich sofort

$$P(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \cdot [\chi \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} \cdot \mathbf{E}^2 + \dots]$$

$$= \varepsilon_0 \cdot \chi(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$



Realität: Material abhängig davon, wie es zuvor polarisiert war

$$P(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^0 \chi(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - t') \cdot dt'$$

«Eigentlich noch mehr» **Realität:** Material abhängig davon, wie die Umgebung polarisiert ist/war

$$P(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \iiint \int_{-\infty}^0 \chi(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot dt' \cdot d\mathbf{r}'$$

Homogenes, lineares Material Polarisierung unabhängig vom Ort und Linear in E

Fourier Transformation

Betrachten wir den Zusammenhang im Fourier Raum, so wird die Faltung zu einer Multiplikation

$$P(r, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \cdot E(r, \omega)$$

Somit gilt für **D** und **E** Feld

$$D(r, \omega) = \varepsilon_0 E(r, \omega) + P(r, \omega) = \varepsilon_0 \cdot (1 + \chi(\omega)) \cdot E(r, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \cdot E(r, \omega)$$

$$D(r) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \cdot E(r)$$

B und H Feld Analog

$$B(r, \omega) = \mu_0 \cdot \mu_r(\omega) \cdot H(r, \omega)$$

Die meisten optischen Materialien besitzen $\mu_r \simeq 1$

Wellengleichung in Materie ohne Quellen

$$(\nabla^2 + k_0^2 \cdot \varepsilon(\omega)\mu(\omega)) \cdot E(r) = 0$$

Wir erhalten Information über die **Länge des K-Vektors**

$$k(\omega) = k_0 \cdot n(\omega), \quad n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega) \cdot \mu(\omega)}$$

Mit:

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \text{ Wellenzahl im Vakuum}$$

$$n(\omega) = \text{Brechungsindex}$$

Es gilt:

$$\text{Wellenlänge: } \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$(\text{Phasen}) \text{ Geschwindigkeit: } v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k}$$

«Fliesst eine Welle durch einen Grenzübergang,
so verändert sich die **Phasengeschwindigkeit** und die **Wellenlänge** Abhängig von ε und μ »

Helmholtzgleichung im Material (1)

$$(\nabla^2 + k_1^2)E(r) = 0$$

Helmholtzgleichung im Material (2)

$$(\nabla^2 + k_2^2)E(r) = 0$$

$$\mu_1, \varepsilon_1 \rightarrow n_1 = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$$

$$E(r) = \mathbf{E}_0 \cdot e^{\pm i \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mu_2, \varepsilon_2 \rightarrow n_2 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$$

$$E(r) = \mathbf{E}_0 \cdot e^{\pm i \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}$$

$$\text{Mit: } k_i^2 = k_{ix}^2 + k_{iy}^2 + k_{iz}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot n_i(\omega)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_i(\omega) \cdot \mu_i(\omega)$$

Verhalten von E, D, B und H Feld an Randflächen

Falls **keine Ladungsträger und Ströme** auf Übergangsfläche:

$$\underline{B}_i^\perp = \underline{B}_j^\perp \quad \text{on } \partial D_{ij}$$

$$\underline{D}_i^\perp = \underline{D}_j^\perp \quad \text{on } \partial D_{ij}$$

$$\underline{E}_i^\parallel = \underline{E}_j^\parallel \quad \text{on } \partial D_{ij}$$

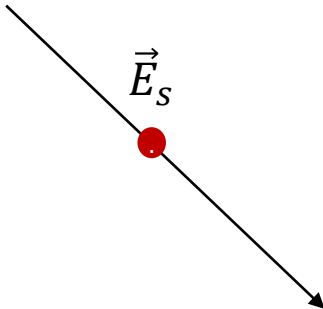
$$\underline{H}_i^\parallel = \underline{H}_j^\parallel \quad \text{on } \partial D_{ij}$$

P und S Polarisierte Wellen

Für eine gegebene Ausbreitungsrichtung haben wir 2 Freiheitsgrade für das E-Feld.
Wir können die Polarisierung des Feldes in 2 Polarisierungsrichtungen aufteilen.

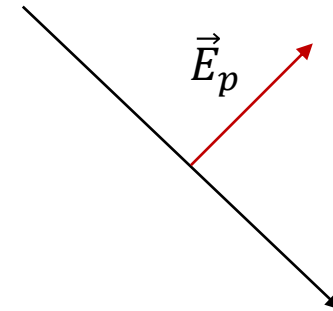
S-Polarisiert:

Feld steht **senkrecht** zur Betrachtungsebene



P-Polarisiert:

Feld steht **parallel** zur Betrachtungsebene



Zusammenhang E und H Feld in der Materie

Kennen wir k und E , so kennen wir auch H

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r}) &= i\omega \underline{\underline{\vec{B}}}(\vec{r}) \\
 \downarrow \nabla \times &= k \times \\
 ik \times E_0 &= i\omega\mu_0\mu_r \cdot \vec{H}_0 = i\frac{\omega}{c} \cdot n(\omega) \cdot (n_k \times E_0) \\
 \downarrow n &= \sqrt{\varepsilon\mu} \\
 \underline{\underline{H_0}} &= \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c \cdot \mu\mu_r} (n_k \times E_0) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}} (n_k \times E_0) = \underline{\underline{\frac{1}{Z} (n_k \times E_0)}}
 \end{aligned}$$

Mit Wellenimpedanz $Z = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}$

Beispiel:

Eine P Polarisierte Welle mit Amplitude E_0 breitet sich in negative Z Richtung auf eine Grenzfläche bei $Z = -L$ aus.
Die Grenzfläche sei ein ideal leitend.
Wie sieht die reflektierte Welle aus?