

Übung 6

Grenzflächen und Energietransport

Recap

Verhalten von E, D, B und H Feld an Randflächen

Falls **keine Ladungsträger und Ströme** auf Übergangsfläche:

$$\underline{B}_i^\perp = \underline{B}_j^\perp \quad \text{on } \partial D_{ij}$$

$$\underline{D}_i^\perp = \underline{D}_j^\perp \quad \text{on } \partial D_{ij}$$

$$\underline{E}_i^\parallel = \underline{E}_j^\parallel \quad \text{on } \partial D_{ij}$$

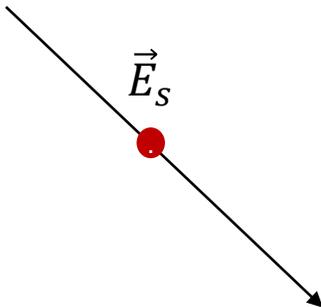
$$\underline{H}_i^\parallel = \underline{H}_j^\parallel \quad \text{on } \partial D_{ij}$$

P und S Polarisierte Wellen

Für eine gegebene Ausbreitungsrichtung haben wir 2 Freiheitsgrade für das E-Feld.
Wir können die Polarisierung des Feldes in 2 Polarisierungsrichtungen aufteilen.

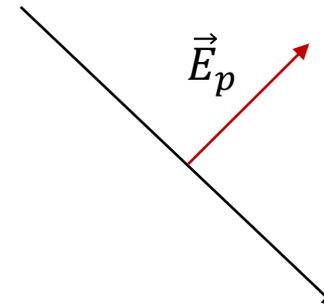
S-Polarisiert:

Feld steht **senkrecht** zur Betrachtungsebene



P-Polarisiert:

Feld steht **parallel** zur Betrachtungsebene



Wellengleichung in Materie ohne Quellen

$$(\nabla^2 + k_0^2 \cdot \varepsilon(\omega)\mu(\omega)) \cdot E(r) = 0$$

Wir erhalten Information über die **Länge des K-Vektors**

$$k(\omega) = k_0 \cdot n(\omega), \quad n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega) \cdot \mu(\omega)}$$

Mit:

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad \text{Wellenzahl im Vakuum}$$

$$n(\omega) = \text{Brechungsindex}$$

Es gilt:

$$\text{Wellenlänge: } \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\text{(Phasen) Geschwindigkeit: } v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k}$$

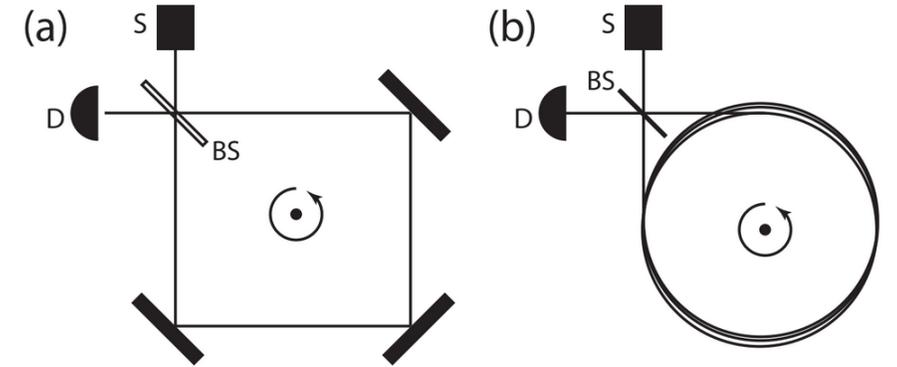
«Fließt eine Welle durch einen Grenzübergang,
so verändert sich die **Phasengeschwindigkeit** und die **Wellenlänge** Abhängig von ε und μ »

Nachbesprechung

Intensität und Leistung

- (e) (6 Pkt.) Zeigen Sie für das Sagnac Interferometer (unter der Annahme, dass sämtliche mechanischen Komponenten sich mit Geschwindigkeiten viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c bewegen), dass die zusätzliche Phase, die ein Lichtfeld pro Umlauf in Rotationsrichtung aufnimmt, gerade

$$\Delta\phi = \frac{4\pi A\Omega}{c_0\lambda_0} \quad (18)$$



Übung 6

Wellen an Grenzflächen

Wellenvektoren an Grenzübergängen

- O.B.D.A gilt:

$$k_y = 0$$

- Einfallswinkel = Ausfallswinkel:

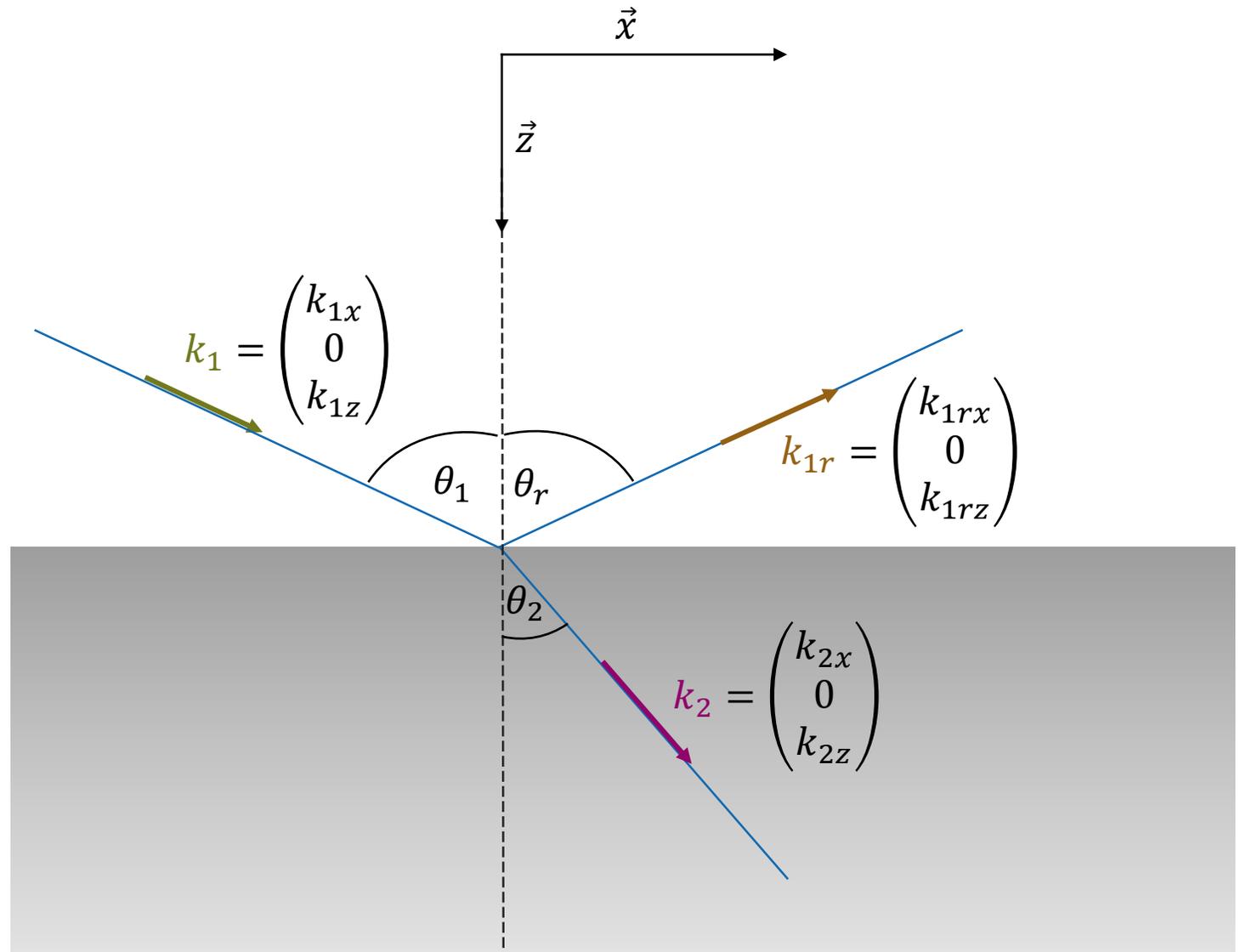
$$\theta_1 = \theta_r$$

- Brechungsgesetz:

$$n_1 \cdot \sin(\theta_1) = n_2 \cdot \sin(\theta_2)$$

- Erhaltung Tangentialkomponente:

$$k_{1x} = k_{2x} = k_{1rx}$$



Wellenvektoren an Grenzübergängen

- O.B.D.A gilt:

$$k_y = 0$$

- Einfallswinkel = Ausfallswinkel:

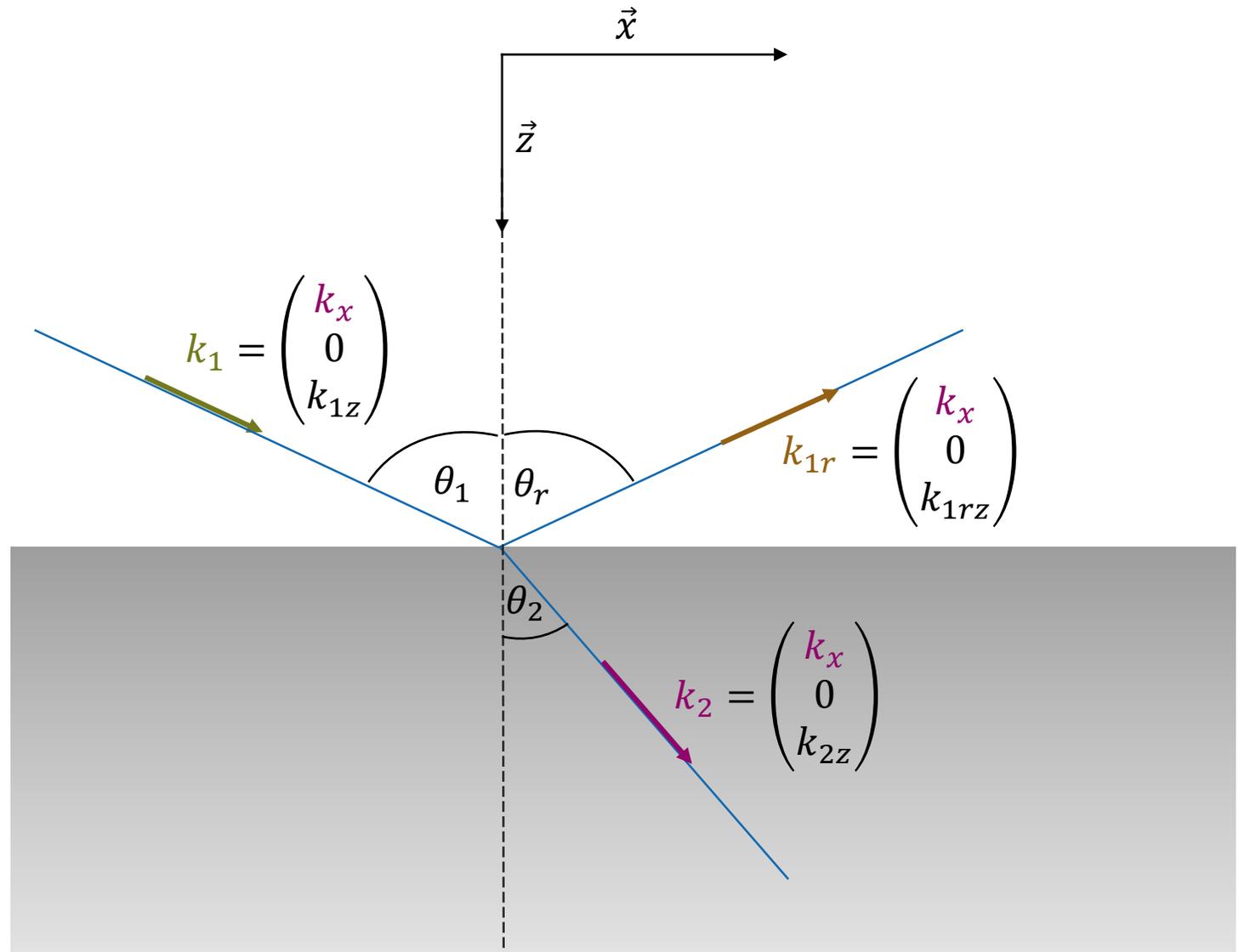
$$\theta_1 = \theta_r$$

- Brechungsgesetz:

$$n_1 \cdot \sin(\theta_1) = n_2 \cdot \sin(\theta_2)$$

- Erhaltung Tangentialkomponente:

$$k_{1x} = k_{2x} = k_{1rx}$$



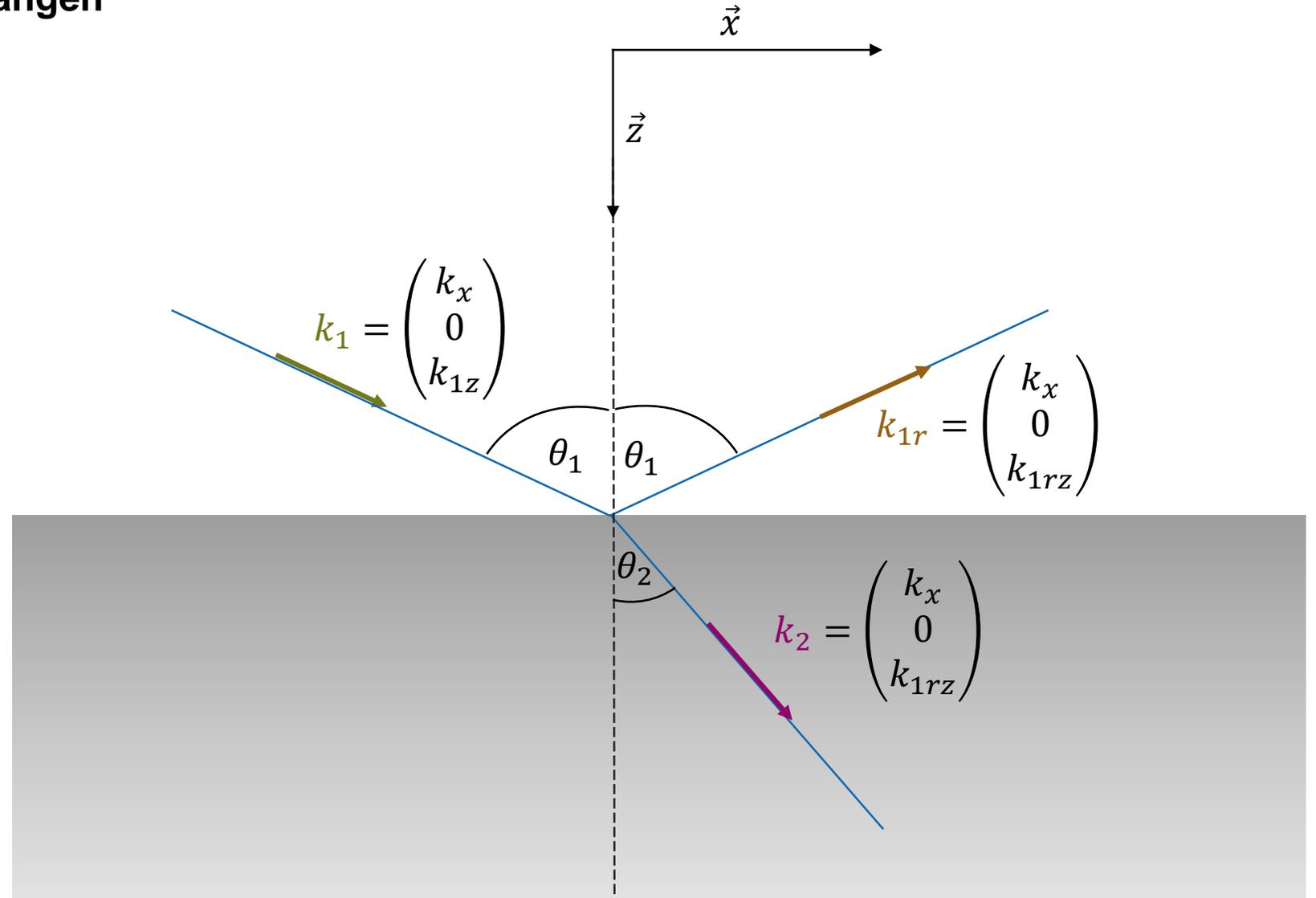
Wellenvektoren an Grenzübergängen

Dispersionsrelation:

$$k_x^2 + k_{1z}^2 = \left(\frac{\omega}{c} n_1(\omega)\right)^2$$

$$k_x^2 + k_{2z}^2 = \left(\frac{\omega}{c} n_2(\omega)\right)^2$$

$$\begin{aligned} k_{2z} &= \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (n_2^2 - n_1^2) + k_{1z}^2} \\ &= |k_2| \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \cdot \sin(\theta_1)^2} \\ &= |k_2| \cdot \sqrt{1 - n_{eff}^2} \end{aligned}$$



Wellenvektoren an Grenzübergängen

Dispersionsrelation:

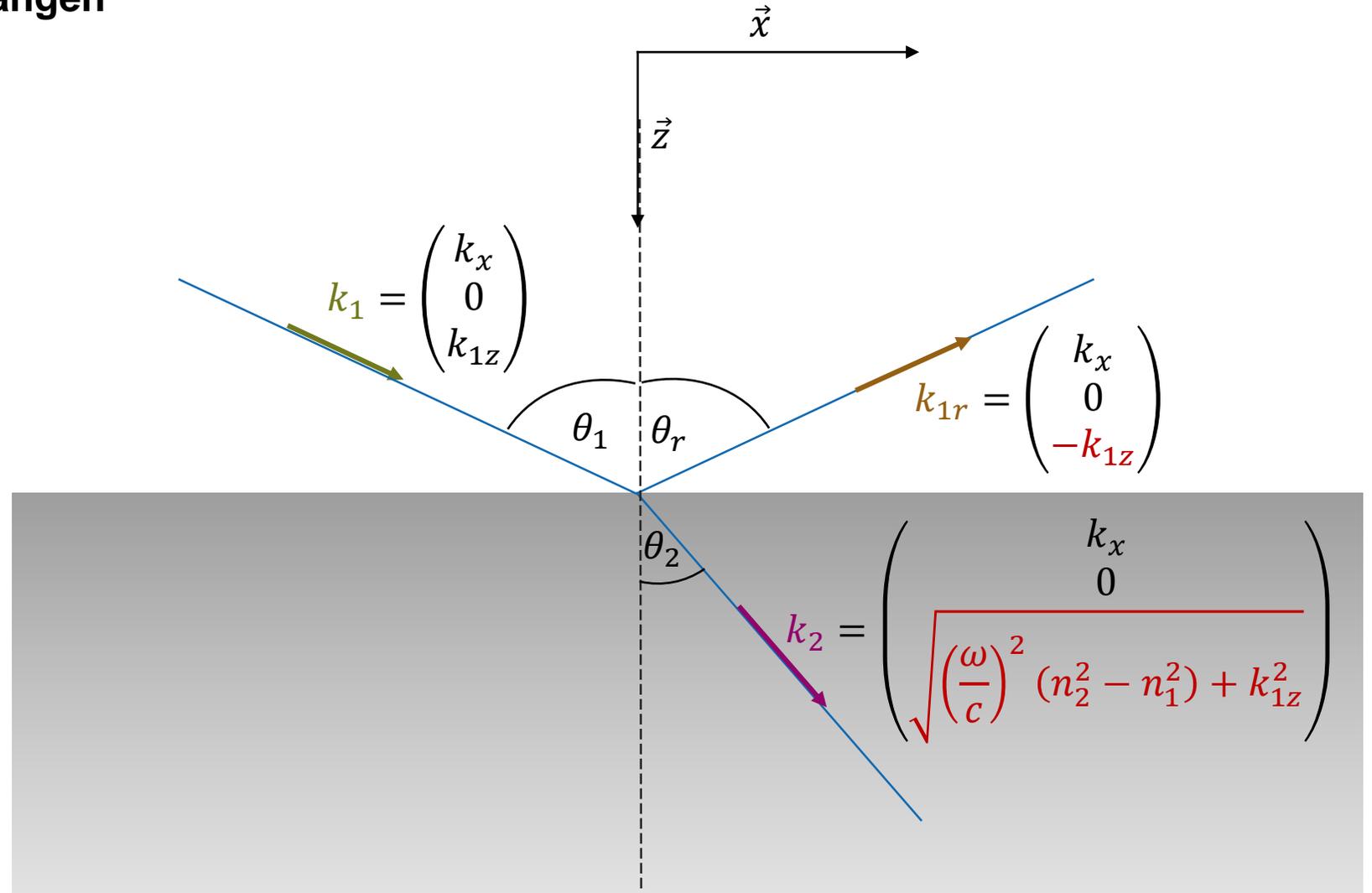
$$k_x^2 + k_{1z}^2 = \left(\frac{\omega}{c} n_1(\omega) \right)^2$$

$$k_x^2 + k_{2z}^2 = \left(\frac{\omega}{c} n_2(\omega) \right)^2$$

$$k_{2z} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 (n_2^2 - n_1^2) + k_{1z}^2}$$

$$= |k_2| \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \cdot \sin(\theta_1)^2}$$

$$= |k_2| \cdot \sqrt{1 - n_{eff}^2}$$

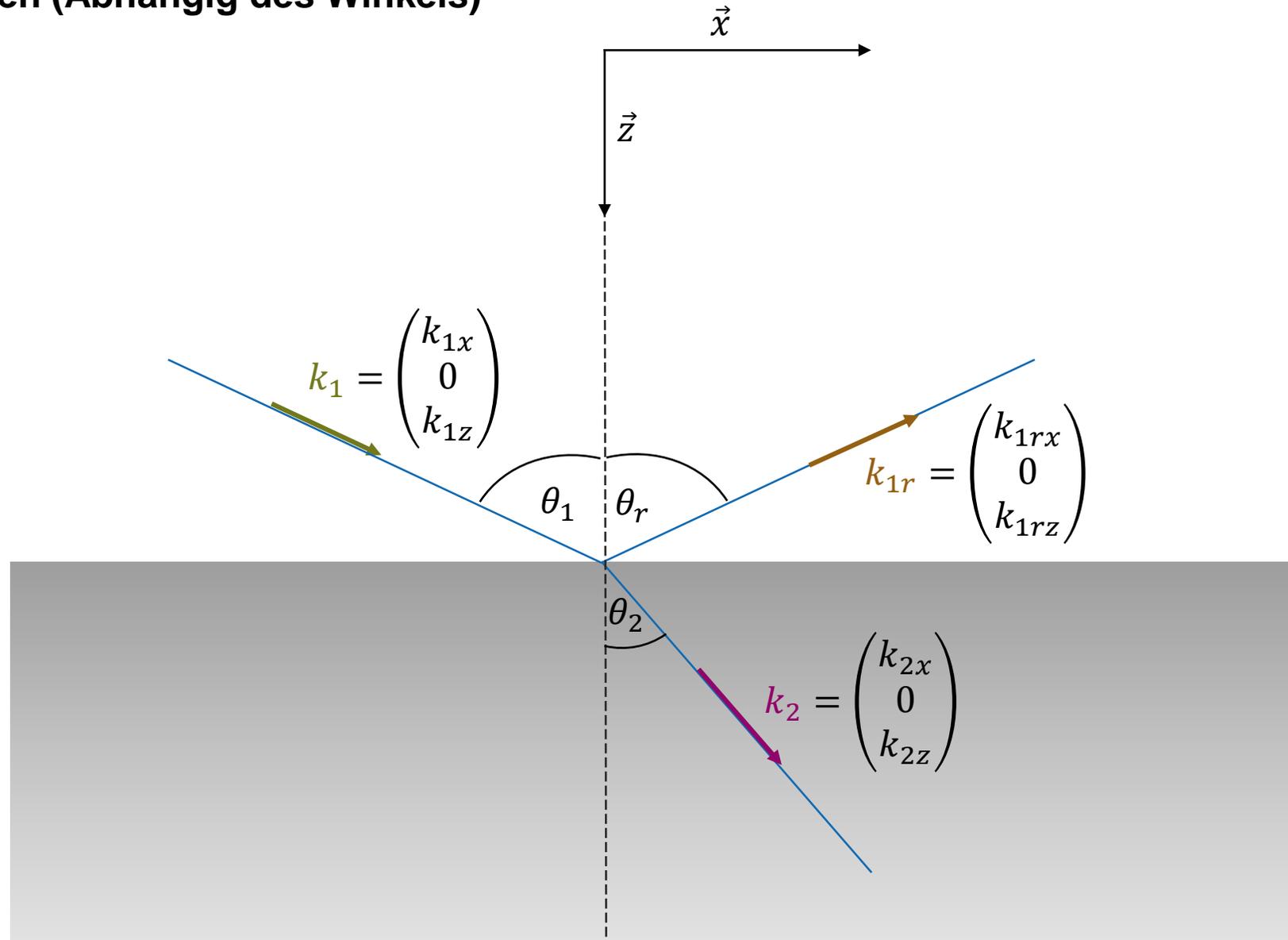


Wellenvektoren an Grenzübergängen (Abhängig des Winkels)

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \cdot n_1(\omega) \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) \\ 0 \\ \cos(\theta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1x} \\ 0 \\ k_{1z} \end{pmatrix}$$

$$k_{1r} = \frac{\omega}{c} \cdot n_1(\omega) \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) \\ 0 \\ -\cos(\theta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1rx} \\ 0 \\ -k_{1rz} \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \cdot n_2(\omega) \begin{pmatrix} \sin(\theta_2) \\ 0 \\ \cos(\theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{2x} \\ 0 \\ k_{2z} \end{pmatrix}$$



Felder an Grenzübergängen

S-Polarisierte Felder an Grenzübergängen

$$\mathbf{E}_1^s = E_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_{1r}^s = E_{1r} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_2^s = E_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

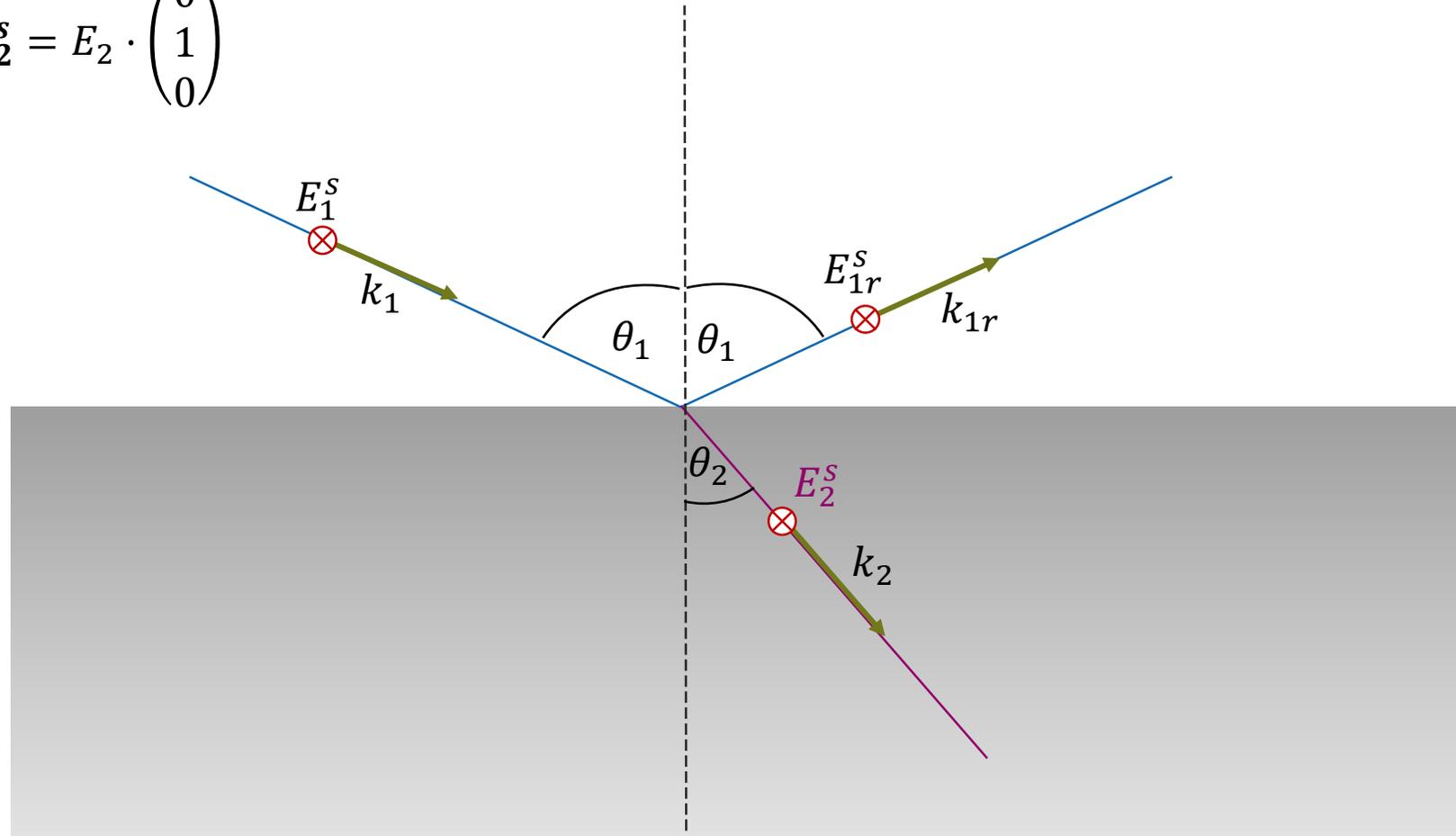
$$E_{1r} = E_1 \cdot r^s(k_x)$$

$$E_2 = E_1 \cdot t^s(k_x)$$

Fresnel Koeffizienten

$$r^s(k_x) = \frac{\mu_2 k_{z1} - \mu_1 k_{z2}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}}$$

$$t^s(k_x) = \frac{2\mu_2 k_{z1}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}}$$



Felder an Grenzübergängen

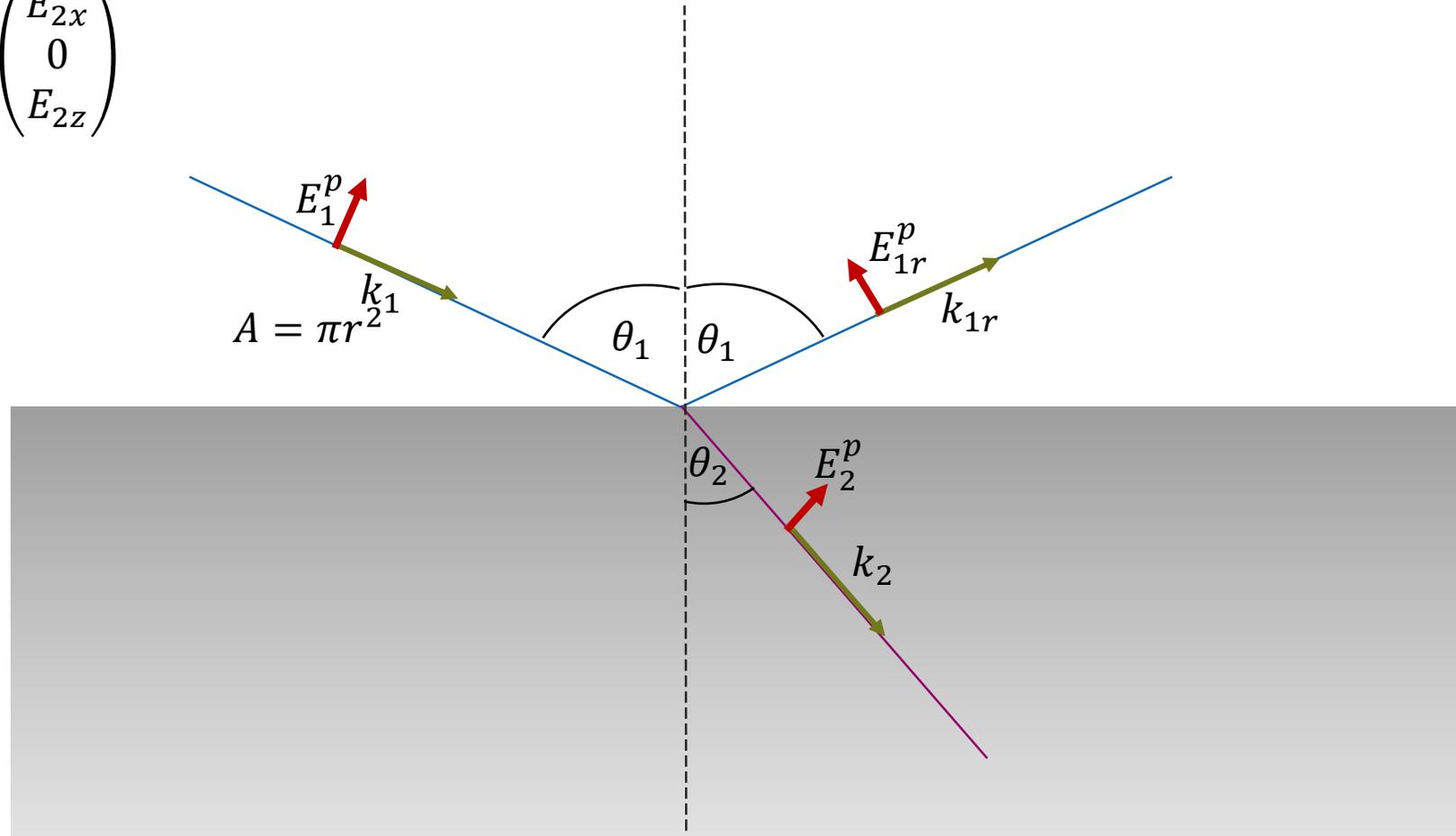
$$\mathbf{E}_1^p = \begin{pmatrix} E_{1x} \\ 0 \\ E_{1z} \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_{1r}^p = \begin{pmatrix} E_{1rx} \\ 0 \\ E_{1rz} \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_2^p = \begin{pmatrix} E_{2x} \\ 0 \\ E_{2z} \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{E}_{1r}^p| = r^p |\mathbf{E}_1^p|$$

$$|\mathbf{E}_2^p| = t^p |\mathbf{E}_1^p|$$

$$r^p(k_x) = \frac{\varepsilon_2 k_{z1} - \varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}}$$

$$t^p(k_x) = \frac{2\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}} \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2}}$$



Energie und Leistung

Poynting Vektor (Für lineare, nicht dispersive Medien)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV}_{\text{Änderung der Feldenergie}} = \underbrace{- \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV}_{\text{Energieverluste innerhalb des Materiales/Volumens}} - \underbrace{\oint_{\partial V} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A}}_{\text{Energiefluss nach aussen}}$$

Feldenergie
Energieverluste innerhalb des Materiales/Volumens

Poynting Vektor (Für lineare, nicht dispersive Medien)

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V W_{E,H} dV = - \iiint_V W_m \cdot dV - \oiint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

Beschreibt Leistungsflussdichte $[S] = \frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \}$$

Achtung!

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \neq \text{Re} \{ \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t} \}$$

Zeitgemittelttes Poytingtheorem (Zeitharmonische Felder in linearen Medien)

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V W_{E,H} dV = - \iiint_V W_m \cdot dV - \oiint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

Zeitmittelung $W_m = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{j^*(r) \cdot E(r)\}$

$$\int_{\partial V} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle \cdot d\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \int_V \operatorname{Re} \{ \mathbf{j}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \} dV.$$

Intensität und Leistung

Intensität = Leistung Pro Fläche:

- $I = |\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle|$

(Mittlere) Leistung bezogen auf eine Fläche:

- $P = \iint_A I(\mathbf{r}) \cdot da = \iint_A \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle \cdot d\vec{A}$