Übung 7

Potentiale

Recap

Wellenvektoren an Grenzübergängen

Dispersionsrelation:

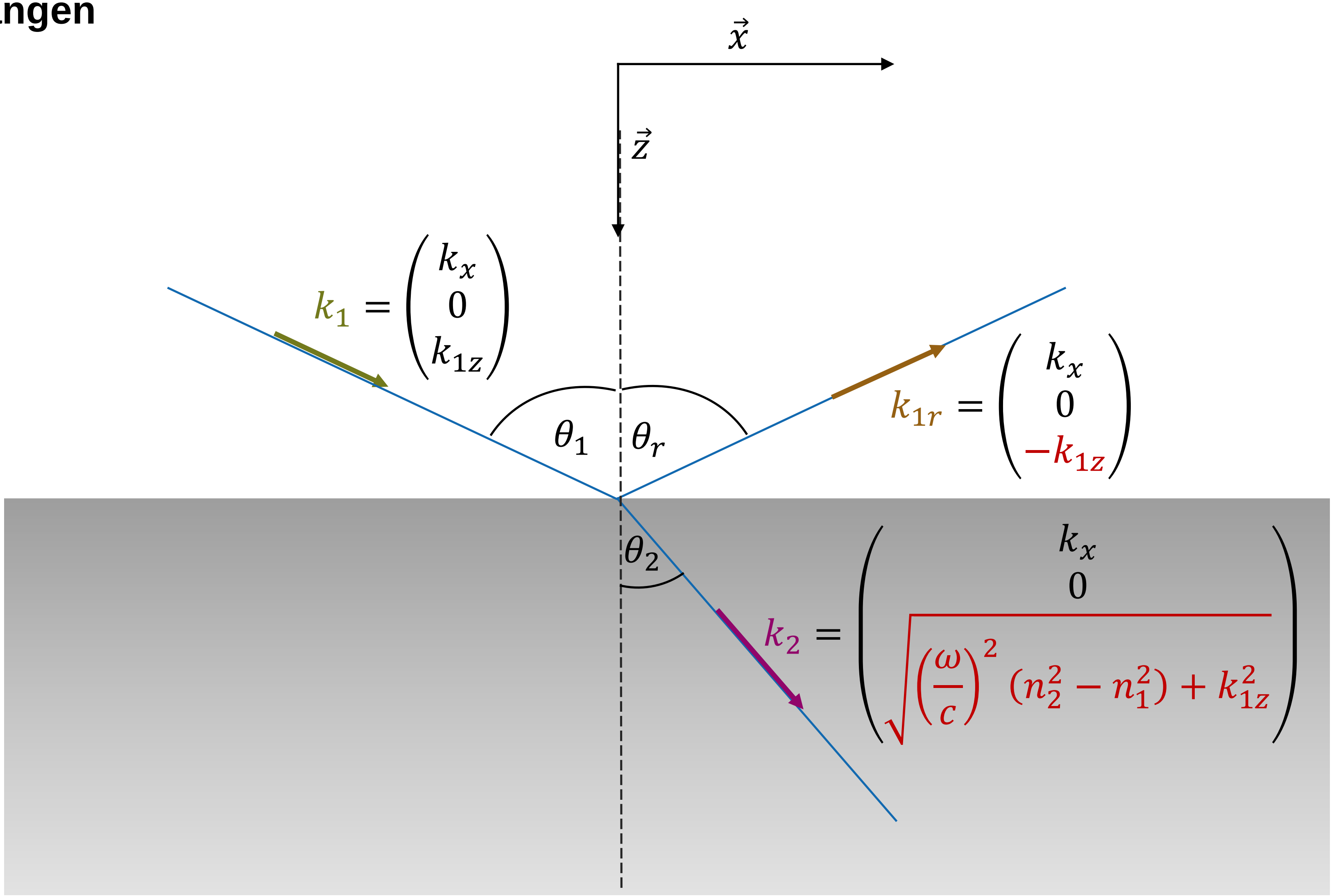
$$k_x^2 + k_{1z}^2 = \left(\frac{\omega}{c} n_1(\omega)\right)^2$$

$$k_x^2 + k_{2z}^2 = \left(\frac{\omega}{c} n_2(\omega)\right)^2$$

$$k_{2z} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (n_2^2 - n_1^2) + k_{1z}^2}$$

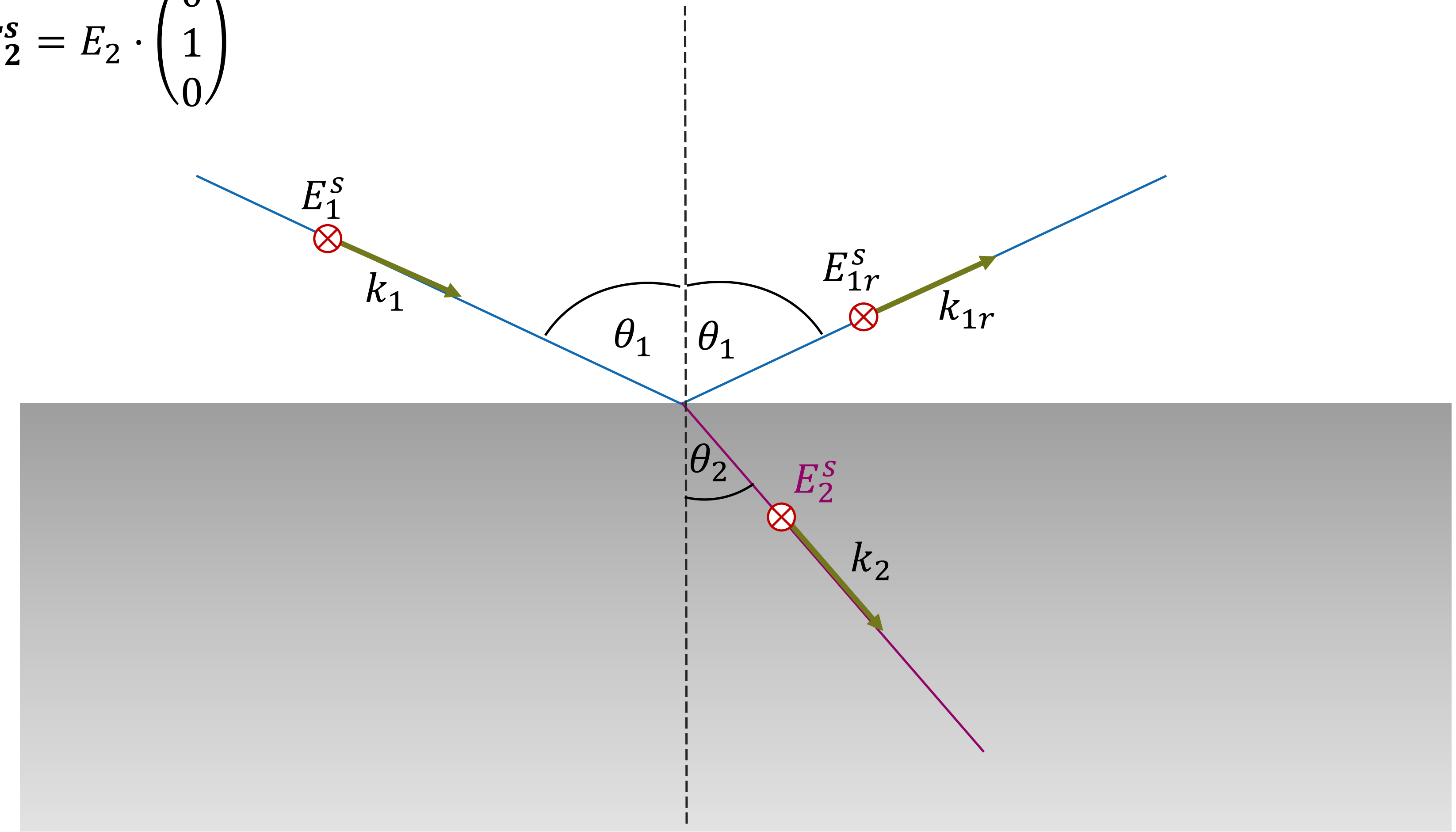
$$= |k_2| \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \cdot \sin(\theta_1)^2}$$

$$= |k_2| \cdot \sqrt{1 - n_{eff}^2}$$



S-Polarisierte Felder an Grenzübergängen

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{s}} = E_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{1r}}^{\boldsymbol{s}} = E_{1r} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{s}} = E_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Es gilt:

$$E_{1r} = E_1 \cdot r^s(k_x)$$

$$E_2 = E_1 \cdot t^s(k_x)$$

Fresnel Koeffizienten

$$\boxed{\begin{aligned} r^s(k_x) &= \frac{\mu_2 k_{z1} - \mu_1 k_{z2}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}} \\ t^s(k_x) &= \frac{2\mu_2 k_{z1}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}} \end{aligned}}$$

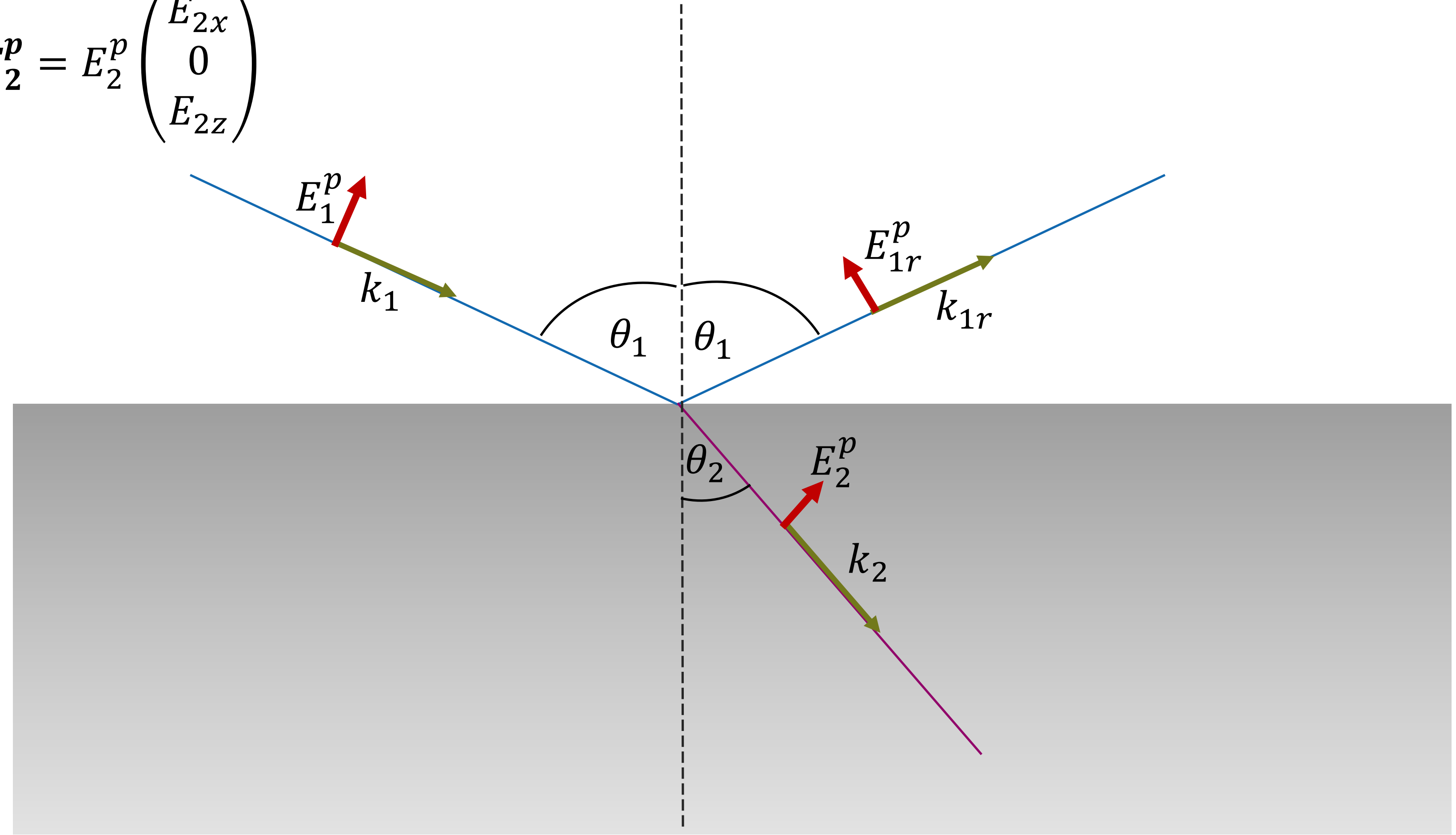
Felder an Grenzübergängen

$$\boldsymbol{E_1^p} = E_1^p \begin{pmatrix} E_{1x} \\ 0 \\ E_{1z} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{E_{1r}^p} = E_{1r}^p \begin{pmatrix} E_{1rx} \\ 0 \\ E_{1rz} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{E_2^p} = E_2^p \begin{pmatrix} E_{2x} \\ 0 \\ E_{2z} \end{pmatrix}$$

$$E_{2r}^p = r^p E_1^p$$

$$E_2^p = t^p E_1^p$$

$$\boxed{\begin{aligned} r^p(k_x) &= \frac{\varepsilon_2 k_{z1} - \varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}} \\ t^p(k_x) &= \frac{2\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}} \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2}} \end{aligned}}$$



Nachbesprechung

Greensche Funktion

Greensche Funktion

$$\mathcal{L}\{u(\boldsymbol{x})\} = f(\boldsymbol{x})$$

Die Greensche Funktion ist spezifisch für einen Differentialoperator und lost folgende Gleichung

$$\mathcal{L}\{G(x,x')\} = \delta(x-x')$$

Aus der Identität $\delta(x) * f(x) = f(x)$ folgt:

$$f(x) = \int \delta(x-x') \cdot f(x') dx' = \int \mathcal{L}\{G(x,x')\} \cdot f(x')\, dx'$$

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \int \mathcal{L}\{G(x,x')\} \cdot f(x')\, dx'$$

$$\boxed{u(x) = \int G(x,x') \cdot f(x')\ dx'}$$

Greensche Funktion

Gegeben:

Differentialgleichung der Form:

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = f(x)$$

Greensche Funktion für den zugehörigen Differentialoperator:

$$G(x, x')$$

Lösung

$$u(x) = \int G(x, x') \cdot f(x') dx'$$

Greensche Funktion

Beispiel: Helmholtzgleichung

$$\mathcal{L}\{\phi(\boldsymbol{r})\} = (\nabla^2 + k^2) \cdot \phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \cdot \delta(\boldsymbol{r})$$

Greens Funktion für Helmholtz:

$$G_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{e^{ik\cdot R}}{4\pi R} \qquad \boldsymbol{R} = r - r'$$

Lösung

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \iiint G_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0} \cdot \delta(\boldsymbol{r}') \cdot dV' = \frac{Q}{\varepsilon_0} \cdot \frac{e^{ik\cdot r}}{4\pi r}$$

Spezialfall $(k = 0 \rightarrow Poisson\ Gl.)$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

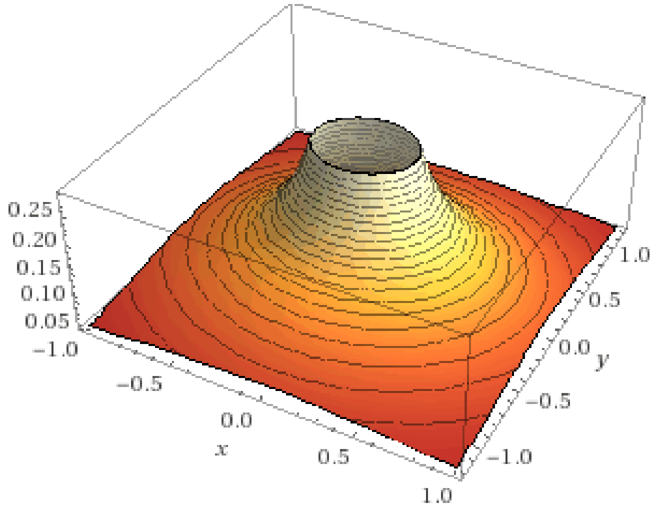
Potentiale und Felder

Elektrisches Potential

Das **Potential** an einem Punkt, beschreibt die **potentielle Energie pro Ladung** bezüglich einem Bezugspunkt

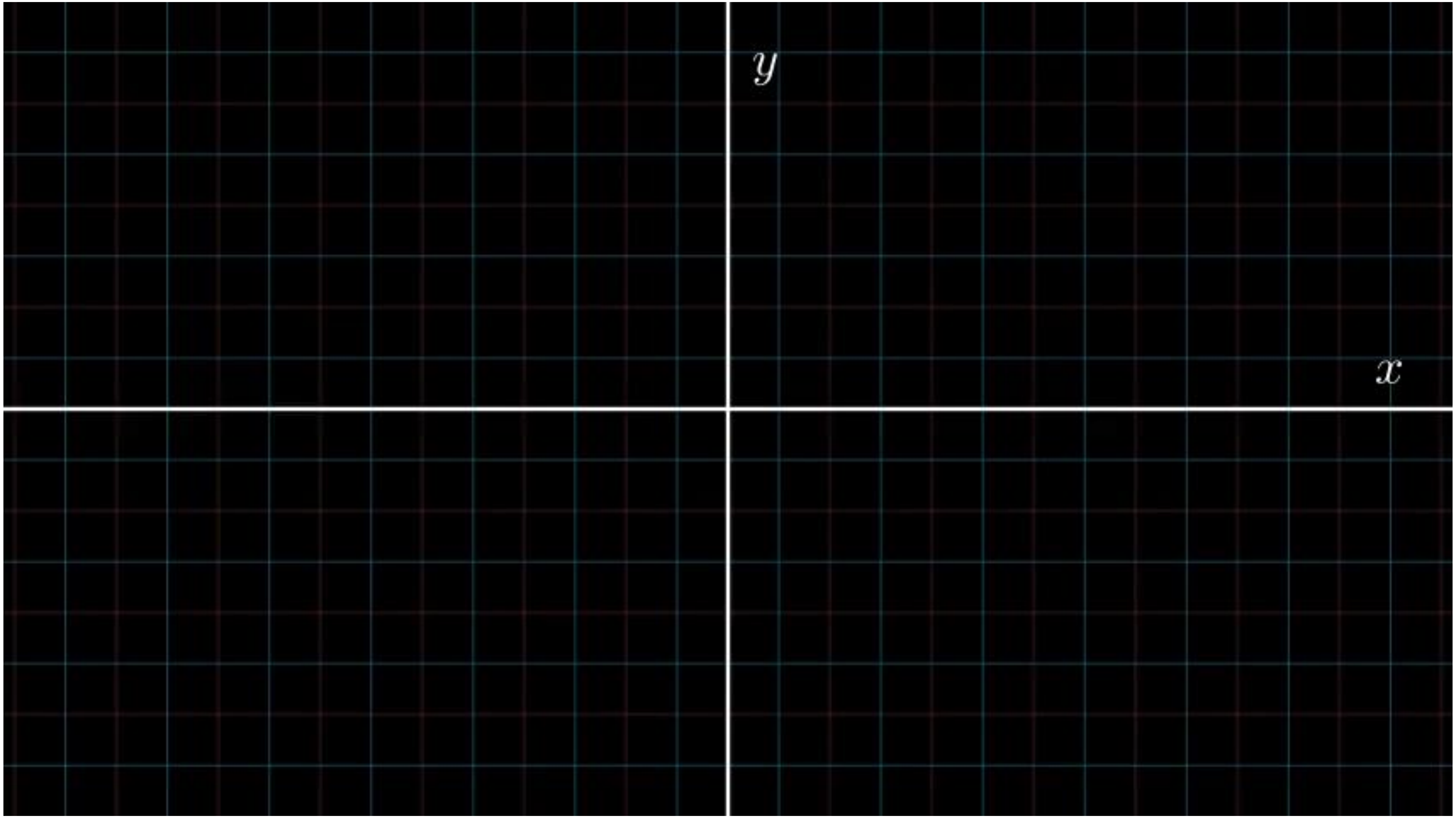
Im **statischem** Falle gilt:

$$E(r,t) = -\nabla\phi(r,t)$$



Potential einer Punktladung

Elektrisches Potential



Elektrisches Potential

Jedes Vektorfeld, dass Rotationsfrei ist, lässt sich mithilfe eines Skalaren Potentiales beschreiben

→Testladung verspürt Kraft entlang der Falllinie

Das **elektrische Feld** ist im allgemeinem Fall **nicht Rotationsfrei**!

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

Wir benötigen einen zusätzlichen Term, welcher die Rotation beschreibt

$$\vec{E} = -\nabla\phi(r,t) - \frac{\partial}{\partial_t}\vec{A}(r,t)$$

"Fall-linie" des Feldes

Rotation des Feldes

Das Vektorpotential

Magnetfeld ist ein reines Rotationsfeld

Wir können das Magnetfeld als Rotation eines anderen Feldes ausdrücken.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}(r,t)$$

Mit $\vec{A}$ Vektorpotential

Würden wir $\overrightarrow{A'} = \vec{A} + \nabla \cdot \chi$ als Vektorpotential wählen:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla \cdot \chi = \nabla \times \vec{A}$$

Potential

Mit den Hilfsfelder $\vec{A}$ und ϕ folgt:

$$\vec{E} = -\nabla\phi(r,t) - \partial_t \cdot \vec{A}(r,t) \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}(r,t)$$

Wir haben Freiheiten bei der Wahl der Hilfsfelder/Potentiale:

Unabhängig der Wahl von χ (Eichung) resultieren die selben Felder

$$\phi' \coloneqq \phi - \partial_t \cdot \chi \qquad \overrightarrow{A'} = \vec{A} + \nabla \cdot \chi$$

Wir können die Divergenz von $\vec{A}$ beliebig wählen, indem wir χ verändern

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A'} = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \cdot \chi$$

Eichungen

Ausgehend von den Maxwell Gleichungen

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \partial_t \vec{\boldsymbol{D}} + \vec{\mathbf{j}_0} \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \rho_0$$

Erhalten wir:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right]\boldsymbol{A} = -\mu_0 \cdot \boldsymbol{j} + \nabla \cdot \left[\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi\right] \qquad \nabla \cdot [\partial_t \boldsymbol{A} + \nabla\phi] = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j_0} + \boldsymbol{j_p} + \boldsymbol{j_m} = \boldsymbol{j_0} + \boldsymbol{\partial_t P} + \nabla \times \boldsymbol{M} \qquad \rho = \rho_0 + \rho_f$$

Lorenz-Eichung

Folgende Eichung

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\partial_t \phi$$

Resultiert in entkoppelung der Gleichungen

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right]\boldsymbol{A} = -\mu_0 \cdot \boldsymbol{j} \qquad \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial t^2\right] \cdot \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

A_x, A_y, A_z und ϕ können separat berechnet werden.

Komplexe Potentiale

Verwenden wir für das Vektorpotential und Skalarpotential folgenden Ansatz:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = Re\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot e^{-i\omega t}\} \qquad \phi(\boldsymbol{r},t) = Re\{\phi(\boldsymbol{r}) \cdot e^{-i\omega t}\}$$

$$\left[\nabla^2 + \frac{1}{c^2}k^2\right] \cdot \vec{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = -\mu_0\mu \cdot \vec{\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{r}) \qquad \left[\nabla^2 + \frac{1}{c^2}k^2\right] \cdot \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho_0(\boldsymbol{r})$$

$$\vec{A}(r) = \iiint_V G_0(r,r')\,\mu_0\mu \cdot \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{r}') \cdot dV' \qquad \phi(r) = \iiint_V G_0\,(r,r') \cdot \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho_0(\boldsymbol{r}') \cdot dV'$$